

IN3702: Investigación de Operaciones

Profs: J. Correa, R. Epstein

Auxs: C. Thraves, S. Astroza, N. Inostroza, F. Solari

Auxiliar 6: Procesos de Poisson Martes 11 de Mayo de 2010

Problema 1

Una empresa de distribución de energía eléctrica ha decidido enfrentar el invierno con un Plan de Solución de Fallas Críticas.

Se sabe que las fallas ocurren en el sistema de acuerdo a un proceso de Poisson con una tasa λ [fallas/día].

Como parte del disno del plan, se conformó un equipo de empleados altamente capacitados en la reparación de fallas en redes eléctricas. Este equipo acude a reparar las fallas reportadas demorándose un tiempo exponencialmente distribuido de media T[hrs] por cada una, incluyendo en este lapso el tiempo de transporte al lugar de la falla.

- 1. ¿Cuál es la probabilidad que ocurran k fallas en un mes? ¿ que ocurran k o más fallas? En promedio ¿cuántas fallas ocurren mensualmente?
- 2. ¿Cuál es la probabilidad que la k-ésima falla no alcance a ser atendida? Suponiendo que la k-ésima falla no pudo ser atendida, ¿cuál es la probabilidad que la k+1-ésima falla tampoco sea atendida?
- 3. Si durante el primer mes de funcionamiento del Plan se han reportado F fallas, ¿cuál es el número esperado de fallas para el segundo mes?

De las estadísticas recopiladas de los **a**os anteriores, se puede concluir que las fallas críticas tienen dos orígenes posibles: **Domiciliario** y de **Alumbrado Rublico** Ambas fallas se presentan según Procesos de Poisson independientes, de tasa λ_D [fallas/día] para fallas **domiciliarias** y λ_A [fallas/día] para fallas de **Alumbrado Rublico**

- 4. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera falla que se registre en un mes sea domiciliaria?
- 5. El equipo de reparación está trabajando en la solución de una falla de **Alumbrado Publico** En promedio ¿cuántas fallas de cada tipo ocurrirán antes de que la reparación en curso sea finalizada?

Se está estudiando la posibilidad de dejar la reparación de fallas de Alumbrado Publico en manos de una empresa contratista. Los términos del contrato indican que mensualmente se pagará como costo fijo un equivalente a R reparaciones a un costo unitario s_1 , mientras que el precio de cada reparación por sobre este mínimo será de s_2 , con $s_2 > s_1$.

6. Como Ingeniero de Estudios de la empresa distribuidora, plantee el problema de optimización que permita encontrar el valor R que minimiza los costos mensuales esperados del contrato de reparación de fallas de Alumbrado Público.

Problema 2

Los auxiliares de ramo, hinchas acérrimos de la Roja, asisten al estadio a ver al el último partido de las clasificatorias para el mundial. Durante el partido los jugadores hacen goles de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ . Los auxiliares celebran cada gol durante un tiempo B, lapso de tiempo durante el cual no son capaces de ver lo que sucede en la cancha. Si se supone que tras cada gol, el partido es reiniciado instantáneamente conteste:

1. ¿Cuál es la probabilidad que los auxiliares se pierdan al menos un gol por celebrar el primer gol?

Problema 2

- 1. Sean x_i = tiempo entre el gol (i-1)-ésimo y el i-ésimo. Entonces: $P(\text{perderse un gol}) = P(x_2 < B)$ y $P(\text{perderse 2 goles}) = P(N(B) \ge 2)$
- 2. Para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 6 últimos 6 goles debe ser superior a B (notar que la probabilidad de ver el primer gol es 1). Entonces:

$$P(verlos7primerosgoles) = P(x_2 > B, x_3 > B, ..., x_6 > B, x_7 > B) = (e^{-\lambda B})^6 = e^{-6\lambda B}$$

- 3. Debido a la pérdida de memoria de la exponencial, tenemos que:
 - \bullet $Y_1 \rightarrow exp(\lambda)$
 - $Y_i \to exp(\lambda) \ \forall i \neq 1$
- 4. Sea S_n el tiempo en que vemos el n-ésimo gol.

