INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: C. Thraves, S. Astroza, N. Inostroza, F. Solari

Control 3

Martes 6 de Julio de 2010

Problema 1

Los resultados de una empresa financiera dependen fuertemente del estado de la economía global, el que puede ser BUENO, REGULAR o MALO. En un año bueno la empresa obtiene ganancias de 10 millones de dólares, en uno regular de 3 millones de dólares y en uno malo tiene perdidas de 3 millones de dólares.

Se ha observado que el estado de la economia global se comporta como una cadena de markov con matriz de transición dada por:

	B	R	M
B	0,2	0,4	0,4
R	0,25	0,5	0,25
M	0	0,5	0,5

a) (2 puntos) Calcule las probabilidades estacionarias para el estado de la economía global y determine las ganacias promedio de largo plazo de la empresa.

Se tiene el vector de beneficios:

$$\widehat{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Para obtener las probabilidades estacionaras $\pi^T = (\pi_B, \pi_R, \pi_M)$, se resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} \pi^T &= \pi^T P \\ \pi_B + \pi_R + \pi_M &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0{,}8\pi_B + 0{,}25\pi_R + 0\pi_M &= 0 \\ 0{,}4\pi_B - 0{,}5\pi_R + 0{,}5\pi_M &= 0 \\ 0{,}4\pi_B + 0{,}25\pi_R - 0{,}5\pi_M &= 0 \\ \pi_B + \pi_R + \pi_M = 1 \end{aligned}$$

Se obtiene: $\pi^T = (\pi_B, \pi_R, \pi_M) = (0.\overline{15}, 0.\overline{48}, 0.\overline{36})$.
Luego calculamos el beneficio por año en el largo plazo:

$$g = \pi^T \widehat{r} = 0.\overline{15} \cdot 10 + 0.\overline{48} \cdot 3 + 0.\overline{36} \cdot -3 = 1.\overline{87}$$

b) (4 puntos) Si estamos en un año malo, ¿Cuál es la ganacia esperada de la empresa para los próximos 5 años? (Puede considerar que n=5 es suficientemente grande, es decir $P^5 \approx P^\infty$).

Dado que la cadena es homogenea, finita y ergódica, entonces se tiene que:

$$V(n) = nge + w + P^n(V(0) - w)$$

Determinamos el vector de beneficios reltivos w, tomando $w_M = 0$:

$$w + ge = \widehat{r} + Pw$$

$$(P-I)w = ge - \widehat{r}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_B \\ w_R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.\overline{12} \\ -1.\overline{12} \\ 4.\overline{87} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -0{,}8w_B + 0{,}4w_R &= -8.\overline{12} \\ 0{,}25w_B + -0{,}5w_R &= -1.\overline{12} \end{aligned}$$

$$w = \begin{pmatrix} w_B \\ w_R \\ w_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.\overline{03} \\ 9.\overline{75} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego podemos calcular el beneficio esperado en 5 años, suponiendo que estampos en una año malo.

$$\begin{aligned} V(5) &= \begin{pmatrix} V_B(5) \\ V_R(5) \\ V_M(5) \end{pmatrix} \\ &= 5ge + w + P^5(V(0) - w) \\ &= \begin{pmatrix} 9.\overline{39} \\ 9.\overline{39} \\ 9.\overline{39} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15.\overline{03} \\ 9.\overline{75} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.\overline{15} & 0.\overline{48} & 0.\overline{36} \\ 0.\overline{15} & 0.\overline{48} & 0.\overline{36} \\ 0.\overline{15} & 0.\overline{48} & 0.\overline{36} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15.\overline{03} \\ 9.\overline{75} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 9.\overline{39} \\ 9.\overline{39} \\ 9.\overline{39} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15.\overline{03} \\ 9.\overline{75} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.\overline{15} & 0.\overline{48} & 0.\overline{36} \\ 0.\overline{15} & 0.\overline{48} & 0.\overline{36} \\ 0.\overline{15} & 0.\overline{48} & 0.\overline{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15.\overline{03} \\ -9.\overline{75} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_M(5) &= 9.\overline{39} + 0 + \begin{pmatrix} 0.\overline{15} & 0.\overline{48} & 0.\overline{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5.\overline{03} \\ -6.\overline{75} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2{,}39 \end{aligned}$$

