**IN3702:** Investigación de Operaciones
**Profs:** J. Correa, R. Epstein
**Auxs:** C. Thraves, S. Astroza, N. Inostroza, F. Solari,

# Auxiliar 5: Probabilidades y Programación Dinámica

Martes 27 de Abril de 2010

## Problema 1

1. Para calcular este valor esperado debemos calcular las probabilidades de obtener premios con una apuesta común.

   La probabilidad de obtener un primer premio es igual a $\frac{1}{\binom{N}{K}}$.

   Mientras que la probabilidad de obtener un segundo premio es $\frac{K\cdot(N-K)}{\binom{N}{K}}$ pues es el resultado de que de los $K$ números escogidos en el cartón, salgan $K-1$ de éstos ganadores, lo que es igual a $K$, (o bien $\binom{K}{K-1}$), y debe ser multiplicado esto por los casos del número sobrante sorteado que no acertó en el cartón, que tiene $N$-$K$ posibilidades (o bien $\binom{N-K}{1}$), (OJO, este último número sorteado se refiere al número de la tombola (NO del cartón), el cual no tiene más remedio que ser alguno de los $N-K$ que no se escogieron en al cartón).

   Además, si se obtiene un premio se obtiene solo uno. Por lo tanto, el valor esperado de la apuesta simple es igual a $\frac{P+K\cdot(N-K)\cdot S}{\binom{N}{K}}$.

2. En este caso, la probabilidad de obtener un primer premio es igual a $\frac{K+1}{\binom{N}{K}}$, ya de los $K+1$ números escogidos en el cartón, sirven los casos en donde los $K$ números sorteados están en los $K+1$ números escogidos (lo que es equivalente a: $\binom{K+1}{K}$).

   La probabilidad de obtener el segundo premio es $\frac{\binom{K+1}{K-1}\cdot(N-K-1)}{\binom{N}{K}} = \frac{(K+1)\cdot K\cdot(N-K-1)}{2\cdot\binom{N}{K}}$, ya que de los $K+1$ números escogidos en el cartón, deben salir $K-1$ como ganadores (lo cual es $\binom{K+1}{K-1}$), y además se debe multiplicar por las posibilidades que tiene el número restante (digamos el $k$-*ésimo* número sorteado) del sorteo que no acertó en mi cartón, el cual puede haber caido en cualquiera de los $N-K-1$ números que no se jugaron en el cartón.

   Nuevamente, si se obtiene un premio se obtiene solo uno. Por lo tanto, el valor esperado de la apuesta especial es igual a

   $$\frac{2(K+1)\cdot P+(K+1)\cdot K\cdot(N-K-1)\cdot m\cdot S}{2\cdot\binom{N}{K}} = (K+1)\cdot\frac{2P+K\cdot(N-K-1)\cdot m\cdot S}{2\cdot\binom{N}{K}}$$

3. *a*) De acuerdo a lo calculado en los puntos anteriores, $m$ debería satisfacer:

   $$(K+1)\cdot\frac{P+K\cdot(N-K)\cdot S}{\binom{N}{K}} = (K+1)\cdot\frac{2P+K\cdot(N-K-1)\cdot m\cdot S}{2\cdot\binom{N}{K}}$$

   ,es decir, $P+K\cdot(N-K)\cdot S = P+K\cdot(N-K-1)\cdot\frac{m\cdot S}{2}$, y por lo tanto, $m=\frac{2\cdot(N-K)}{(N-K-1)}$.

