IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: C. Thraves, S. Astroza, N. Inostroza, F. Solari,

Pauta Auxiliar 1: Probabilidades

Martes 30 de Marzo de 2010

Problema 1

1. Hay que demostrar que:

$$P[x > s + t | x > s] = P[x > t]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P[x > s + t | x > s] &= \frac{P[x>s+t \wedge x>s]}{P[x>s]} \\ &= \frac{P[x>s+t]}{P[x>s]} \\ &= \frac{1-P[x\leq s+t]}{1-P[x\leq s]} \\ &= \frac{1-[1-e^{-\lambda(s+t)}]}{1-[1-e^{-\lambda(s)}]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda(s)}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= P[x \geq t] \end{aligned}$$

2. Veamos el caso para n=2:

$$\begin{aligned} P[X_1 + X_2 = N] &= \sum_{i=0}^{\infty} P[X_1 + X_2 = N | X_2 = i] \cdot P[X_2 = i] \\ &= \sum_{i=0}^{N} P[X_1 = N - i] \cdot P[X_2 = i] \\ &= \sum_{i=0}^{N} \frac{\lambda_1^{N-i} e^{-\lambda_1}}{(N-i)!} \cdot \frac{\lambda_2^i e^{-\lambda_2}}{i!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{N!} \cdot \sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{(N-i)!i!} \lambda_1^{N-i} \lambda_2 i \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^N}{N!} \end{aligned}$$

3. Tenemos que:

$$\begin{aligned} P[t_1 < t_2] &= \int_0^{\infty} P[t_1 < t_2 | t_2 = t] \cdot f_{t_2}(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} P[t_1 < t] \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda t}) \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu t} dt - \int_0^{\infty} \mu e^{-(\mu+\lambda)t} dt \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu+\lambda} \cdot \int_0^{\infty} (\mu + \lambda) e^{-(\mu+\lambda)t} dt \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu+\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \end{aligned}$$

4. Debemos encontrar una expresión para

$$P[X = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\} < t]$$

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 1 - P[X > t] \\ &= 1 - (P[X_1 > t] \cdot P[X_2 > t] ... \cdot P[X_n > t]) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i(t)}) \end{aligned}$$

Para el caso exponencial tenemos que:

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i(t)}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - 1 + e^{-\lambda t} \\ &= 1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda t)} \\ &= 1 - e^{-n\lambda} \end{aligned}$$

$\Rightarrow X \rightsquigarrow exp(n\lambda)$

Problema 2

1. Dado que la esperanza de una exponencial es el inverso multiplicativo del parámetro, una persona racional que no le guste esperar eligiría la fila 1 porque $\lambda > \mu$.

2. Dado que elegí la ventanilla 1, existen 2 configuraciones en la que me voy ultimo:

   - Se vaya primero el de la otra fila $\left(P_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$.
   - Se vaya primero el de mi fila y además el de la otra fila se vaya antes que yo $\left(P_2 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

   Entonces, la probabilidad es:
   $$P(\text{irse ultimo}) = P_1 + P_2$$

3. Llamenos a las personas que estan en la fila 1 como a y b (a antes que b) y a la persona antendiendose en la fila 2 como c. Con esto, existen 3 configuraciones posibles para que yo me vaya último:

   - $a \rightarrow b \rightarrow c \qquad P_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}^2\right)$
   - $a \rightarrow c \rightarrow b \qquad P_2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$
   - $c \rightarrow a \rightarrow b \qquad P_3 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$

   Finalmente, la probabilidad buscada es:

   $$P = P_1 + P_2 + P_3$$

Problema 3

(a) Definimos:
A: Se lanza dado A.
B: Se lanza dado B.
X_i: Color de la cara obtenida en el lanzamiento "i".

$$X_i = \begin{cases} N & \text{negro} \\ B & \text{blanco} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P[X_n = N] &= P[X_n = N \,/\, A]P[A] + P[X_n = N \,/\, B]P[B] \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{12} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N] &= P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N \,/\, A] \cdot P[A] + P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N \,/\, B] \cdot P[B] \\ &= P[X_n = N \,/\, A] \cdot P[X_{n+1} = N \,/\, A] \cdot P[A] + P[X_n = N \,/\, B] \cdot P[X_{n+1} = N \,/\, B] \cdot P[B] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{36} \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
P[X_{n+1} = N \,/\, \bigcap_{i=1}^{n} X_i = N] &= \frac{P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N]}{P[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = N]} \\
&= \frac{P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N \,/\, A] \cdot P[A] + P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N \,/\, B] \cdot P[B]}{P[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = N \,/\, A] \cdot P[A] + P[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = N \,/\, B] \cdot P[B]} \\
&= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}}
\end{aligned}
$$

