|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Profesores: | Fernanda Bravo, Daniel Espinoza, Rodrigo Wolf |
| Auxiliares: | Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara |

**IN3701 – Modelamiento y Optimización**

**Auxiliar extra examen**

**12 de Julio, 2010**

**Problema 1**

1. Para las siguientes funciones, determine si los puntos entregados son óptimos, ya sea locales o globales. Para esto, utilice las condiciones de primer y segundo orden vistas en clase.
   1. f(x,y) = (x-2)2 + (y-5)3 en el punto (x,y)\*=(2,5)
   2. f(x) = en el punto x\*=
   3. f(x) = -5 en el punto x\*=0
2. Para la minimización de las siguientes funciones, ¿qué método recomendaría, Newton o Gradiente?
   1. f(x,y) = x4 + 3y2
   2. f(x) = x3 + exp(-x2)
   3. f(x,y) = x2 + y2

**Problema 2**

Dado el siguiente problema:

*min f(x1,x2) = (x1 - 5)2 + (x2 – 2)2 (P*)

*s.a g1(x1,x2) = (x1 - 1)2 + (x2 – 2)2 ≤ 1*

*g2(x1,x2) = x1 + x2* ≥ *3*

1. Desarrolle las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema.
2. Revise el cumplimiento de las condiciones de KKT para los siguientes puntos:



¿Qué podemos concluir para cada uno de estos puntos? Justifique.

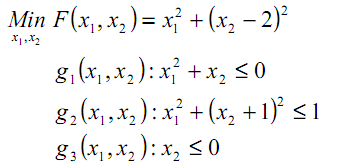
1. Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente.
2. Determine un candidato para ser solución óptima analizando el gráfico. Verifique si este candidato cumple las condiciones de KKT. De la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado.
3. Se agrega la siguiente restricción al problema (P):

*g3(x1, x2) = (x1 - 3)2 + (x2 – 2)2 ≤ 1*

¿Qué podemos decir acerca de la solución óptima del problema original aplicando KKT? Justifique su respuesta.

**Problema 3**

Se tiene el siguiente problema (P)

****

1. Muestre las gráficamente las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo.

2. Desarrolle las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).

3. Revise el cumplimiento de las condiciones de KKT para los siguientes puntos:

( 0,-2) ; (0,-1) ; (0,0).

4. Entregue la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado. ¿Es un mínimo global?, justifique su respuesta.

**Problema 4**

Una fábrica de televisores LCD, dado el éxito en ventas de sus televisores producto del mundial, ha decido optimizar el uso de sus recursos para reducir los tiempos de producción y así generar una ventaja competitiva.

La empresa produce I modelos de televisores distintos, los cuales se deben procesar en M máquinas. Cada uno de los N modelos debe ser procesado en todas las máquinas, pasando siempre primero por la máquina 1, luego por la máquina 2, y así sucesivamente hasta terminar con la máquina M (todos los modelos pasan por las M máquinas en el mismo orden, dadas las similitudes entre ellos), tal como se muestra a continuación:

...

Sin embargo, algunos modelos de TV tardan más tiempo que otros en las máquinas, debido a sus características especiales. Suponga que el tiempo de proceso en la máquina m del modelo de TV i está dado por Tim.

1. Plantee un modelo de programación lineal entera para determinar el orden en que debe procesar los distintos modelos de televisores en las máquinas, de modo de minimizar el tiempo de tránsito total.
2. Suponga ahora que cada máquina es controlada por un operario. Suponga además que al departamento de operaciones se le ha asignado un presupuesto adicional PPTO para reducir los tiempos de producción. Usted ha decidido destinar este presupuesto para capacitar a sus trabajadores, con lo cuál reducirá en Kim el tiempo de proceso de un modelo de televisor i en la máquina m. La capacitación para el operario de la máquina m cuesta Wm. ¿Cómo modificaría su modelo de la parte anterior para incorporar la decisión de a qué operarios capacitar?

**Solución**

**Problema 1**

**1)**

**a.** Calculamos 

Evaluando en (x,y)=(2,5) => , se cumple condición de primer orden.

Calculamos ahora , es semi-definida positiva. Como **no** es definida positiva, entonces no se puede concluir nada de este punto.

**b.** Calculamos 

Evaluando en x\*= => , condición de primer orden.

