INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Daniel Espinoza, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 10
1 de Julio, 2010

Problema 1

Sea el problema:

$$\min f(x)$$
$$s.a. g_i(x) \leq 0$$

¿Que hipótesis se deben pedir para que el cumplimiento de las condiciones de KKT para un punto $\bar{x}$ garantice que dicho punto es mínimo global del problema?

- x* mínimo local tal que se cumple la condición de regularidad en x*. Para funciones diferenciables se tiene que x* es regular si las restricciones de (P) si los vectores gradientes de las restricciones activas en x* son l. i.
- *f y gi son de clase C1*
- f convexa y región factible convexa.

Problema 2

A partir de las condiciones de KKT verifique que un punto interior no puede ser óptimo en un problema de programación lineal con función objetivo no nula. ¿Un punto interior puede ser óptimo en un problema de programación no lineal?

Verifiquemos que un punto interior no puede ser óptimo de un problema lineal:

Sea un PL donde se quiere optimizar $f(x) = c^t x$ lineal en la región factible S convexa. Sea x* un punto del interior de S candidato a ser óptimo global de PL. Las condiciones necesarias de KKT aplicadas a x* son:

$\exists \mu_i \geq 0, \forall i \; t.q.$:

$$\nabla f(x*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x*) = 0 \quad (*)$$
$$\mu_i g_i(x*) = 0, \forall i = 1, \dots, m \quad (HC)$$

Para x* todas las restricciones son NO activas, puesto que es un punto interior, luego por las condiciones de Holgura Complementaria, se tiene que $\mu_i = 0 \; \forall i$.

Luego la ecuación (*) también debe cumplirse para que x* sea el óptimo, entonces:

$$\nabla f(x*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x*) = \nabla f(x*) = 0$$

Por otro lado se tiene que:

$$\nabla f(x*) = \vec{c}$$

Con lo que se concluye que:

$$\nabla f(x*) = \vec{c} = 0 => f(x) = 0$$

Lo que es una contradicción, pues supusimos que f es no nula Por lo tanto un punto interior no puede ser un punto óptimo de un problema de optimización lineal con función objetivo NO nula.

Ahora analizamos el caso de un problema no lineal:

Notar que la condición de que $\mu_i = 0\ \forall i$, no cambia y por ende $\nabla f(x*) = 0$, ahora con f no lineal tampoco cambia. Lo anterior se tiene si y solo si x* es un punto estacionario de f, por lo tanto un punto interior si puede ser óptimo de un problema de Optimización No Lineal.

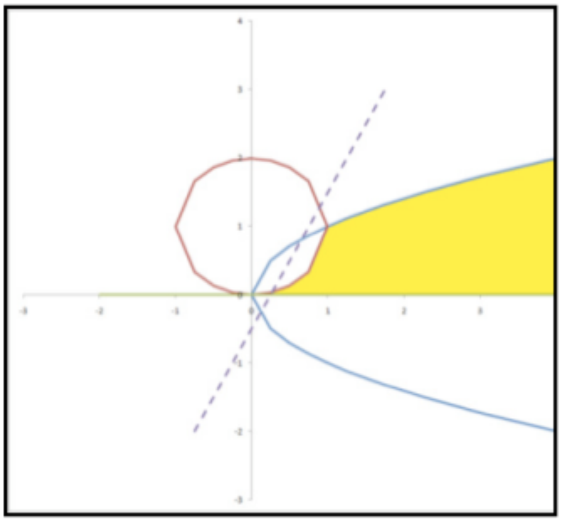
Problema 3

Se tiene el siguiente problema (P)

$$\underset{x_1,x_2}{Min}\ F(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2$$
$$g_1(x_1,x_2): x_1 \geq x_2^2$$
$$g_2(x_1,x_2): x_1^2 + (x_2-1)^2 \geq 1$$
$$g_3(x_1,x_2): x_2 \geq 0$$

1. Muestre las gráficamente las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo.
2. Escriba el problema (P) en su forma estándar.
3. Revise el cumplimiento de las condiciones de KKT para los siguientes puntos: $(1,1)$; $(0,0)$. ¿Qué se puede decir de cada uno?
4. Entregue la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado. ¿Podemos asegurar que es un mínimo global?, justifique su respuesta.

1)



Forma Estándar:

$$\underset{x_1,x_2}{Min}\ F(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2$$
$$g_1(x_1,x_2): -x_1 + x_2^2 \le 0$$
$$g_2(x_1,x_2): -x_1^2 - (x_2-1)^2 + 1 \le 0$$
$$g_3(x_1,x_2): -x_2 \le 0$$

Condiciones de KKT

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}-1\\2x_2\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}-2x_1\\-2(x_2-1)\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mu_1(-x_1 + x_2^2) = 0$$
$$\mu_2(-x_1^2 - (x_2-1)^2 - 1) = 0$$
$$\mu_3(-x_2) = 0$$

3)
Punto $(1,1)$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mu_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \mu_1 \ libre$$
$$\mu_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \mu_2 \ libre$$
$$\mu_3(-1) = 0 \quad \Rightarrow \mu_3 = 0$$

Ahora determinamos los μ_i:

$$-1 + 2\mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2} \ge 0$$
$$2 - \mu_1 - 2\mu_2 = 0 \ \Rightarrow \mu_2 = \frac{3}{4} \ge 0$$

Luego $(1,1)$ cumple las condiciones de KKT y, por lo tanto, es candidato a ser mínimo local

Punto $(0,0)$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mu_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \mu_1 \ libre$$
$$\mu_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \mu_2 \ libre$$
$$\mu_3(0) = 0 \quad \Rightarrow \mu_3 \ libre$$

Ahora determinamos los μ_i:

$$2 - \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 2 \ge 0$$
$$-1 + 2\mu_2 - \mu_3 = 0$$

Basta escoger $\mu_2 = 1, \mu_3 = 1 \ge 0$ para que el sistema tenga solución

Luego $(0,0)$ cumple las condiciones de KKT, y es también un candidato a ser óptimo.

