



## CTP 1: Repaso de Probabilidades

Martes 06 de Abril de 2010

- a) El resultado corresponde a una carrera de exponenciales entre  $T_c \sim \text{Min}\{t_{c1}, \dots, t_{cN}\}$  y  $T_v \sim \text{Min}\{t_{v1}, \dots, t_{vM}\}$ . Donde  $T_c \sim \exp(N\lambda)$  y  $T_v \sim \exp(M\mu)$ . El hecho que sean las 10 de la mañana no es considerado debido a la propiedad de pérdida de memoria de la exponencial.

$$P(T_c \leq T_v) = \frac{N\lambda}{N\lambda + M\mu}$$

- b) Si  $k > N$  la probabilidad pedida es nula. Para el caso  $0 < k \leq N$  consideremos que  $T_i$  representa el tiempo que en demora en pasar el primero de los  $N - i$  conejos que quedan recorriendo la ciudad (o en otras palabras, el tiempo que demora en pasar el próximo conejo dado que ya han pasado  $i$  por la casa de Alicia).

$$T_i \sim \exp((N - i)\lambda)$$

Si queremos que cuando pase el primer vehículo municipal hayan pasado ya  $k$  conejos, debemos imponer que  $T_0 < T_v, T_1 < T_v, \dots, T_{k-1} < T_v$  además que  $T_k > T_v$ , es decir:

$$\begin{aligned} P(\text{hayan pasado } k \text{ conejos}) &= P(T_0 < T_v) \cdot \dots \cdot P(T_{k-1} < T_v) \cdot P(T_k > T_v) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(N - i)\lambda}{(N - i)\lambda + M\mu} \cdot \frac{M\mu}{M\mu + (N - k)\lambda} \end{aligned}$$

- c) El tiempo que demora en pasar el conejo amigo de Alicia se distribuye exponencial de tasa  $\lambda$ , como la esperanza de una exponencial es el inverso del parámetro se tiene que el tiempo esperado es  $\frac{1}{\lambda}$ .
- d) **Primera Forma:** Le calcularemos la esperanza a una v.a. de la forma

$$T = \sum_{i=0}^{N-1} T_i$$

Como la exponencial tiene pérdida de memoria, calculamos el tiempo esperado directamente como  $E[T]$ .

$$E[T] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{(N - i)\lambda}$$

**Segunda Forma:**

Encontremos la distribución del máximo de exponenciales:

$$P[\max\{X_1, \dots, X_N\} < x] = \prod_{i=1}^N P[X_i < x] = (1 - \exp(-\lambda x))^N$$

Luego:

$$E[\max\{X_1, \dots, X_N\}] = \int_0^\infty P[\max\{X_1, \dots, X_N\} > x] dx \quad (1)$$

$$= \int_0^\infty 1 - (1 - \exp(-\lambda x))^N dx \quad (2)$$

Haciendo  $u = 1 - \exp(-\lambda x)$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1 - u^N)/(1 - u) du$$

recordando la formula  $\sum_{k=0}^{N-1} u^k = (1 - u^N)/(1 - u)$ , la cosa queda

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \sum_{k=0}^{N-1} u^k = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

e) Sea  $Y$  una v.a. que representa el número de vehículos que tienen en su recorrido la casa de **Alicia**. Se tiene:

$$Y \sim \text{Binomial}(M, p)$$

f) El hecho de que **Alicia** reciba algún bono significa que uno de los vehículos municipales llegó antes que cualquier de los conejos. Debemos condicionar también sobre el número de vehículos que pasan por la casa de Alicia.

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^M P_i \cdot P(i \text{ veh pasan por la casa de Alicia}) \\ &= \sum_{i=0}^M \frac{i\mu}{i\mu + N\lambda} \cdot \binom{M}{i} p^i (1-p)^{M-i} \end{aligned}$$