Tomando límite:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}} = \frac{5}{6}
$$

Problema 4

1. Estamos en el caso de una carrera de exponenciales entre $T_m \sim Min\{tm_1, \dots, tm_m\}$ y $T_n \sim Min\{tn_1, \dots, tn_n\}$. Donde: $T_m \sim \exp(m \cdot \lambda_m)$ $T_n \sim \exp(n \cdot \lambda_n)$

$$
P(T_m \leq T_n) = \frac{m \cdot \lambda_m}{m \cdot \lambda_m + n \cdot \lambda_n}
$$

2. Se debe condicionar sobre el número de árboles de cada tipo plantado inicialmente
Sea M v.a. igual al número de manzanos

$$
\begin{aligned}
P(T_m \leq T_n) &= \sum_{i=0}^{S} P(T_m \leq T_n | M = i) \cdot P(M = i) \\
&= \sum_{i=0}^{S} \frac{i \cdot \lambda_m}{i \cdot \lambda_m + (S-i) \cdot \lambda_n} \cdot \binom{S}{i} p^i (1-p)^{S-i}
\end{aligned}
$$

3. Calculamos la probailidad complementaria, y aplicamos la pérdida de memoria de la exp ignorando la última fruta sean las v. a.:
M: Número de manzanos plantados
T_m : tiempo en que tarda en brotar la próxima manzana
T_n : tiempo en que tarda en brotar la próxima naranja

$$
\begin{aligned}
P(T_m < h \vee T_n < h) &= 1 - P(T_m > h \wedge T_n > h) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{S} P(T_m > h \wedge T_n > h | M = i) \cdot P(M = i) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{S} P(T_m > h | M = i) \cdot P(T_n > h | M = i) \cdot P(M = i) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{S} e^{-h \cdot \lambda_m \cdot i} \cdot e^{-h \cdot \lambda_n \cdot (s-i)} \cdot \binom{S}{i} p^i (1-p)^{S-i}
\end{aligned}
$$

4. Definimos los siguientes tiempos:
   tn_i : tiempo que tarda en brotar la *i-esima* naranja desde que brotó la *(i-1)-esima*.
   $tn_i \sim \exp(n \cdot \lambda_n)$
   Tn_i : tiempo que tarda en brotar la *i-esima* naranja.
   $Tn_i = \sum_{j=1}^{i} tn_j$

   $E($ Tiempo en obtener la primera naranja buena $) = \sum_{i=0}^{\infty} E(Tn_i|$ han salidos (i-1) naranjas malas y la i es buena $) \cdot P($han salidos (i-1) naranjas malas y la i es buena$)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} E(Tn_i) \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=1}^{i} E(tn_j)) \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{\lambda_n \cdot n} \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \tfrac{b}{\lambda_n \cdot n} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \tfrac{b}{\lambda_n \cdot n} \cdot \tfrac{1}{b^2} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_n \cdot n \cdot b}
\end{aligned}
$$

5. tm_i : tiempo que tarda en brotar la *i-esima* manzana desde que brotó la *(i-1)-esima*.
   $tm_i \sim \exp((m - (i-1)) \cdot \lambda_m)$
   En particular la VA que me interesa es: tm_{k+1}
   $tm_{k+1} \sim \exp((m-k) \cdot \lambda_m)$

$$E(tm_{k+1}) = \tfrac{1}{(m-k) \cdot \lambda_m}$$

6. Por la parte 4, la esperanza de la utilidad por unidad de tiempo que tengo (por la venta de naranjas) es:

$$
\begin{aligned}
E(U) &= \tfrac{\$100}{\frac{1}{\lambda_n \cdot n \cdot b}} \\
&= \$100 \cdot \lambda_n \cdot n \cdot b
\end{aligned}
$$

   Desprendiendo del resultado obteido en la parte 4, con el agrónomo se tiene que $b = 1$, luego, en este caso la esperanza de la utilidad será (contando el costo por los servicios del profesional, sea \$C) por unidad de tiempo:

$$E(U) = \$100 \cdot \mu_n \cdot n - \$C$$

   Luego la cantidad máxima dispuesta a pagar \$C es tal que:

$$
\begin{gathered}
\$100 \cdot \lambda_n \cdot n \cdot b < \$100 \cdot \mu_n \cdot n - \$C \\
\$C < \$100 \cdot n \cdot (\mu_n - b \cdot \lambda_n)
\end{gathered}
$$