Ambos puntos cumplen la condición de regularidad, ya que los gradientes de sus restricciones activas son l.i., y ambos cumplen la condición necesaria de KKT, luego son mínimos locales. Sin embargo, la región factible no es convexa, en particular la restricción 2 no lo es:

$$\nabla^2 g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} < 0$$

Luego, no se satisface la condición suficiente para asegurar optimalidad global de ninguno de los dos puntos.

4)

Gráficamente se encuentra que el óptimo es el punto $(0,0)$, y el valor de la función objetivo es $F(0,0) = 0$. No se puede asegurar optimalidad, a pesar de que el otro candidato tiene un valor de $F(1,1) = 1$, ya que eventualmente podrían existir otros candidatos con mejor resultado, que no han sido revisados.

Moraleja: Hay puntos que cumplen KKT que no son mínimos. KKT es suficiente cuando las restricciones y la función objetivo son de clase C1, y la f y la región generada por las restricciones son convexas.

Problema 4

METODO DEL GRADIENTE

a) Sea $f: R^2 \to R$, tal que $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Muestre que el método del Gradiente o Máximo Descenso (steepest descent method) encuentra el óptimo en una sola iteración, independiente del punto de partida.

b) Sea $g: R^2 \to R$, tal que $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2$. Explique por qué en este caso no se puede asegurar una rápida convergencia. Encuentre un punto de partida apropiado, para el cual este método encuentra el óptimo en una sola iteración.

Parte a)

Primero tenemos que $\nabla f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1, 2x_2)^T$

Comencemos desde el punto $x^0 = (a,b)^T \in R^n$ cualquiera.

Calculamos el gradiente de f en ese punto: $\nabla f\left((a,b)^T\right) = (2a, 2b)^T$

Luego el punto x^1 viene dado por $x^1 = x^0 - \alpha \nabla f(x^0)$, donde α viene del problema unidimensional $\underset{\alpha > 0}{Min}\ f(x^1)$, es decir:

$$x^1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}, \text{ con } f(x^1) = (a - 2a\alpha)^2 + (b - 2b\alpha)^2$$

$$\text{y} \quad \frac{df(x^1)}{d\alpha} = -4a(a - 2a\alpha) - 4b(b - 2b\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{Luego } x^1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parte b)

En este caso se tienen curvas de nivel elípticas, por lo que, salvo en algunos puntos, el gradiente de la función objetivo no apunta hacia el óptimo global, y se tienen gradientes más bien ortogonales en iteraciones sucesivas, por lo que se converge lentamente a medida que nos acercamos al óptimo.

Para llegar en una sola iteración basta encontrar un punto en el cual $-\nabla f$ apunte hacia el origen, por ejemplo: $(1,0)^T$ ó $(0,1)^T$.

Problema 5

METODO DE NEWTON

Sea $f: R^2 \to R$ tal que $f \in C^2$

a) Muestre que $d = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x)$ es una dirección de descenso para f en x si $\nabla^2 f(x)$ es definido positivo.

b) Realice una iteración del Método de Newton para la función g del problema anterior comenzando desde el punto (1,1).

Parte a)

Sea $\nabla^2 f(x)$ definida positiva y sea $d = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x)$.

Se tiene que $y^T \cdot \nabla^2 f(x) \cdot y > 0 \quad \forall y \in R^n / \{0\}$

Y además $y^T \cdot [\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot y > 0 \quad \forall y \in R^n / \{0\}$

Luego $\nabla f(x)^T \cdot [\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x) > 0$

$$-\nabla f(x)^T \cdot [\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x) < 0$$

$$\nabla f(x)^T \cdot \left(-[\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x)\right) < 0$$

$$\nabla f(x)^T \cdot d < 0$$

Y d es una dirección de descenso.

Parte b)

Primero tenemos que $\nabla f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1, 6x_2)^T$ y $\nabla^2 f\left((x_1, x_2)^T\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Comenzamos desde el punto $x^0 = (1,1)^T$

Calculamos el gradiente de f en ese punto: $\nabla f\left((1,1)^T\right) = (2,6)^T$

Luego el punto x^1 viene dado por $x^1 = x^0 - [\nabla^2 f(x^0)]^{-1} \nabla f(x^0)$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verificamos si es óptimo:

$$\nabla f(x^1) = \quad \nabla f\left((0,0)^T\right) = \quad (0,0)^T$$

$$\nabla^2 f(x^1) = \quad \nabla^2 f\left((0,0)^T\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$ que es definida positiva.