

## Auxiliar 4: PDD y PDE

Martes 20 de Abril de 2010

### Problema 1

La fábrica metalmecánica ABC fabrica pernos de alta resistencia. El proceso de fabricación de estos pernos requiere un templado en un horno muy especial. Cada uno de estos pernos precisa hornearse  $d$  veces en este horno especial, cada una de estas horneadas demora 1 hora. El horno tiene capacidad para  $k$  pernos en cada horneada, y el total de pernos a fabricar es  $n$ . A modo de ejemplo, y para visualizar el problema, considere la fabricación de 3 pernos, cada uno requiriendo 2 horneadas y la capacidad del horno es también 2.

- Para el ejemplo simplificado calcule el número mínimo de horas que precisa para fabricar los 3 pernos. (1 punto)
- Pruebe que  $d \cdot \lceil \frac{n}{k} \rceil$  horas son suficientes para procesar los  $n$  pernos. (1 punto)
- Plantee un modelo de Programación Dinámica Determinística que permita encontrar la estrategia óptima para el caso general. Plantee las etapas, los estados, las variables de decisión, la función de valor, la ecuación de recurrencia, la condición de borde y la función objetivo. Su modelo requerirá que la variable de estado será multidimensional. (4 puntos).

### Problema 2

El gerente de operaciones de una fábrica desea programar la operación de un proceso para los siguientes  $T$  períodos. Para realizar este proceso se necesita una máquina cuyo costo de operación depende de su antigüedad y es igual a  $C_n$  por año, con  $n$  representando la edad de la máquina ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Cada año se tiene la opción de reemplazar este equipo por otro, nuevo o usado, el costo de adquisición de un equipo con  $n$  años de uso es de  $I_n$ . Por otra parte el gerente puede vender un equipo con  $n$  años de uso a un precio de venta  $V_n$ .

Actualmente la gerencia NO dispone de la máquina, por lo que necesariamente tendrá que comprarla, además todos los años debe tener el proceso funcionando.

- Plantee el problema de operación y reemplazo de equipo como un problema de programación dinámica determinística, con el fin de minimizar el costo total.

Considere ahora que el equipo tiene una probabilidad de fallar al final de un cada uno de los períodos. Esta probabilidad depende exclusivamente de la edad de la máquina y es igual a  $q_n$ . En este caso necesariamente deberemos reemplazar el equipo por uno nuevo, pagando un sobreprecio de un 50 %, al inicio del período siguiente. Un equipo que falla pierde su valor económico (nadie lo compra).

- Plantee este problema de operación y reemplazo de equipo como un problema de programación dinámica estocástica, con el fin de minimizar el costo total esperado.

### Problema 3

Una tienda ha importado  $C$  unidades de piscinas, las cuales espera vender durante la temporada de Verano. Al comenzar la temporada, que dura  $T$  semanas, las  $C$  unidades están almacenadas en la **bodega central** que se encuentra en las afueras de la ciudad.

Al comienzo de cada semana salen camiones a dejar mercadería a la tienda y el **product manager** a cargo de las piscinas puede enviar en ellos productos. No es posible devolver productos desde la tienda a la **bodega central**. Al final de cada semana, la tienda informa al **product manager** el número de piscinas vendidas (y por tanto la cantidad que quedó en stock para la semana siguiente). Se sabe que inicialmente se cuenta con un inventario de  $H$  productos en la tienda y que el envío del mes 0 fue  $e_0$ .

En el período  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) del horizonte, la tienda tiene  $R_t$  clientes potenciales, cada uno de los cuales de manera independiente demandará **1 unidad** del producto con probabilidad  $q_t$ .

El precio de venta de las piscinas es  $P$ . Al terminar la temporada, las unidades que hayan quedado en el **stock de la tienda** pueden ser vendidas a una liquidadora a un precio  $S < P$ .

El costo de transporte desde la **bodega central** a la tienda en la semana  $t$  tiene dos componentes: Primero, se incurre en un costo de  $c_t(e_t)$  si se envían  $e_t$  unidades en la semana  $t$ . Segundo, si el envío en la semana  $t - 1$  es  $e_{t-1}$  y el envío en el mes  $t$  es  $e_t$ , entonces se incurrirá durante la semana  $t$  en un costo de suavizamiento o atenuación igual a  $A_t \cdot |e_t - e_{t-1}|$ .

Por simplicidad suponga que no hay restricciones de capacidad en los camiones y que el stock máximo que se puede mantener en la **tienda** es de  $K$  unidades del producto. Suponga también que no existen costos por mantener el producto en bodega y que los envíos a la tienda son instantáneos.

Formule el problema de programación dinámica estocástica que debe resolver el **product manager** a cargo de las piscinas para decidir cuantas unidades enviar a la tienda al comienzo de cada semana.