

Pauta Auxiliar 4: PDD y PDE

Martes 20 de Abril de 2010

Problema 1

(a) La estrategia sería la siguiente: En la primera hora hornear los pernos 1 y 2, en la segunda hora los pernos 1 y 3, y en la tercera hora los pernos 2 y 3. Luego, con sólo 3 horas, ha sido suficiente para hornear los 3 pernos con capacidad para 2 pernos.

(b) Note que se requiere de $d \cdot n$ horas en total para hornear a todos los pernos si el horno tuviese capacidad 1. Sin embargo, dado que el horno tiene una capacidad de k , entonces se pueden hornear los pernos en $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ grupos, cada uno con a lo más k pernos (todos con exactamente k excepto posiblemente el último grupo). Cada grupo pasará d horas en el horno por lo que en total tenemos la cota superior de $d \cdot \lceil \frac{n}{k} \rceil$.

(c) Modelo del problema:

■ **Etapas:**

Horas utilizadas, $t : 1, \dots, d \cdot \lceil \frac{n}{k} \rceil$.

■ **Variables de estado:**

$$\begin{pmatrix} n_0^t \\ n_1^t \\ \vdots \\ n_d^t \end{pmatrix},$$

con n_j^t = número de pernos que han sido horneados por j horas hasta la hora t .

■ **Variables de decisión:**

$$\begin{pmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{d-1}^t \end{pmatrix},$$

con a_l^t = número de pernos que horneo para pasar de tener l horas horneadas a $l+1$ al principio de la hora t .

■ **Recurrencia de estados:**

$$\begin{aligned} n_0^{t+1} &= n_0^t - a_0^t \\ n_j^{t+1} &= n_j^t - a_j^t + a_{j-1}^t \forall j \in \{1, \dots, d-1\} \\ n_d^{t+1} &= n_d^t + a_{d-1}^t \end{aligned}$$

■ **Función de costo:**

$$V^t(n_0^t, n_1^t, \dots, n_d^t) = 1 + \min_{0 \leq a_j^t \leq n_j^t \text{ for } 0 \leq j \leq d-1, \sum_{j=0}^{d-1} a_j^t \leq k} V^{t+1}(n_0^t - a_0^t, n_1^t - a_1^t + a_0^t, \dots, n_d^t + a_{d-1}^t)$$

■ Condiciones de borde:

$$\begin{aligned} V^t(0, 0, \dots, 0, n) &= 0, \forall t, 0 \leq t \\ n_0^0 &= n \\ n_j^0 &= 0, \forall j \in \{1, \dots, d\} \end{aligned}$$

Problema 2

1. MODELO DETERMINÍSTICO

Variable de estado:

S_t = años de uso de la máquina disponible al inicio del período t .

Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

Función de beneficio:

$$f_t(S_t, X_t) = \begin{cases} C_{S_t} + f_{t+1}^*(S_t + 1) & \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + f_{t+1}^*(X_t + 1) & \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} f_t(S_t, X_t)$$

Donde $f_t^*(S_t)$ = costo mínimo de la operación de la máquina desde el inicio del período t hasta el final, es decir, hasta T si la antigüedad del equipo es S_t .

Condiciones de borde y función objetivo

$$\begin{aligned} f_{T+1}(S_{T+1}) &= -V_{S_{T+1}} \\ f_1^* &= \min_{X_1=0,1,2,\dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + f_2^*(X_1 + 1) \right\} \end{aligned}$$

2. MODELO ESTOCÁSTICO

Variable de estado

S_t = años de uso de la máquina disponible al inicio del período t .

Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

Variable aleatoria

$$w_t(S_t) = \begin{cases} 1 & \text{máquina buena al final del período } t, \text{ si es de antigüedad } S_t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde la probabilidad $P[w_t(S_t) = 1] = (1 - q_{S_t+1})$

Función de beneficio:

$$E[f_t(S_t, X_t)] = \begin{cases} C_{S_t} + (1 - q_{S_t+1}) \cdot f_{t+1}^*(S_t + 1) + q_{S_t+1} \cdot \left(1, 5I_0 + f_{t+1}^*(0)\right) \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + (1 - q_{X_t+1}) \cdot f_{t+1}^*(X_t + 1) + q_{X_t+1} \cdot \left(1, 5I_0 + f_{t+1}^*(0)\right) \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} E[f_t(S_t, X_t)]$$

Donde $f_t^*(S_t)$ = costo mínimo esperado de la operación de la máquina desde el inicio del período t hasta el final, es decir, hasta T si la antigüedad del equipo es S_t .

Condiciones de borde y función objetivo

Hay que notar que el valor residual ya no es tan claro, porque si la máquina se hecha a perder justo al final del último período NO necesitamos reemplazarla, así se tendrá:

$$E[f_T(S_T, X_T)] = \begin{cases} C_{S_T} + (1 - q_{S_T+1}) \cdot -V_{S_T+1} \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_T} + I_{X_T} - V_{S_T} + (1 - q_{X_T+1}) \cdot -V_{X_T+1} \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_1 = \min_{X_1=0,1,2,\dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + \mathbb{E}_{w_1} \left[f_2^*(X_1 + 1) \right] \right\}$$

Problema 3

■ Etapas:

Cada uno de los períodos del horizonte de evaluación, $t=1,\dots,T$

■ Variables de Estado:

S_t = Stock en tienda en período t .

B_t = Stock en bodega central en periodo t .

L_t = Cantidad de piscinas enviadas a la tienda, en el período anterior.

■ Variable de Decisión:

e_t = Cantidad de piscinas a enviar de bodega central a tienda en periodo t .

■ **Variable Aleatoria:**

D_t = Demanda de piscinas en la tienda en periodo t.

Dado que en cada uno de los periodos del horizonte la tienda tiene R clientes potenciales, cada uno de los cuales demanda 1 unidad del producto con probabilidad q_t , en el periodo t , se tiene que:

$$P[D_t = k] = \binom{R_t}{k} q_t^k (1 - q_t)^{R_t - k}$$

■ **Recurrencias:**

$$S_{t+1} = \max\{S_t + e_t - D_t, 0\}$$

$$B_{t+1} = B_t - e_t$$

$$L_{t+1} = e_t$$

■ **Función de Beneficio:**

$$E_{D_t}[V_t(B_t, S_t, L_t, e_t)] = -c_t(e_t) - A_t \cdot |e_t - L_t| + \sum_{k=0}^{\infty} P[D_t = k] \cdot [U_{t,k} + V_{t+1}^*(B_t - e_t, \max\{S_t + e_t - k, 0\}, e_t)]$$

Donde:

$$U_{t,k} = P \cdot \min\{S_t + e_t, k\}$$

$$V_t^*(B_t, S_t, L_t) = \max_{e_t \leq B_t, S_t + e_t \leq K} \{E_{D_t}[V_t(B_t, S_t, L_t, e_t)]\}$$

■ **Condiciones de Borde:**

$$V_{T+1}(B_{T+1}, S_{T+1}, L_{T+1}) = S \cdot S_{T+1}$$

$$B_1 = C$$

$$L_1 = e_0$$

$$S_1 = H$$