INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: C. Thraves, S. Astroza, N. Inostroza, F. Solari,

Auxiliar 1: Probabilidades

Martes 30 de Marzo de 2010

Problema 1

1. Demuestre que la distribución de probabilidad exponencial tiene pérdida de memoria.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \tag{1}$$

2. Encuentre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que es la suma de variables aleatorias que siguen distribuciones de poisson independientes.

3. Demuestre que si
$t_1 \longrightarrow exp(\lambda)$
$t_2 \longrightarrow exp(\mu)$, se tiene que:

$$P(t_1 < t_2) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \tag{2}$$

4. Sean X_1, X_2, X_3....X_n Variables aleatorias iid. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria:
$\longrightarrow min(X_1, X_2, X_3, X_n)$

Problema 2

Considere una oficina de correos con 2 ventanillas de atención. Cuando usted llega, encuentra que hay 2 personas atendiéndose uno en cada ventanilla. La atención en la ventanilla 1 demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro $\lambda[\frac{1}{t}]$ mientras la atención en ventanilla 2 demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro $\mu[\frac{1}{t}](\lambda > \mu)$

1. En cuál ventanilla se colocaría

2. Cual es la probabilidad que usted sea último en irse de la oficina (suponga que una vez que elige la fila no puede cambiarse)

3. Suponga ahora que cuando usted llega descubre que hay 2 personas en la fila frente a la ventanilla 1 y solo persona en la ventanilla 2. Sin pensarlo, usted se pone en la fila más corta. Cuál es la probabilidad que usted sea último en irse de la oficina (suponga que una vez que elige la fila no puede cambiarse)

Problema 3

El dado A tiene 5 caras negras y una cara blanca, el dado B tiene 3 caras negras y 3 caras blancas. Se lanza una moneda al aire, si sale cara se elige el dado A, de lo contrario se elige el dado B. El dado elegido será lanzado muchas veces, registrando en cada caso si el resultado es blanco o negro.

(a) Determine la probabilidad que la caída del nesimo lanzamiento del dado sea negra. (1 punto)

(b) Determine la probabilidad que las caídas numero n y (n+1) sean negras. (1 puntos)

(c) Si no se sabe que dado se está lanzando, pero se observa que las primeras n caídas han sido negras. Calcule la probabilidad que la caída (n+1) sea negra. Interprete su resultado cuando n es grande. (4 puntos)

$\Rightarrow X \rightsquigarrow exp(n\lambda)$

Problema 2

1. Dado que la esperanza de una exponencial es el inverso multiplicativo del parámetro, una persona racional que no le guste esperar eligiría la fila 1 porque $\lambda > \mu$.

2. Dado que elegí la ventanilla 1, existen 2 configuraciones en la que me voy ultimo:

   - Se vaya primero el de la otra fila $\left(P_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$.
   - Se vaya primero el de mi fila y además el de la otra fila se vaya antes que yo $\left(P_2 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

   Entonces, la probabilidad es:
   $$P(\text{irse ultimo}) = P_1 + P_2$$

3. Llamenos a las personas que estan en la fila 1 como a y b (a antes que b) y a la persona antendiendose en la fila 2 como c. Con esto, existen 3 configuraciones posibles para que yo me vaya último:

   - $a \to b \to c \qquad P_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}^2\right)$
   - $a \to c \to b \qquad P_2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$
   - $c \to a \to b \qquad P_3 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$

   Finalmente, la probabilidad buscada es:
   $$P = P_1 + P_2 + P_3$$

Problema 3

(a) Definimos:
A: Se lanza dado A.
B: Se lanza dado B.
X_i: Color de la cara obtenida en el lanzamiento "i".

$$X_i = \begin{cases} N & \text{negro} \\ B & \text{blanco} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P[X_n = N] &= P[X_n = N \,/\, A]P[A] + P[X_n = N \,/\, B]P[B] \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{12} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N] &= P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N \,/\, A] \cdot P[A] + P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N \,/\, B] \cdot P[B] \\ &= P[X_n = N \,/\, A] \cdot P[X_{n+1} = N \,/\, A] \cdot P[A] + P[X_n = N \,/\, B] \cdot P[X_{n+1} = N \,/\, B] \cdot P[B] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{36} \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
P[X_{n+1} = N \,/\, \bigcap_{i=1}^{n} X_i = N] &= \frac{P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N]}{P[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = N]} \\
&= \frac{P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N \,/\, A] \cdot P[A] + P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N \,/\, B] \cdot P[B]}{P[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = N \,/\, A] \cdot P[A] + P[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = N \,/\, B] \cdot P[B]} \\
&= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}}
\end{aligned}
$$

