

## Control 3

Martes 6 de Julio de 2010

### Problema 1

Los resultados de una empresa financiera dependen fuertemente del estado de la economía global, el que puede ser BUENO, REGULAR o MALO. En un año bueno la empresa obtiene ganancias de 10 millones de dólares, en uno regular de 3 millones de dólares y en uno malo tiene pérdidas de 3 millones de dólares.

Se ha observado que el estado de la economía global se comporta como una cadena de Markov con matriz de transición dada por:

	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>M</i>
<i>B</i>	0,2	0,4	0,4
<i>R</i>	0,25	0,5	0,25
<i>M</i>	0	0,5	0,5

- (2 puntos) Calcule las probabilidades estacionarias para el estado de la economía global y determine las ganancias promedio de largo plazo de la empresa.
- (4 puntos) Si estamos en un año malo, ¿Cuál es la ganancia esperada de la empresa para los próximos 5 años? (Puede considerar que  $n = 5$  es suficientemente grande, es decir  $P^5 \approx P^\infty$ ).

### Problema 2

Una microempresa que produce lápices consta con dos máquinas (nuevas) donde cada una funciona sin averiarse un tiempo exponencial de media  $1/\lambda$  (horas). Sin embargo la microempresa tiene en sus activos una vieja máquina de reemplazo que **sólo** opera cuando falla al menos una de las dos máquinas principales. Esta máquina de reemplazo puede funcionar sin averiarse un tiempo exponencial de media  $1/\beta$  (horas). Cada vez que una máquina falla, estas son enviadas a un taller de reparación que repara máquinas nuevas en un tiempo exponencial de media  $1/\mu$  (horas); y las máquinas viejas  $1/\gamma$  (horas). La capacidad del taller de reparación es infinita, es decir las máquinas son reparadas inmediatamente.

La tasa de producción de una máquina nueva y vieja es de  $a$  y  $b$  (lápices / hora) respectivamente. Responda:

- (1,2 puntos) Modele el problema como una cadena de Markov en tiempo continuo.
- (1,2 puntos) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias, y plantee el sistema para obtenerlas.

Suponga conocidas las probabilidades estacionarias de aquí en adelante.

- (1,2 puntos) Determine la fracción del tiempo que la microempresa está produciendo.
- (1,2 puntos) Determine la tasa de producción promedio de la empresa en largo plazo.
- (1,2 puntos) Si el costo de reparación por máquina es de  $\$C$  y el precio de cada lápiz es  $\$P$ , calcule las utilidades por hora promedio.

### Problema 3

Un banco recibe clientes según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  (clientes/minuto). El banco dispone de un cajero que atiende también según un proceso de Poisson de tasa  $\mu$  (clientes/minuto). El banco tiene la política que cuando hay más de  $N$  clientes, comienza a operar un segundo cajero que atiende según los mismos parámetros del otro cajero. Este segundo cajero, mientras atiende, significa un costo para el banco igual a  $b$  (\$/minuto). Apenas hay  $N$ , o menos clientes en el banco, este segundo cajero deja de atender y se deja de incurrir en el costo adicional. El banco considera que el tiempo de los clientes también es valioso, y lo calcula igual a  $c$  (\$/minuto) de cada cliente que permanece en el banco.

- a) (1 punto) Modele la atención del banco como un sistema de cola.
- b) (1 punto) Indique bajo que condiciones el sistema tiene probabilidades estacionarias. Calcule las probabilidades estacionarias, en función de los datos del problema.
- c) (1 punto) Calcule el valor de  $L$  en función de los datos del problema y de  $\pi_0$ . Indique el valor de  $W$  en función de  $L$  y de los datos del problema.
- d) (1 punto) Indique, en función de las probabilidades estacionarias, la fracción del tiempo que trabaja el segundo cajero en el estado estacionario.
- e) (1 punto) Exprese la función de costo total en el estado estacionario (el costo del cajero adicional y de los clientes del banco) en función de  $L$ , de las probabilidades estacionarias y de los datos del problema.
- f) (1 punto) Indique cómo podría determinar el valor de  $N$  que minimiza la función de costo total que ha establecido en el punto anterior.