

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 9
24 de Junio de 2010

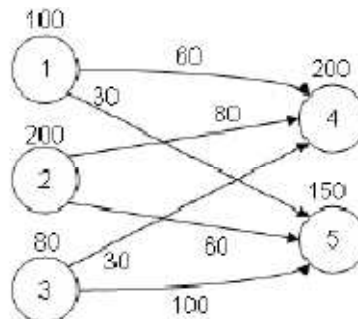
Problema 1

En una pequeña villa hay n hombres solteros, n mujeres solteras y m “formadores de matrimonios”. Cada formador conoce un subconjunto de los hombres y de las mujeres y puede formar hasta b_i matrimonios entre cualquier par hombre-mujer que conozca. Asumiendo que los matrimonios son heterosexuales y que cada persona puede casarse a lo más una vez, queremos determinar el máximo número de matrimonios que son posibles.

Muestre que la respuesta se puede encontrar resolviendo un problema de máximo flujo. ¿Por qué es bueno poder modelar problemas grandes como un problema de flujo en redes?

Problema 2

- Demuestre que un árbol tiene al menos 2 nodos con grado igual a 1
- Una empresa posee una planta de producción y desea que en esta se produzca la mayor cantidad de productos posibles. La configuración de la planta se ilustra en el siguiente grafo:



La planta cuenta con 3 estaciones de producción (nodos 1, 2 y 3) y 2 estaciones de envasado (nodos 4 y 5). Cada estación de producción puede elaborar hasta 100, 200 y 80 [unid/hora] respectivamente y cada estación de envasado puede procesar hasta 200 y 150 [unid/hora] respectivamente. Las unidades producidas en las estaciones de producción son trasladadas a las de envasado a través de cintas transportadoras que se representan vía arcos en el grafo. Cada correa posee una cantidad máxima de unidades por hora que es capaz de transportar, capacidad detallada en cada arco del grafo.

¿Cómo modificaría la red para poder aplicar F&F y así encontrar la capacidad máxima de producción? (no tiene que aplicar F&F sobre la nueva red)

Problema 3

- a) Escriba un algoritmo A que permita averiguar si existe un camino desde el nodo s a t que pase por los nodos a y b en cualquier orden.
- b) ¿Cómo usaría el algoritmo anterior para encontrar la ruta mínima entre los nodos s y t que pase por a y b ?

Problema 4

Considere que debe resolver un problema de flujo máximo del nodo s al nodo t , y que sólo cuenta con un algoritmo especializado en el problema de flujo a costo mínimo. ¿Puede transformar el problema original en uno de flujo a costo mínimo, de modo que la solución óptima obtenida resuelva el problema original?

Problema 5

Muestre que el flujo máximo que puede atravesar una red equivale al corte de mínima capacidad de ésta.

