DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Daniel Espinoza, Rodrigo Wolf
Semestre: Otoño 2010

IN3701 Optimización

Pauta Examen

P1 (50 %)

Considere el problema que enfrenta una empresa productora de frutas que esta diseñando su logística para el largo plazo. Para esto, la empresa conoce su perfil de producción p_i semanal y su perfil de demanda d_i semanal para todo el próximo año para $i \in \{1, \ldots, 52\}$ los cuales son fijos y se cumplen exactamente en cada semana. Para almacenaje, la empresa puede construir a comienzo de año hasta tres bodegas, cada una con capacidad Q_j^p y costo fijo de construcción F_j^p y un costo variable (por tonelada almacenada por semana) V_j^p para $j \in \{1, 2, 3\}$. Al mismo tiempo puede arrendar mensualmente espacio de bodega externa a un costo fijo F^e por cada Q^e toneladas extra de capacidad, y debe pagar un costo variable V^e por tonelada almacenada por semana. Existe además la posibilidad de subarrendar mensualmente la capacidad de bodega propia instalada durante los meses de bajo uso, siempre y cuando la capacidad sobrante en cada semana del mes exceda Q^a. El beneficio por arrendar por un mes una tonelada de espacio de bodega es de V_t^a para cada mes $t \in \{1, \ldots, 12\}$. Por simplicidad, asuma que $S_t \subseteq \{1, \ldots, 52\}$ es el conjunto de semanas en el mes $t \in \{1, \ldots, 12\}$. Formule el problema de decidir cual es la política óptima de bodega como un problema de optimización lineal entero mixto.

- Variables de Decisión

  - $x_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se instala la bodega propia } j. \\ 0 & \sim \end{cases}$

- $z_i = \begin{cases} 1 & \text{Si capacidad sobrante en semana } i \text{ es mayor a } Q^a \text{ en las bodegas propias.} \\ 0 & \sim \end{cases}$
- $y_t^a = \begin{cases} 1 & \text{Si se subarrienda capacidad sobrante en bodegas propias en mes } t. \\ 0 & \sim \end{cases}$
- $y_t^e =$ Cantidad de capacidad externa (Q^e) a arrendar en mes t.
- $IQ_t^a =$ Toneladas de capacidad en bodegas propias a subarrendar en mes t.
- $I_{ij}^p =$ Toneladas de fruta a almacenar en bodega propia j en semana i (al final).
- $I_i^e =$ Toneladas de fruta a almacenar en bodega externa en semana i (al final).
- $p_{ij}^p =$ Toneladas de fruta producidas enviadas a bodega propia j en semana i.
- $d_i^p =$ Toneladas de fruta de demanda retiradas de bodega propia j en la semana i.

- Restricciones

  1. Respetar capacidad de bodegas propias

  $$I_{ij}^p \leq Q_j^p \cdot x_j \quad \forall j \in \{1,2,3\}$$

  2. Respetar capacidad de bodegas externas

  $$I_i^e \leq Q^e \cdot y_t^e \quad \forall i \in S_t, t \in \{1,\dots,12\}$$

  3. Actualizar inventario semanalmente

  $$I_{ij}^p = I_{(i-1)j}^p + p_{ij}^p - d_{ij}^p \quad \forall i \in \{1,\dots,52\}, j \in \{1,2,3\}$$

  $$I_i^e = I_{(i-1)}^e + \left(p_i - \sum_{j=1}^{3} p_{ij}^p\right) - \left(d_i - \sum_{j=1}^{3} d_{ij}^p\right) \quad \forall i \in \{1,\dots,52\}$$

  Además se debe imponer que
  $I_{0j}^p = 0 \quad \forall j \in \{1,2,3\}$
  $I_0^e = 0$

4. Respetar producción y demanda

$$p_i \geq \sum_{j=1}^{3} p_{ij}^{p} \quad \forall i \in \{1,\ldots,52\}$$

$$d_i \geq \sum_{j=1}^{3} d_{ij}^{p} \quad \forall i \in \{1,\ldots,52\}$$

5. Se puede subarrendar solo si se construyó la bodega

$$\sum_{j=1}^{3} x_j \geq y_t^a \quad \forall t \in \{1,\ldots,12\}$$

y además pueden incluir (no es estrictamente necesario)

$$\sum_{j=1}^{3} x_j \geq z_i \quad \forall i \in \{1,\ldots,52\}$$

6. Subarrendar capacidad sobrante

$$\sum_{j=1}^{3} Q_j^p - I_{ij}^p \geq Q^a \cdot z_i \quad \forall i \in \{1,\ldots,52\}$$

$$\sum_{i \in S_t} z_i \geq 4 \cdot y_t^a \quad \forall t \in \{1,\ldots,12\}$$

7. Cantidad de capacidad propia sobrante a subarrendar

$$\sum_{j=1}^{3} Q_j^p - I_{ij}^p \geq IQ_t^a \quad \forall i \in S_t, t \in \{1,\ldots,12\}$$

$$\sum_{j=1}^{3} Q_j^p \cdot y_t^a \geq IQ_t^a \quad \forall t \in \{1,\ldots,12\}$$

8. Naturaleza de las Variables

$$x_j, z_i, y_t^a \in \{0,1\}$$

$$y_t^e \in N$$

$$I_{ij}^p, I_i^e, IQ_t^a, p_{ij}^p, d_{ij}^p \geq 0$$

- Función Objetivo

$$\text{máx} \sum_{t=1}^{12} V_t^a \cdot \sum_{j=1}^{3} IQ_{jt}^a - \left(\sum_{j=1}^{3} F_j^p \cdot x_j + \sum_{t=1}^{12} F^e \cdot y_t^e + \sum_{i=1}^{52} \left(\sum_{j=1}^{3} V_j^p \cdot I_{ij}^p \right) + V^e \cdot I_i^e \right)$$

P2 (50 %)

1. (0.8 ptos) De un ejemplo de un problema de optimización continuo irrestricto donde las condiciones necesarias se cumplan, pero el punto en cuestión no sea un óptimo local.
2. (0.8 ptos) De un ejemplo de un problema de optimización continuo irrestricto donde las condiciones suficientes no se cumplan, pero el punto en cuestión sea un óptimo local.
3. (0.8 ptos) De un ejemplo de un problema de optimización continuo irrestricto donde las condiciones suficientes se cumplan, pero el punto en cuestión no sea un óptimo global.
4. (0.8 ptos) De un ejemplo de un problema de optimización continuo con restricciones donde $\overline{\mathcal{D}}(x) \subsetneq \widetilde{\mathcal{D}}(x)$.
5. (0.8 ptos) De un ejemplo de un problema de optimización continuo con restricciones donde un óptimo local no satisfaga las condiciones de KKT.
6. (1.0 ptos) Demuestre que si Fase I de simplex termina con un valor objetivo estrictamente positivo, entonces el problema original no es factible.
7. (1.0 ptos) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Utilizando el teorema de dualidad fuerte, demuestre que exactamente una de las dos proposiciones es cierta:

    a) Existe $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $Ax = b$.

    b) Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^tA \geq 0$ y $y^tb < 0$.