Tomando límite:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}} = \frac{5}{6}
$$

Problema 4

1. Estamos en el caso de una carrera de exponenciales entre $T_m \sim Min\{tm_1, \ldots, tm_m\}$ y $T_n \sim Min\{tn_1, \ldots, tn_n\}$.
   Donde: $T_m \sim \exp(m \cdot \lambda_m)$ $T_n \sim \exp(n \cdot \lambda_n)$

   $$P(T_m \leq T_n) = \tfrac{m \cdot \lambda_m}{m \cdot \lambda_m + n \cdot \lambda_n}$$

2. Se debe condicionar sobre el número de árboles de cada tipo plantado inicialmente
   Sea M v.a. igual al número de manzanos

   $$
   \begin{aligned}
   P(T_m \leq T_n) &= \sum_{i=0}^{S} P(T_m \leq T_n | M = i) \cdot P(M = i) \\
   &= \sum_{i=0}^{S} \frac{i \cdot \lambda_m}{i \cdot \lambda_m + (S - i) \cdot \lambda_n} \cdot \binom{S}{i} p^i (1-p)^{S-i}
   \end{aligned}
   $$

3. Calculamos la probailidad complementaria, y aplicamos la pérdida de memoria de la exp ignorando la última fruta sean las v. a.:
   M: Número de manzanos plantados
   T_m : tiempo en que tarda en brotar la próxima manzana
   T_n : tiempo en que tarda en brotar la próxima naranja

$$
\begin{aligned}
P(T_m < h \vee T_n < h) &= 1 - P(T_m > h \wedge T_n > h) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{S} P(T_m > h \wedge T_n > h | M = i) \cdot P(M = i) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{S} P(T_m > h | M = i) \cdot P(T_n > h | M = i) \cdot P(M = i) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{S} e^{-h \cdot \lambda_m \cdot i} \cdot e^{-h \cdot \lambda_n \cdot (s-i)} \cdot \binom{S}{i} p^i (1-p)^{S-i}
\end{aligned}
$$

4. Definimos los siguientes tiempos:

   tn_i : tiempo que tarda en brotar la *i-esima* naranja desde que brotó la *(i-1)-esima.*
   $tn_i \sim \exp(n \cdot \lambda_n)$
   Tn_i : tiempo que tarda en brotar la *i-esima* naranja.
   $Tn_i = \sum_{j=1}^{i} tn_j$

   $E($ Tiempo en obtener la primera naranja buena $) = \sum_{i=0}^{\infty} E(Tn_i|$ han salidos (i-1) naranjas malas y la i es buena $) \cdot P($han salidos (i-1) naranjas malas y la i es buena$)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} E(Tn_i) \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=1}^{i} E(tn_j)) \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{\lambda_n \cdot n} \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \tfrac{b}{\lambda_n \cdot n} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \tfrac{b}{\lambda_n \cdot n} \cdot \tfrac{1}{b^2} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_n \cdot n \cdot b}
\end{aligned}
$$

5. tm_i : tiempo que tarda en brotar la *i-esima* manzana desde que brotó la *(i-1)-esima.*
   $tm_i \sim \exp((m - (i-1)) \cdot \lambda_m)$
   En particular la VA que me interesa es: tm_{k+1}
   $tm_{k+1} \sim \exp((m-k) \cdot \lambda_m)$

$$E(tm_{k+1}) = \tfrac{1}{(m-k) \cdot \lambda_m}$$

6. Por la parte 4, la esperanza de la utilidad por unidad de tiempo que tengo (por la venta de naranjas) es:

$$
\begin{aligned}
E(U) &= \tfrac{\$100}{\frac{1}{\lambda_n \cdot n \cdot b}} \\
&= \$100 \cdot \lambda_n \cdot n \cdot b
\end{aligned}
$$

   Desprendiendo del resultado obteido en la parte 4, con el agrónomo se tiene que $b = 1$, luego, en este caso la esperanza de la utilidad será (contando el costo por los servicios del profesional, sea \$C) por unidad de tiempo:

$$E(U) = \$100 \cdot \mu_n \cdot n - \$C$$

   Luego la cantidad máxima dispuesta a pagar \$C es tal que:

$$
\begin{gathered}
\$100 \cdot \lambda_n \cdot n \cdot b < \$100 \cdot \mu_n \cdot n - \$C \\
\$C < \$100 \cdot n \cdot (\mu_n - b \cdot \lambda_n)
\end{gathered}
$$