Problema 2

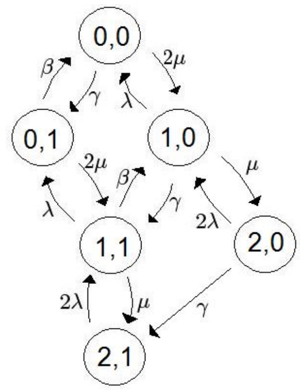
Una microempresa que produce lápices consta con dos máquinas (nuevas) donde cada una funciona sin averiarse un tiempo exponencial de media $1/\lambda$ (horas). Sin embargo la microempresa tiene en sus activos una vieja máquina de reemplazo que sólo opera cuando falla al menos una de las dos máquinas principales. Esta máquina de reemplazo puede funcionar sin averiarse un tiempo exponencial de media $1/\beta$ (horas). Cada vez que una máquina falla, estas son enviadas a un taller de reparación que repara máquinas nuevas en un tiempo exponencial de media $1/\mu$ (horas); y las máquinas viejas $1/\gamma$ (horas).
La tasa de producción de una máquina nueva y vieja es de a y b (lapices / hora) respectivamente. Responda:

a) Modele el problema como una cadena de markov en tiempo continuo.

Los estados de la cadena son los siguientes:
2,1: Las dos máquinas nuevas están funcionando y la máquina vieja esta buena (pero no funcionando).
2,0: Las dos máquinas nuevas están funcionando y la máquina vieja esta en reparación.
1,1: Sólo una máquina nueva está funcionando y la máqiuina vieja está buena (y funcionando).
1,0: Sólo una máquina nueva está funcionando, la otra máquina nueva y la vieja está en reparación.
0,1: Las don máqiuinas nuevas están en reparación, y la máquina vieja está funcionando.

0,0: Todas las máquinas están en reparación.

La cadena de markov que representa la situación descrita es:



b) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias, y plantee el sistema para obtenerlas.

Hay probabilidades estacionrias por se una cadena finita y de una sóla clase.
El sistema a resolver es:

$$\begin{aligned}
2\lambda\pi_{21} &= \mu\pi_{11} + \gamma\pi_{20} \\
(2\lambda + \gamma)\pi_{20} &= \mu\pi_{10} \\
(\lambda + \mu + \beta)\pi_{11} &= 2\lambda\pi_{21} + 2\mu\pi_{01} + \gamma\pi_{10} \\
(2\mu + \beta)\pi_{01} &= \lambda\pi_{11} + \gamma\pi_{00} \\
(\lambda + \mu + \gamma)\pi_{10} &= 2\lambda\pi_{20} + \beta\pi_{11} + 2\mu\pi_{00} \\
(2\mu + \gamma)\pi_{00} &= \beta\pi_{01} + \lambda\pi_{10} \\
\sum_{i \in E} \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

Suponga conocidas las probabilidades estacionarias de aquí en adelante.

c) Determine la fracción del tiempo que la microempresa esta produciendo.

$$frac = \pi_{21} + \pi_{20} + \pi_{11} + \pi_{10} + \pi_{01}$$

d) Determine la tasa de producción promedio de la empresa en largo plazo.

$$tasa = \overline{\lambda} = 2a[\pi_{21} + \pi_{20}] + (a + b)\pi_{11} + a\pi_{10} + b\pi_{01}$$

e) Si el costo de reparación por máquina es de $\$C$ y el precio de cada lápiz es $\$P$, cálcule las útilidades por hora promedio.

Definimos:
$\overline{\lambda}$: tasa de producción de lápices por hora (calculado en la parte anterior).
$\overline{\mu}$: tasa de máquinas que se hechan a perder.

$$\overline{\mu} = 2\lambda[\pi_{21} + \pi_{20}] + \lambda[\pi_{11} + \pi_{10}] + \beta\pi_{01}$$

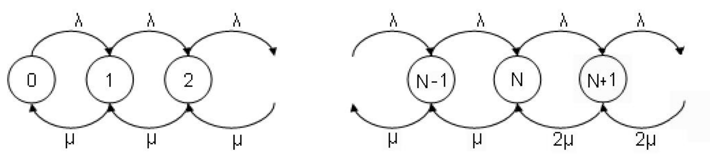
Luego las utilidades por hora:

$$\begin{aligned} Utilidades &= Ingresos - Costos \\ &= \overline{\lambda} \cdot \$P - \overline{\mu} \cdot \$C \end{aligned}$$