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i + (n-1)B \Rightarrow S_n - (n-1)B \to Gamma(n, \lambda)$$

De lo anterior, y sabiendo que $P(S_n \le t) = P(R(t) \ge n)^1$ se concluye que:

$$P(R(t) \ge n) = \int_0^{t - (n - 1)B} \frac{\lambda^n \cdot t^{n - 1} \cdot e^{-\lambda t} \partial t}{(n - 1)!}$$

Problema 3

1. Dado que el proceso es poissoniano \Rightarrow Tiempo entre llegadas $\rightarrow exp(\lambda)$. Por lo tanto:

$$P_s(\text{caminar}) = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \partial t = e^{-\lambda s}$$

- 2. Hay que distinguir dos casos:
 - Si el bus pasa en t, con $t \le s$, me demoro t+R en llegar a casa.
 - \bullet Si el bus pasa en t, con t>s, me demoro s+W en llegar a casa.
- 3. Para calcular esta esperanza condicionaremos sobre t, el instante de llegada del bus.

$$E(T) = \int_0^\infty E(T|t) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t$$

$$E(T) = \int_0^s (t+R) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t + \int_s^\infty (S+W) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t$$

Desarrollando deberían llegar a la siguiente expresión:

$$E(T) = R + \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda s} (W - R - \frac{1}{\lambda})$$

- 4. Claramente si:
 - $W R \frac{1}{\lambda} > 0$, entonces E(T) se minimiza en s= ∞
 - $\blacksquare \ W R \frac{1}{\lambda} < 0,$ entonces E(T) se minimiza en s=0
 - $W-R-\frac{1}{\lambda}=0$, entonces la expresión no depende de s.
- 5. Dada la pérdida de memoria de la exponencial, si espero un s>0 y cada vez que pasa ese tiempo reevalúo mi desición estaré siempre frente al mismo problema original por lo que mi s será el mismo \Rightarrow si s>0, entonces $s=\infty$.

¹Identidad válida para cualquier proceso de conteo

Problema 4

División de procesos de Poisson:

N(t) = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t

 $N_A(t) =$ Número total de votantes que llegan hasta tiempo t y votan por candidato A

 $N_B(t)=$ Número total de votantes que llegan hasta tiempo t y votan por candidato B

p = Probabilidad que un votante elija al candidato A

$$P[N_A(t) = n] = \sum_{k=0}^{\infty} P[N_A(t) = n / N(t) = k] \cdot P[N(t) = k]$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} P[N_A(t) = n / N(t) = k] \cdot P[N(t) = k]$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} p^n \cdot (1-p)^{k-n} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

$$= \frac{+^n e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\left((1-p)\lambda t\right)^{k-n}}{(k-n)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda pt} (\lambda pt)^n}{n!} \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda p)$$

Distribución condicional de los tiempos de llegada:

 X_1 = Tiempo en que se produce la primera llegada, condicional a que de [0, t] hay una llegada

$$P[X_1 \le s/N(t) = 1) = \frac{P[X_1 \le s \land N(t) = 1]}{P[N(t) = 1]} \quad 0 \le s \le t$$
$$= \frac{e^{-\lambda s} \lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t} \lambda t} = \frac{s}{t}$$

Luego, condicional a que hay una llegada en el intervalo [0, t] el tiempo en que esta ocurre sigue una distribución U[0, t].

1. Alternativa 1:

$$P[N_A(10) = n / N(10) = 1000] = \frac{P[N_A(10) = n \land N(10) = 1000]}{P[N(10) = 1000]}$$

$$= \frac{P[N_A(10) = n] \cdot P[N_B(10) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda_A \cdot 10} (\lambda_A \cdot 10)^n}{n!} \cdot \frac{e^{-\lambda_B \cdot 10} (\lambda_B \cdot 10)^{1000 - n}}{(1000 - n)!}}{\frac{e^{-\lambda \cdot 10} (\lambda \cdot 10)^{1000}}{1000!}}$$

$$= \frac{1000!}{(1000 - n)!n!} \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda}\right)^n \left(\frac{\lambda_B}{\lambda}\right)^{1000 - n}$$

$$= \frac{1000!}{(1000 - n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \quad n \ge 0$$