Calculamos ahora , evaluamos en x\*= =>  es definida positiva. Con esto, se puede decir que el punto  es mínimo local. Además, la función es convexa (deberán bosquejar un gráfico para verlo), por lo que se concluye que es mínimo **global**.

**c.** Calculamos . No se puede evaluar en el punto x\*=0, no se cumple condición de primer orden, la función no es C1 y no es posible concluir si el punto es mínimo o no para la funcióncon estas condiciones. Sin embargo, es fácil ver que el punto x\*=0 es efectivamente el mínimo.

**2)**

(a) la función es de forma cuadrática y (estrictamente) convexa, por lo tanto newton termina en una iteración en la búsqueda del óptimo.

b) con gradiente es suficiente para encontrar el óptimo, pues la función no se caracteriza por tener comportamiento excéntrico y dado que el método es menos costoso (computacionalmente) es preferible. (poner newton no está mal tampoco, pero quitarle un poquito de puntaje, siempre que argumenten bien).

c) Tanto gradiente como newton entregan el óptimo en 1 iteración, sin embargo es más probable (e intuitivo) que digan que el metodo del gradiente es mejor (porque visualmente se ve que con una circunferencia se llega al óptimo en un paso).

**Problema 2**

**1.** Primero se lleva el problema a la forma estándar

*min f(x1,x2) = (x1 - 5)2 + (x2 – 2)2*

*s.a g1(x1,x2) = (x1 - 1)2 + (x2 – 2)2 – 1 ≤ 0*

*g2(x1,x2) = 3 - x1 - x2 ≤* 0

Así, se tiene que las condiciones de KKT son las siguientes:



Y



**2. Punto (1,2):**

Entonces



De aquí se obtiene:

= -8 < 0

= 0

¡Contradicción! Entonces no cumple KKT.

**Punto :**



entonces



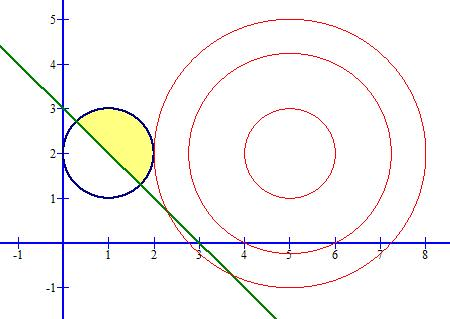
De aquí se obtiene:

 <0

= -4 < 0

Entonces no cumple KKT.

**3.**



**4.** Del gráfico anterior, se observa claramente que el óptimo está en el punto (2,2), por lo que proponemos dicho punto. Entonces:



Por lo que



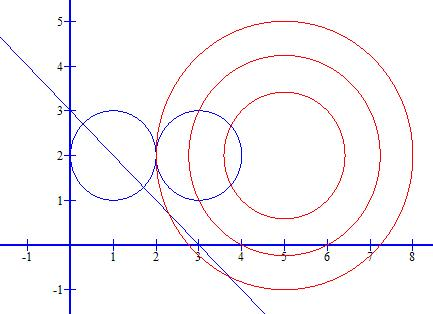
Y de aquí se obtiene:

 >0

¡Cumple KKT!

Como la región factible y la función objetivo f son claramente convexas, (2,2) es óptimo y f=9.

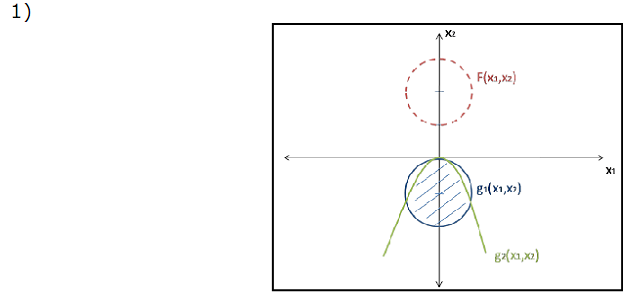
**5.** Si agregamos la restricción, el gráfico queda de la siguiente forma:



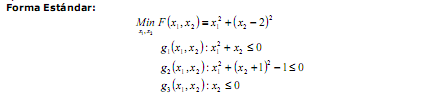
donde el punto óptimo sigue siendo el (2,2), aunque ahora la región factible está formada por un único punto (el (2,2), intersección de ambas restricciones circulares). Como ya probamos que éste punto cumple la condición necesaria de KKT anteriormente, y como la región factible sigue siendo convexa, se cumple KKT