Problema 3

Un banco recibe clientes según un proceso de Poisson de tasa λ (clientes/minuto). El banco dispone de un cajero que atiende también según un proceso de Poisson de tasa μ (clientes/minuto). El banco tiene la política que cuando hay más de N clientes, comienza a operar un segundo cajero que atiende según los mismos parámetros del otro cajero. Este segundo cajero, mientras atiende, significa un costo para el banco igual a b (\$/minuto). Apenas hay N, o menos clientes en el banco, este segundo cajero deja de atender y se deja de incurrir en el costo adicional. El banco considera que el tiempo de los clientes también es valioso, y lo calcula igual a c (\$/minuto) de cada cliente que permanece en el banco.

a) (1 punto) Modele la atención del banco como un sistema de cola.
La cola del sistema se representa a continuación:



Es decir, es una M/M/1 cuando el número de clientes es menor o igual a N, y bien cuando el número de clientes en el banco es superior a N, el sistema es una M/M/2.

b) (1 punto) Indique bajo que condiciones el sistema tiene probabilidades estacionarias. Calcule las probabilidades estacionarias, en función de los datos del problema.
La condición necesaria para tener probabilidades estacionarias es que $\lambda < 2\mu$.
Para el cálculo de probabilidades estacionarias, se aplica la fórmula de proceso de nacimiento y muerte:

$$\pi_i = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}\pi_0 \qquad \pi_0 = \left(1 + \sum_{i\geq 1}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}\right)^{-1}$$

Luego, las probabilidades estacionarias para este problema vienen dadas por:

$$\pi_i = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 & i \leq N \\ \frac{1}{2^{i-N}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 & i > N \end{cases} \qquad \text{donde } \pi_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-N}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right)^{-1}$$

c) (1 punto) Calcule el valor de L en función de los datos del problema y de π_0. Indique el valor de W en funcion de L y de los datos del problema.

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} i\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 + \sum_{i=N+1}^{\infty} i2^N\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^i \pi_0 \\ &= \frac{\frac{\lambda}{\mu} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}(N+1) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+2} N}{(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}\pi_0 + \frac{(N+1)\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^N + N\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{N+1}}{(1-\frac{\lambda}{2\mu})^2}2^N\pi_0 \end{aligned}$$

Por la formula de Little, tenemos:

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

d) (1 punto) Indique, en función de las probabilidades estacionarias, la fracción del tiempo que trabaja el segundo cajero en el estado estacionario.

La fracción del tiempo que trabaja el segundo cajero es:

$$\begin{aligned} frac &= \sum_{i=N+1}^{\infty} \pi_i \\ &= \sum_{i=N+1}^{\infty} 2^N \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^i \pi_0 \\ &= 2^N \pi_0 \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^i \\ &= 2^N \pi_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} \\ &= \frac{\pi_0}{2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} \end{aligned}$$

e) (1 punto) Exprese la función de costo total en el estado estacionario (el costo del cajero adicional y de los clientes del banco) en función de L, de las probabilidades estacionarias y de los datos del problema.
El costo por cada minuto en el largo plazo será:

$$\begin{aligned} costo &= b \cdot frac + c \cdot L \\ &= b \cdot \frac{\pi_0}{2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} + c \cdot L \end{aligned}$$

f) (1 punto) Indique cómo podría determinar el valor de N que minimiza la función de costo total que ha establecido en el punto anterior.
Minimizando el costo por minuto en el largo plazo. Expresando este costo (ya calculado en la parte anterior):

$$costo = b \cdot \frac{\pi_0(N)}{2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} + c \cdot L(N)$$

Notar que $\frac{\partial L}{\partial N} > 0$, y que $\frac{\partial \pi_0}{\partial N} < 0$. Luego hay una solución para el problema no trivial ($N = 1$ ó $N \to \infty$ equivalente a usar siempre un sólo cajero). El problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min_N b \cdot \frac{\pi_0(N)}{2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} + c \cdot L(N) \\ N \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$