Alternativa 2:

Pensar directamente en una binomial. Si la probabilidad que c/u de los 1000 que llegaron, independiente de los demás, vote por el candidato A es p, tenemos que:

$$P[N_A(10) = n / N(10) = 1000] = \frac{1000!}{(1000 - n)!n!} \cdot p^n (1 - p)^{1000 - n} = \frac{1000!}{(1000 - n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \quad n \ge 0$$

2. Llamemos N_A^4 al número de votantes del candidato A que llegan en las primeras 4 horas de votación.

Alternativa 1:

$$P[N_A^4 = n / N(10) = 1000] = \frac{P[N_A(4) = n \land N(6) + N_B(4) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]}$$

$$= \frac{P[N_A(4) = n] \cdot P[N^*(6) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]}$$
Donde $N^* \rightsquigarrow \text{Poisson de tasa } \frac{4}{3}\lambda$

$$= \frac{\frac{(2\lambda)^n \cdot e^{-2\lambda}}{n!} \cdot \frac{(8\lambda)^{1000 - n} \cdot e^{-8\lambda}}{(1000 - n)!}}{\frac{(10\lambda)^{1000} \cdot e^{-10\lambda}}{1000!}}$$

$$= \frac{1000!}{(1000 - n)!n!} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{1000 - n}$$

$$= \frac{1000!}{(1000 - n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{1000 - n}$$

Notar que si se consideran 2 procesos independientes $N_1(t) \leadsto \operatorname{Poisson}(\lambda)$ y $N_2(t) \leadsto \operatorname{Poisson}(\frac{\lambda}{q})$ se tendrá que $P[N_1(t) = k] = P[N_2(qt) = k]$, por lo que es posible ajustar "el reloj" del proceso $N_B(4)$ para sumarlo con N(6).

Alternativa 2:

La probabilidad que una persona llegue en las primeras 4 horas y vote por el candidato A, dado que llegó en las primeras 10 será $p=\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$. Con esto se tiene que

$$P[N_A^4 = n / N(t) = 1000] = \frac{1000!}{(1000 - n)!n!} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{1000 - n}$$

3. Los votantes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ , por lo que si T es el tiempo en que llega el primer votante se tendrá:

$$P[T>t] = P[N(t)=0] = e^{-\lambda t} \quad \text{Por lo que } T \leadsto \exp(\lambda)$$

De la misma manera, el tiempo T_A hasta que llega el primer votante tipo A sigue una exponencial de parámetro $\frac{\lambda}{2}$.

4. Llamaremos $P[N_B^n]$ a la probabilidad que lleguen n votantes para el candidato B antes del primero para A y T_A al instante en que llega el primer votante para el candidado A.

Alternativa 1:

$$P[N_B^n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Alternativa 2:

$$\begin{split} P[N_B^n] &= \int_0^\infty P[N_B^n/T_A = t] f_{T_A}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda_B t)^n e^{-\lambda_B t}}{n!} \cdot \lambda_A e^{-\lambda_A t} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\lambda}{2} t\right)^n e^{-\frac{\lambda}{2} t}}{n!} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2} t} dt \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \int_0^\infty \frac{t^n \lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{n!} dt = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{split}$$

5.

$$\begin{split} P[\text{Inversi\'on}] &= P[\text{Inversi\'on} \, / \, \text{Anterior vota A}] \cdot P[\text{Anterior vota A}] \, + \\ &\quad P[\text{Inversi\'on} \, / \, \text{Anterior vota B}] \cdot P[\text{Anterior vota B}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{split}$$

Ahora tenemos un proceso de llegadas de votantes Poisson de tasa λ y si contamos el número de inversiones podemos notar que será el mismo proceso de Poisson "filtrado" por la probabilidad que una llegada sea una inversión. De esta manera el tiempo entre 2 inversiones consecutivas seguirá una distribución exponencial de tasa $\lambda \cdot P[\text{Inversión}] = \frac{\lambda}{2}$.