   *b*) Debería preferir jugar las $K+1$ apuestas "disjuntas" porque tienen menor variabilidad. Para verificar esto comparamos las varianzas. Sea $X$ el premio a recibir si se realizan $K+1$ apuestas simples sin repetir números e $Y$ , el premio a recibir por una apuesta especial. Entonces:

$$
\begin{aligned}
Var(Y) - Var(X) &= \left(E[Y^2] - (E[Y])^2\right) - \left(E[X^2] - (E[X])^2\right) \\
&= E[Y^2] - E[X^2] \\
&= \frac{K+1}{\binom{N}{K}} \cdot \left(P^2 + K \cdot (N-K-1) \cdot \frac{m^2 \cdot S^2}{4} - (P^2 + K \cdot (N-K) \cdot S^2)\right) \\
&= \frac{(K+1) \cdot K \cdot S^2}{\binom{N}{K}} \cdot \left((N-K-1) \cdot \frac{m^2}{4} - (N-K)\right) \\
&= \frac{(K+1) \cdot K \cdot S^2}{\binom{N}{K}} \cdot \left((N-K-1) \cdot \frac{(N-K)^2}{(N-K-1)^2} - (N-K)\right) \\
&= \frac{(N-K) \cdot (K+1) \cdot K \cdot S^2}{\binom{N}{K}} \cdot \left(\frac{(N-K)}{(N-K-1)} - 1\right) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

## Problema 2

a) Primero calcularemos la probabilidad de que el primer sonido que escuche la ancianita proveniente de los animales sea un silbido dado que hay $k$ canarios (y obviamente $N-k$ gatos). Llamando a la probabilidad anterior $p_k$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
p_k &= \mathbb{P}(Escuche\ primero\ silbido \mid Hay\ k\ canarios) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(El\,primer\,sonido\,que\,escuche\,sea\,el\,i-esimo\ \wedge\ el\,i-esimo\,sonido\,sea\,un\,silbido|\,Hay\,k\,canarios)
\end{aligned}
$$

Como la ancianita escucha con probabilidad $q$ y no escucha con probabilidad $1-q$, podemos decir que el número del primer sonido que escuche se comporta como una geométrica. Luego:

$$\mathbb{P}(El\,primer\,sonido\,que\,escuche\,sea\,el\,i-esimo) = q(1-q)^{i-1}$$

Además apelando a la propiedad de pérdida de memoria de la exponencial y la probabilidad de que se escuche un silbido antes que un maullido es una carrera de exponenciales entre el mínimo de los tiempos de los canarios (que distribuye $exp(k\lambda_c)$) y el mínimo de los tiempos de los gatos (que distribuye $exp((N-k)\lambda_g)$) se tiene:

$$\mathbb{P}(El\,i-esimo\,sonido\,sea\,un\,silbido|\,Hay\,k\,canarios) = \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g}$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
p_k &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g} q(1-q)^{i-1} \\
&= \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g} q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^{i-1} \\
&= \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g} \frac{q}{q} \\
&= \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g}
\end{aligned}
$$

Sólo nos falta condicionar por el número de canarios (claramente corresponde a una binomial).

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Escuche\ primero\ un\ silbido) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(Escuche\ primero\ un\ silbido \mid hay\ k\ canarios)\mathbb{P}(hay\ k\ canarios) \\
&= \sum_{k=0}^{N} p_k \mathbb{P}(hay\ k\ canarios) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g} \binom{N}{k} (1-p)^k p^{N-k}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Pedro\ gane\ a\ Juan \mid Pedro\ gana\ a\ los\ otros\ 10) &= 1 - \mathbb{P}(Juan\ gane\ a\ Pedro \mid Pedro\ gana\ a\ los\ otros\ 10) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Juan\ gane) \\
&= 1 - \frac{1}{12} \\
&= \frac{11}{12}
\end{aligned}
$$

Lo anterior se tiene pues cada alumno puede obtener cada uno de los números de la tómbola equiprobablemente. Luego la probabilidad que Juanito tenga el mayor es $1/12$.

c) Sólo para explicar de manera más simple la solución consideraremos que los turistas suizos son un poco más alemanes para sus cosas y cuando ven al chileno ocupando su asiento lo enfrentan, haciendo que se cambie de lugar (a otro asiento que nuevamente el chileno elige al azar entre los disponibles). Esta manera de mirar el problema es equivalente a la descrita en el enunciado.

