INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: C. Thraves, S. Astroza, N. Inostroza, F. Solari

Auxiliar 10: Markov Continuo

Martes 22 de Junio de 2010

Problema 1

Considere un cajero automático al cual llegan clientes de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ [clientes/hora]. En el lugar donde se encuentra el cajero hay espacio para dos personas (una utilizando el cajero y otra esperando su turno). Si un cliente que llega encuentra que ya hay 2 personas ahí, se ve obligado a retirarse (buscará otro cajero).

Cuando un cliente accede al cajero realiza alguna operación financiera, la que toma un tiempo exponencialmente distribuido, con media $\frac{1}{\mu}$ [horas]. Una fracción $1-p$ de los clientes se retira al terminar su primera operación, mientras que una fracción p de los clientes requiere una operación adicional, lo cual toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $\frac{1}{\gamma}$ [horas]. Nadie realiza más de 2 operaciones.

1. Modele el estado de ocupación del cajero como una cadena de Markov en tiempo continuo. Justifique la existencia de una ley probabilidades estacionarias o de equilibrio. Plantee un sistema de ecuaciones a partir del cual se puedan obtener las probabilidades estacionarias.
2. Respecto del comportamiento de largo plazo de este sistema, conteste las siguientes preguntas.
   a) ¿Qué fracción de los clientes que llegan con intenciones de usar el cajero logran su propósito?
   b) Dado que un cliente logró utilizar el cajero, cuál es la probabilidad que al llegar haya encontrado el cajero ocupado por una persona que estaba realizando su segunda operación?
   c) Suponga que usted llega al lugar donde se ubica el cajero y lo encuentra ocupado por otro cliente (y nadie más esperando). Si dicho cliente está realizando su segunda operación ¿cuál es el valor esperado del tiempo que ud. deberá esperar (en cola) antes de poder usar el cajero? ¿Y si el otro cliente está realizando su primera operación?
   d) ¿Cuánto tiempo esperan en cola, en promedio, los clientes que logran utilizar el cajero?
3. Suponga que el banco que administra este cajero cobra b [$] por cada operación realizada (un cliente que realiza 2 operaciones significa un ingreso de $2b$). Además, mantener el cajero funcionando en ese lugar tiene un costo de c [$/hora]. ¿Qué relación deben cumplir los parámetros del problema para que el cajero se autofinancie?

Problema 2

Considere la complicada situación que vive Armijo Catalán, flamante auxiliar de variados cursos de Ingeniería Industrial. Este personaje recibe consultas de sus alumnos (en forma de e-mails) de acuerdo a un proceso de poisson de tasa λ (e-mails/hora). La capacidad de la cuenta de Armijo es tal que puede almacenar a lo más 3 e-mails (el resto simplemente rebotará). Armijo responde a cada una estas consultas en un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu}$ y lo hará mientras hayan consultas sin responder (una a la vez). Cada vez que responde una consulta el e-mail correspondiente es borrado.

Por otro lado la novia de Armijo llama a este a su celular con el objeto de demandar atención inmediata por parte de él. El tiempo entre llamadas es una variable aleatoria distribuida exponencialmente de media $\frac{1}{\delta}$. Si la llamada se produce cuando Armijo se encuentra con menos de 3 consultas pendientes por contestar (incluyendo en la que se encuentra trabajando si corresponde) entonces, acudirá inmediatamente al encuentro con su enamorada con la cual pasará un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\gamma}$. Sin embargo si su cuenta de correo está llena acudirá donde su novia apenas termine de contestar el mensaje actual. Cuando la novia de este personaje ha llamado 2 veces sin recibir respuesta entra en un estado de shock (producto de celos injustificados?) y acude instantáneamente en encuentro de Armijo, al cual encuentra y reta durante un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Tras este altercado la novia ingresa ilícitamente a la cuenta de correo de Armijo y borra todos los e-mails que encuentre. Por último considere que si el auxiliar se encuentra en su oficina y sin mails pendientes se dedica a trabajar en su tesis.

1. Modele el estado de ocupación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Argumente la existencia de probabilidades estacionarias. Escriba las ecuaciones que permitirían calcularlas.

En lo que sigue suponga conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena.

3. ¿Cual es el número promedio de "escenas de celos" que la novia le hace a Armijo en una hora.
4. ¿Que fracción del tiempo, en el largo plazo Armijo dedica a su trabajo de tesis?

Problema 3

Usted ha decidido instalarse con un negocio para lustrar zapatos. El establecimiento consta de dos sillas. En la silla 1 los zapatos del cliente son limpiados y embetunados, para luego pasar a la silla 2, donde se les saca el brillo. Los tiempos de servicio en las dos sillas son variables aleatorias independientes, exponencialmente distribuidas de tasas μ_1 y μ_2 respectivamente. Considere que los clientes potenciales tienen tiempos de llegada exponenciales de tasa λ y que el cliente sólo entra al establecimiento si las dos sillas están desocupadas.

1. Modele el problema anterior como una cadena de Markov en tiempo continuo.

   Suponga que ahora un ayudante es contratado y cada uno trabaja en una silla. Considere el mismo problema anterior, pero ahora un cliente potencial entra al negocio si la silla 1 está vacía. Cuando el trabajo en la silla 1 se termina, pasa a la silla 2 si está vacía o espera en la 1 hasta que la 2 se desocupe.
2. Modele el nuevo problema como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Por qué puede hacerlo ?.
3. ¿Qué proporción de clientes potenciales entran al establecimiento ?.
4. ¿Cuál es la tasa promedio de entrada de clientes al negocio ?.
5. ¿Cuál es el número promedio de clientes dentro del negocio ?.
6. En promedio, ¿cuánto tiempo pasa un cliente que entra al local, dentro de éste?.