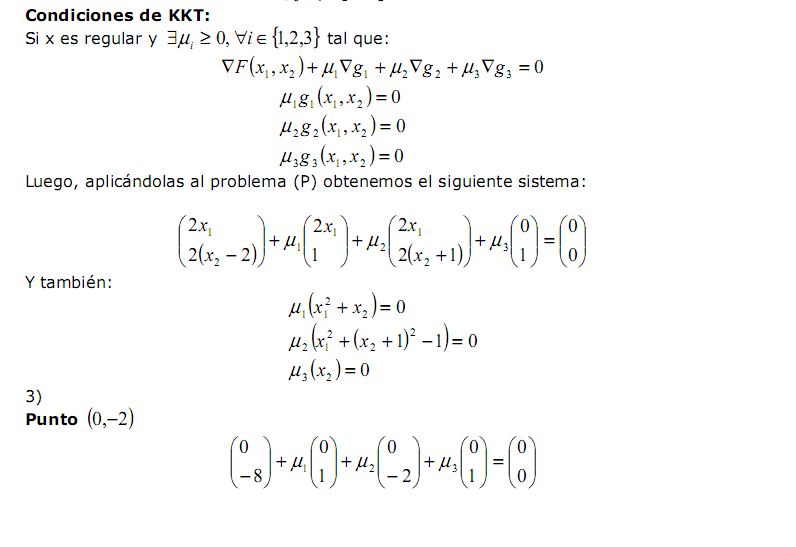
Problema 3:

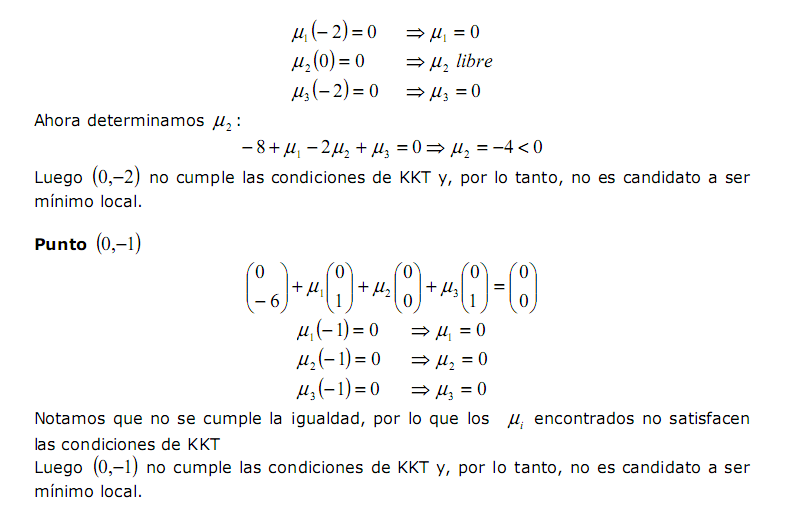
1)

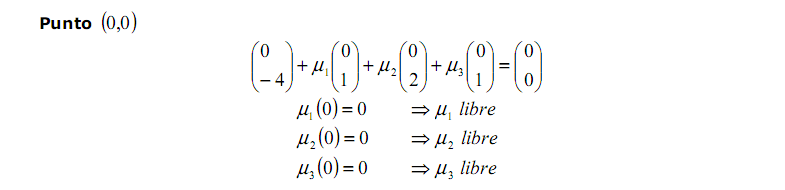


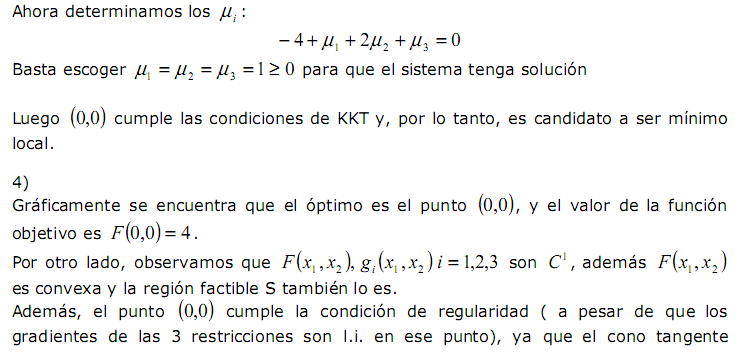
2)

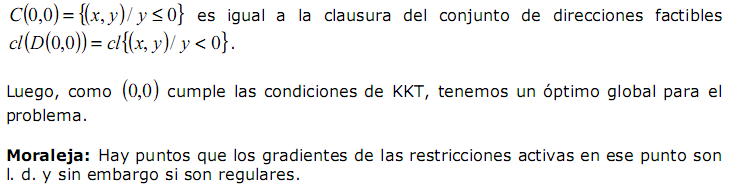


****

****

****

****

****

**Problema 4:**

**1.**

**Variables: (1 pto.)**

 1 si se produce modelo de TV j después de modelo i

0 sino

Tiempo de comienzo del proceso del modelo i en la máquina m

Tiempo en que se termina de procesar el último modelo en la última máquina.

