IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: C. Thraves, S. Astroza, N. Inostroza, F. Solari,

Auxiliar 5: Probabilidades y Programación Dinámica

Martes 27 de Abril de 2010

Problema 1

Considere el siguiente juego de azar. Se cuenta con un bolillero con N bolillas numeradas de 1 a N. Se extraen, sin reposición, K bolillas ($K < N$). Hay dos posibilidades de apuesta

- Apuesta común: en la cartilla se seleccionan K números entre 1 y N.
- Apuesta especial: en la cartilla se seleccionan $K + 1$ números entre 1 y N.

Cada apuesta común tiene un costo C y mientras que cada apuesta especial tiene un costo $(K + 1) \times C$. Una vez realizado el sorteo, por cada cartilla se pueden recibir los siguientes premios:

- Primer premio: Si se acierta a los K números sorteados se recibe un premio de valor P por cada cartilla.
- Segundo premio: Si se acierta a K - 1 de los números sorteados. En el caso de una apuesta simple, se recibe un premio de valor S. Para una apuesta especial, el premio es de valor $m \times S$.

1. ¿Cuál es el valor esperado de una apuesta común?
2. ¿Cuál es el valor esperado de una apuesta especial?
3. Considere que N es suficientemente grande (en relación a K) para que se puedan escoger *K+1* apuestas simples que no repiten números.
   (a) Calcule el valor de m que hace que, en valor esperado, sea indiferente realizar una apuesta especial o $K + 1$ apuestas simples que no repiten números.
   (b) Suponga que m tiene el valor del punto anterior. Si Ud. es adverso al riesgo, ¿qué prefiere, jugar una apuesta especial o $K + 1$ apuestas simples que no repiten números? Justifique intuitivamente.

Problema 2

a) Una ancianita compra un gatito con probabilidad p y un canario con probabilidad $1 - p$, comprando un total de N animales. Por otro lado se sabe que los gatos lanzan un maullido según una distribución exponencial de tasa λ_g, mientras que los canarios lanzan un silbido según una distribución exponencial de tasa λ_c. Además cada vez que los animales emiten un sonido (ya sea maullido o silbido) la ancianita lo escucha con probabilidad q y no lo escucha con probabilidad $1 - q$. Asuma que la ancianita compra todos los animales al mismo tiempo y de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer sonido que escuche la ancianita proveniente de los animales sea un silbido?

b) Los 142 alumnos del curso de `Investigación de Operaciones` participan en una lotería. Cada alumno saca un número del 1 al 142 desde una tómbola pero no lo puede ver. Dentro de los 12 mejores promedios de notas del curso se va a dar un premio al alumno que sacó el mayor número desde la tómbola. Los profesores diseñaron una máquina que permite comparar los números de dos alumnos, sin siquiera verlos, identificando al mayor. `Pedrito` es uno de los doce mejores alumnos y ya se comparó con otros 10 de los doce seleccionados, ganando en cada caso. Sólo le falta compararse con `Juanito` quien no se ha comparado aún con nadie. ¿Cuál es la probabilidad de que `Pedrito` le gane a `Juanito`?

c) Un bus con 40 asientos está por iniciar su viaje a `Puerto Montt`, con todos los asientos vendidos. En el bus viaja una delegación de 39 turistas suizos y un guía chileno. Los suizos son respetuosos para ocupar el asiento que está marcado en su ticket, sin embargo si al subir encuentran su asiento ocupado prefieren no molestar y toman un asiento desocupado al azar. Por su parte el chileno ignora el número del ticket y simplemente toma un asiento al azar. El guía chileno es el primero en subir al bus y tomar asiento. ¿Cuál es la probabilidad qué el último pasajero en subirse encuentre su asiento desocupado?

Problema 3

Un inversionista se ha especializado en comprar y vender la acción de la `empresa ABC`. El inversionista es dueño de N acciones en el día 0 y está diseñando una estrategia de compra y venta de acciones para los próximos T días. En cualquier día de ese período, el inversionista tiene sólo tres opciones: comprar una acción, vender una acción, o hacer nada. Por regulaciones legales el inversionista sólo puede vender acciones que posee. El precio de la acción es una variable aleatoria que puede tomar k valores distintos $\{v_1, \ldots, v_k\}$, y el precio en el día $t+1$ sólo depende del precio de la acción en el día t (i.e., $p_{ij}^t = \mathbb{P}[y_{t+1} = v_j | y_t = v_i]$ es dato del problema, donde y_t el precio en el día t). El inversionista ha calculado la ganancia (o pérdida) esperada en el precio de la acción durante cada período $[t, T]$ en función del precio de la acción en el día t. Si llamamos a este valor $G_t(y)$ matemáticamente lo podemos expresar como: $G_t(y) = \mathbb{E}(y_T | y_t = y) - y$. Además cada vez que el inversionista compra o vende paga un costo de transacción de C. El inversionista quiere maximizar la suma de las ganancias (pérdidas) esperadas menos los costos de transacción, durante los T días.

i) Formule el problema como un problema de `Programación Dinámica Estocástica`.

ii) Asuma que $G_t(y)$ es decreciente en y y que $N \geq T$. Muestre que si y_t es tal que $G_t(y_t) \geq C$, entonces conviene comprar. De la misma forma, verifique que si y_t es tal que $G_t(y_t) \leq -C$, entonces conviene vender. También muestre que en cualquier otro caso conviene hacer nada.

iii) Explique por qué si el número de acciones $N < T$, la política de la parte `(ii)` podría no ser óptima.

Problema 4

Una empresa de transportes cuenta con dos locales y con una flota de N vehículos idénticos para atender las solicitudes de sus clientes. Cada solicitud, cuando es atendida, mantiene ocupado un vehículo por el día completo.

Cada día la empresa enfrenta, en cada local, una demanda incierta, de la cual se conoce la distribución de probabilidades. Se sabe que el día t, el local 1 recibirá exactamente k solicitudes con probabilidad $p_k(t)$, mientras que el local 2 recibirá exactamente k solicitudes con probabilidad $q_t(k)$.

La empresa recibe un ingreso de valor I por cada pedido que puede atender. Cada pedido fuera de su capacidad se pierde. Movilizar un vehículo del local 1 al local 2, de un día para el otro, tiene un costo C_{12}, mientras que trasladar un vehículo del local 2 al 1, tiene un costo C_{21}. Inicialmente todos los vehículos están en el local 1.

Plantee un modelo de programación dinámica estocástica que permita determinar cómo distribuir los vehículos en los locales cada día para un horizonte de T días, de manera de maximizar el beneficio total esperado durante este período.