Es fácil notar que si en vez de un bus de 40 personas fuera un bus de 2 (1 turista y 1 chileno) o de 3 (2 turistas y 1 chileno) la probabilidad pedida sería $1/2$. Demostraremos por inducción que para un bus de $N$ asientos la probabilidad de que el último en subirse encuentre su asiento desocupado es $1/2$. Asumiremos que lo anterior se cumple para $1, \ldots, N-1$ y lo demostraremos para $N$.

Sin pérdida de generalidad enumeraremos los asientos de 1 a $N$, siendo el asiento $i$ el del pasajero que se sube en $i - esimo$ lugar al bus (por ejemplo el pasajero que se sube tercero al bus tiene en su ticket marcado el asiento número 3). Condicionaremos según el asiento que elige el chileno (el primero en subir), recordando que $\mathbb{P}(Chileno\ ocupa\ el\ asiento\ i) = 1/N$

$$
\mathbb{P}(Pasaj\ N\ encuentre\ asiento\ desocup) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(Pasaj\ N\ encuentre\ asiento\ desocup \mid Chileno\ ocupa\ el\ asiento\ i)/N
$$

Notar que cuando cuando el chileno se sienta en su asiento (el primero) la probabilidad que el último pasajero encuentre su asiento desocupado es 1. Cuando el chileno se sienta en el asiento $N$ la probabilidad mencionada será nula. En el caso en que el chileno se siente en el asiento $i$, lo que sucederá es que el turista $i$ lo sacará del asiento y el chileno deberá sentarse al azar entre $N-i$ asientos disponibles, siendo, por hipótesis de inducción, la probabilidad de que el último turista encuentre su asiento desocupado igual a $1/2$. Luego:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Pasaj\ N\ encuentre\ asiento\ desocup) &= (1 + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{1}{2} + 0)\frac{1}{N} \\
&= (1 + \frac{1}{2}(N-2))\frac{1}{N} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

## Problema 3

i)
- **Etapas:** Los días $t = 1, \ldots, T$.
- **Variables de estado:** Número de acciones al inicio del día $t$ ($I_t$) y precio de la acción en el día $t$ ($y_t$).
- **Variable de decisión:** $x_t \in S_t$ con $S_t = \{-1, 0, 1\}$ si $I_t \geq 1$ o $S_t = \{0, 1\}$ si $I_t = 0$
- **Recurrencia de estados:**
$$I_{t+1} = I_t + x_t$$
- **Variable aletoria:** Precio en el día $t$ ($y_t$)
- **Condiciones de borde:**
$$f_T^*(y_T, I_T) = 0$$
$$I_0 = N$$
- **Función de Beneficios:**
$$f_t(x_t, I_t, y_t) = x_t G_t(y_t) - C\,|x_t| + \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t + x_t, y_{t+1}) \mid y_t\right]$$

  Con
$$f_t^*(I_t, y_t) = \max_{x_t \in S_t} f_t(x_t, I_t, y_t)$$

ii) Para ver cuando conviene comprar calcularemos la siguiente diferencia:

$$f_t(1, I_t, y_t) - f_t(0, I_t, y_t) = G_t(y_t) - C + \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t + 1, y_{t+1}) \mid y_t\right] - \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) \mid y_t\right]$$

Notar que los valores esperados en la ecuación debieran ser iguales excepto en el caso de inventario restrictivo (cuando $I_t = 0$), pero ese caso no puede ocurrir cuando consideramos $N \geq T$. Por lo tanto convendrá comprar cuando:

$$G_t(y_t) - C \geq 0 \quad \Rightarrow \quad G_t(y_t) \geq C$$

En el caso de que queramos saber si conviene vender debemos calcular la siguiente diferencia:

$$f_t(-1, I_t, y_t) - f_t(0, I_t, y_t) = -G_t(y_t) - C + \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t - 1, y_{t+1}) \mid y_t\right] - \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) \mid y_t\right]$$