**Función objetivo:**



***Nota:*** Ver restricción 1

**Restricciones:**

1) Definición de tFINAL: (0,4 ptos.)

***Nota:*** tFINAL es mayor o igual que todos los tiempos de proceso que llevan acumulados los trabajos en la máquina M. Así, el modelo i que tenga el mayor tiM+TiM es el que le dará valor a la variable tFINAL, es decir, el último trabajo que pasó por esa máquina (pues es el que tiene mayor tiempo).

2) Se debe pasar por las máquinas en orden: (0,4 ptos.)

3) Sólo se puede usar la máquina cuando está desocupada: (0,4 ptos.)

**Nota:** Las restricciones siguientes son para definir “la ruta”, i.e. asegurarse de que se produzcan todos los modelos de televisores. *Es necesario agregar los nodos artificiales 0 e I+1*, después se mostrará por qué. ¡Las restricciones 4,5,6 y 7 son típicas restricciones de flujo en redes!

4) De cada nodo sale un arco: (0,4 ptos.)

5) A cada nodo llega un arco: (0,4 ptos.)

6) Evitar subtours: (0,4 ptos.)

 U{0,1,...,I,I+1} t.q. 2≤|U|≤I-2

**Nota:** Ojo con el conjunto U, subconjunto de los nodos del 0 al I+1.

7) Condición de borde para que funcione bien la restricción 6 (existe el arco entre nodos I+1 y 0): (0,4 ptos.)



**Ejemplo:** La idea es crear una ruta desde el trabajo que se realiza primero hasta el trabajo que se realiza al final, pero esta ruta no regresa al origen como en problemas de transporte o flujo en redes típicos (ej: vendedor viajero). Una vez que llegamos al último nodo nos quedamos ahí, por lo que hay que crear los nodos artificiales 0 e I+1 y obligar a que exista el arco de I+1 a 0. Con el dibujo a continuación se muestra por qué esto funciona:

Configuración inicial, donde se realizan I=4 modelos de TV distintos Los nodos artificiales 0 e I+1=5 fueron agregados junto con el arco:

0

I+1

Ahora se muestra una posible configuración final factible de acuerdo a las restricciones que hemos puesto:

0

I+1

Se encontró una ruta entre los 4 nodos originales de la red, y NO existe un camino entre el último nodo revisado y el primero, que es lo que se quería evitar con los nodos artificiales. Los tiempos en los nodos artificiales no nos afectan en nada dado los límites de la restricción 3, para i de 1 hasta I (sin considerar los nodos artificiales).

8) Naturaleza de las variables: (0,2 ptos.)

***Nota de corrección:*** *Esta explicación de las restricciones de la 4 a la 7 es sólo para que los alumnos entiendan la pauta sin tantos problemas. Obviamente no es necesario que expliquen todo esto ni que den un ejemplo como el de arriba. Si no manejan del todo bien los índices pero se dan cuenta que tienen que eliminar subtours y revisar todos los nodos (i.e. agregan las restricciones de la 4 a 7 bien, excepto por los índices) penalizar con 0,1 décimas en cada una de las que “tengan problemas de índices” (i.e. dado que es difícil de identificar este roblema en el corto tiempo de una prueba, no se debe penalizar mucho).*

**2.**

**Agrego variable: (0.3 ptos.)**

 1 si capacito al operario de la máquina m

0 sino

**Cambio las siguientes restricciones: (0,2 ptos. c/u)**

* Agrego el término –Kim\*Ym que representa el ahorro en tiempo si capacito a m

1) 

2) 

3) 

El resto de las restricciones queda igual.

**Agrego restricciones:**

7’) Naturaleza de la variable nueva: (0,2 ptos.)

8) Respetar presupuesto: (0,4 ptos.)



Función objetivo queda igual.

**ʴÀ**