INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: C. Thraves, S. Astroza, N. Inostroza, F. Solari

Auxiliar 6: Procesos de Poisson

Martes 11 de Mayo de 2010

Problema 1

Una empresa de distribución de energía eléctrica ha decidido enfrentar el invierno con un Plan de Solución de Fallas Críticas.

Se sabe que las fallas ocurren en el sistema de acuerdo a un proceso de Poisson con una tasa λ [fallas/día].

Como parte del diseño del plan, se conformó un equipo de empleados altamente capacitados en la reparación de fallas en redes eléctricas. Este equipo acude a reparar las fallas reportadas demorándose un tiempo exponencialmente distribuido de media T[hrs] por cada una, incluyendo en este lapso el tiempo de transporte al lugar de la falla.

1. ¿Cuál es la probabilidad que ocurran k fallas en un mes? ¿Y que ocurran k o más fallas? En promedio ¿cuántas fallas ocurren mensualmente?
2. ¿Cuál es la probabilidad que la k-ésima falla no alcance a ser atendida? Suponiendo que la k-ésima falla no pudo ser atendida, ¿cuál es la probabilidad que la k+1-ésima falla tampoco sea atendida?
3. Si durante el primer mes de funcionamiento del Plan se han reportado F fallas, ¿cuál es el número esperado de fallas para el segundo mes?

De las estadísticas recopiladas de los años anteriores, se puede concluir que las fallas críticas tienen dos orígenes posibles: Domiciliario y de Alumbrado Público. Ambas fallas se presentan según Procesos de Poisson independientes, de tasa λ_D[fallas/día] para fallas domiciliarias y λ_A[fallas/día] para fallas de Alumbrado Público.

4. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera falla que se registre en un mes sea domiciliaria?
5. El equipo de reparación está trabajando en la solución de una falla de Alumbrado Público. En promedio ¿cuántas fallas de cada tipo ocurrirán antes de que la reparación en curso sea finalizada?

Se está estudiando la posibilidad de dejar la reparación de fallas de Alumbrado Público en manos de una empresa contratista. Los términos del contrato indican que mensualmente se pagará como costo fijo un equivalente a R reparaciones a un costo unitario s_1, mientras que el precio de cada reparación por sobre este mínimo será de s_2, con $s_2 > s_1$.

6. Como Ingeniero de Estudios de la empresa distribuidora, plantee el problema de optimización que permita encontrar el valor R^* que minimiza los costos mensuales esperados del contrato de reparación de fallas de Alumbrado Público.

Problema 2

Los auxiliares de ramo, hinchas acérrimos de la Roja, asisten al estadio a ver al el último partido de las clasificatorias para el mundial. Durante el partido los jugadores hacen goles de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Los auxiliares celebran cada gol durante un tiempo B, lapso de tiempo durante el cual no son capaces de ver lo que sucede en la cancha. Si se supone que tras cada gol, el partido es reiniciado instantáneamente conteste:

1. ¿Cuál es la probabilidad que los auxiliares se pierdan al menos un gol por celebrar el primer gol?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que los auxiliares vean los 7 primeros goles?

Dado que los auxiliares no ven todos los goles, interesa parametrizar los goles observados por los auxiliares. Para ello resuelva:

3. ¿Cuál es la distribución de Y_i, el intervalo de tiempo entre el fin de la celebración del (i-1)-ésimo gol observado y el momento en que se produce el i-ésimo gol observado?

4. Encuentre $P(R(t) \geq n)$, donde R(t) es el número de goles vistos por los auxiliares hasta el instante t.

Problema 3

En un instante cualquiera del día, usted llega a una parada de buses a la cual llegan buses de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Si usted toma el bus desde el paradero, demora un tiempo fijo R desde que sube al bus hasta llegar a su casa. Si camina desde el paradero a su casa demora un tiempo fijo W. Suponga que su política al llegar a la parada de buses es esperar el bus un tiempo s y si éste no ha pasado hasta ese instante, entonces decide caminar.

1. ¿Cuál es la distribución del tiempo de pasada del siguiente bus desde que usted llega a la parada de buses?. Dada su política de espera, cuál es la probabilidad que usted camine a su casa?.

2. Si el bus pasa en un instante $t \leq s$ desde su llegada a la parada de buses, ¿cuánto tiempo demora usted en llegar a su casa desde su arribo al paradero?.¿Y si el bus pasa en un instante $t \geq s$?.

3. calcule el tiempo esperado que transcurre desde su llegada al paradero hasta llegar a su casa.

4. Muestre que si $W < \frac{1}{\lambda} + R$ entonces el tiempo esperado de la parte anterior se minimiza en s=0; si $W > \frac{1}{\lambda} + R$ entonces se minimiza en s=∞; y si $W = \frac{1}{\lambda} + R$ todos los valores de s entregan el mismo tiempo esperado.

5. ¿Qué representa en realidad $s = 0$ y $s = \infty$?. Entregue una explicación intuitiva de por qué esas son las únicas dos políticas interesantes al considerar minimizar el tiempo esperado.

Problema 4

Los votantes en la elección municipal llegan a un determinado local de votación según un proceso de Poisson de tasa λ. Cada votante, independiente de todo lo demás, vota con probabilidad 0.5 por el candidato A y con probabilidad 0.5 por el candidato B. Suponga que la votación comienza en t=0 y dura indefinidamente

1. Condicional en que votaron 1000 personas durante las primeras 10 horas, ¿cuál es la probabilidad que el candidato A reciba n de estos votos?.

2. Nuevamente condicional en que votaron 1000 personas durante las primeras 10 horas, encuentre la probabilidad que el candidato A reciba n votos en las primeras 4 horas de votación.

3. Sea T el instante de la llegada del primer votante por A. Encuentre la densidad de A.

4. Encuentre la función de probabilidad del número de votantes por B que llegan antes del primer votante por A.

5. Defina el n-ésimo votante como una inversión si este vota distinto que el (n-1)-ésimo. Por ejemplo, en la secuencia AABAABB, el tercer, cuarto y sexto votantes son inversiones. Encuentre la densidad de probabilidad del tiempo entre inversiones. [1]

[1] HINT: Deduzca la probabilidad que una llegada cualquiera produzca una inversión. Con ello deduzca el proceso de conteo de inversiones y encuentre la densidad de tiempo entre estos eventos.