Por razones similares el caso anterior, conviene vender cuando:

$$-G_t(y_t) - C \geq 0 \quad \Rightarrow \quad G_t(y_t) \leq -C$$

iii) Cuando $N < T$ podríamos llegar al caso en que $I_t$ sea nulo (se nos acabe el inventario). Luego en el caso de la compra el valor $\mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t + 1, y_{t+1}) \mid y_t\right] - \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) \mid y_t\right]$ sería mayor o igual a 0 porque el primer término se maximizaría en $S_t = \{-1, 0, 1\}$ y el segundo en $S_t = \{0, 1\}$, siendo el último más restrictivo. La condición para que convenga comprar sería que $G_t(y_t) - C \geq \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) \mid y_t\right] - \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t + 1, y_{t+1}) \mid y_t\right]$

Cuando queramos decidir si vender o no la diferencia $\mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t - 1, y_{t+1}) \mid y_t\right] - \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) \mid y_t\right]$ será negativa y necesitaremos que $-G_t(y_t) - C \geq \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) \mid y_t\right] - \mathbb{E}\left[f_{t+1}^*(I_t - 1, y_{t+1}) \mid y_t\right]$ para que convenga vender.

## Problema 4

Un modelo para determinar la distribución de vehículos podría ser el siguiente.

- **Etapas**

  Cada uno de lo días: $t = 1, \ldots, T$

- **Variables de Estado**

  Debemos saber cuántos vehículos hay en cada local. Para esto bastan con saber cuántos hay en el local 1, pues el resto estará en el local 2.

  Siendo así definimo $s_t$ como el número de vehículos en el local 1 el día $t-1$. $s_1$ será el número de vehículos en el local 1 al inicio del análisis.

- **Variables de Decisión**

  Las decisiones a tomar corresponden a cuántos vehículos tener disponibles en cada local para cada día. De esta manera definimos $x_t$ como el número de vehículos a tener disponibles en el local 1 el día $t$.

  `Observación:` También se puede realizar un modelo cuyas variables de decisión sean cuántos vehículos mover de un local para el otro en cada día.

- **Variables Aleatorias**

  Las demandas que se observan son aleatorias. Hay una demanda para cada local para cada día. Entonces definimos las variables $d_t^i$ como la demanda para el local $i$ en el día $t$.

  La distribución de $d_t^1$ está dada por $P(d_t^1 = k) = p_t(k)$, mientras que la distribución de $d_t^2$ está dada por $P(d_t^2 = l) = q_t(l)$.

- **Recurrencias**

  Las variables de estado se actualizan de acuerdo a las siguiente recurrencia:

$$s_{t+1} = x_t$$

- **Función de Beneficio Acumulado**

$$\begin{aligned}
V_t(s_t, x_t) &= \mathbb{E}_{d_t^1, d_t^2}\left[I\left(\text{mín}\left\{x_t, d_t^1\right\} + \text{mín}\left\{N - x_t, d_t^2\right\}\right) - C_{21}\,\text{máx}\left\{x_t - s_t, 0\right\} - C_{12}\,\text{máx}\left\{s_t - x_t, 0\right\} + V_{t+1}^*(x_t)\right] \\
&= I\left(\sum_{k=0}^{x_t} k p_t(k) + \sum_{k=x_t}^{\infty} x_t p_t(k) + \sum_{l=0}^{N-x_t} l q_t(l) + \sum_{l=N-x_t+1}^{\infty} (N - x_t) q_t(l)\right) - C_{21}\,\text{máx}\left\{x_t - s_t, 0\right\} \\
&\quad - C_{12}\,\text{máx}\left\{s_t - x_t, 0\right\} + V_{t+1}^*(x_t)
\end{aligned}$$

  donde

$$V_t^*(s_t) = \text{máx}\left\{V_t(s_t, x_t) \ : \ 0 \leq x_t \leq N, entero\right\}$$

- **Condición de Borde**

  El estado inicial es $s_1 = N$ y no hay valor residual para la configuración final: $V_{T+1}(\cdot) = 0$