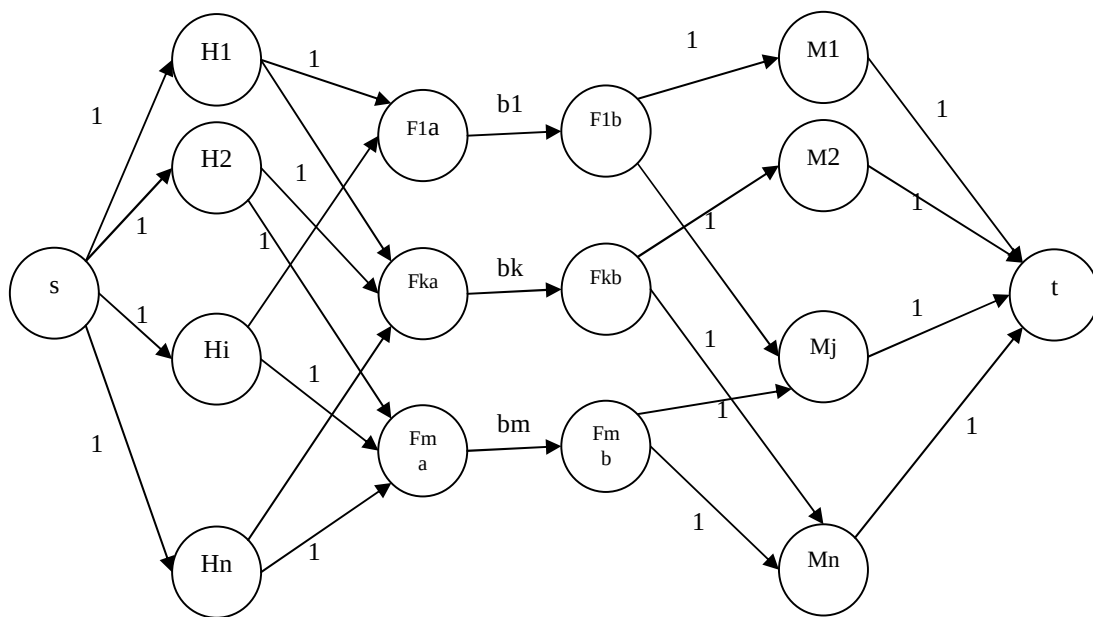
Algoritmo Ford Fulkerson

1. Comenzar con un flujo inicial factible f entre s y t .
2. Buscar un camino aumentante entre s y t .
3. Si no existe camino aumentante, terminar.
4. Si se encuentra un camino aumentante P , calcular: $\delta = \min_{(i,j) \in P} u_{ij}$.
5. Si $\delta = +\infty$, terminar.
6. Si $\delta < +\infty$, aumentar el flujo en δ a lo largo del camino P : $f_{ij} := f_{ij} + \delta \quad \forall (i,j) \in P$.
7. Volver a 2.

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 9
24 de Junio de 2010

Problema 1

Modelando a cada persona como un nodo y las relaciones "a conoce a b" como arcos con capacidad 1, se forma la siguiente red:



Donde los nodos s y t son ficticios y los arcos que inciden en ellos tienen capacidad 1.

Luego, el problema queda como uno de máximo flujo sobre esta red:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } & F \\ \text{s.a.} & \end{array}$$

$$\sum_{j \in O(i)} f_{ij} - \sum_{j \in D(i)} f_{ji} = \begin{cases} F & \text{si } i = s \\ -F & \text{si } i = t \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$f_{ij}, F \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A$$

Problema 2

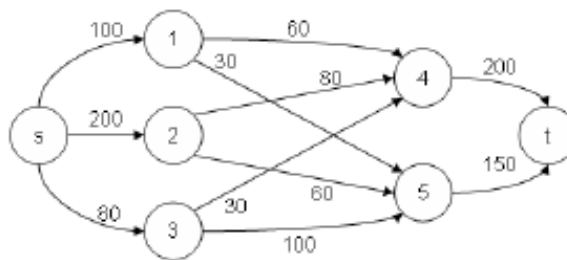
a) Se hace con inducción.

Caso base hay 2 nodos como es un árbol no hay ciclos por lo tanto solo hay un arco que los une y por consiguiente el grado de cada nodo es uno.

Supongamos ahora que se cumple (lo que queremos probar) para n nodos y veamos si se cumple para $n+1$. Al agregar un nodo más a la red se debe incorporar también un nuevo arco. Se agrega un arco ya que si no lo agregásemos no sería árbol ya que no sería conexo y agregamos uno solo ya que de lo contrario se armarían ciclos.

Luego hay un nuevo nodo de grado 1 (el que agregamos) que ocurre con el resto de la red, el nuevo arco puede provenir de un nodo con grado distinto de 1, en cuyo caso se cumple que en la red hay al menos 2 nodos con grado igual a 1, ya que esto ya se cumple por la hipótesis de inducción y en caso de que el arco que se agrega provenga de un nodo de grado 1 la hipótesis de inducción nos garantizaba que en el peor de los casos antes habían 2 nodos con grado 1, ahora uno de estos pasaría a tener un grado mayor, pero la cosa se sigue cumpliendo ya que hay un nuevo nodo con grado 1.

b) La red quedaría así:



Problema 3

a)

Una alternativa es basarse en el algoritmo de marcado:

Llamaremos M_{pq} a la respuesta del algoritmo entre p y q , es decir, M_{pq} entrega "sí" si existe un camino entre los nodos p y q .

Definimos: E conjunto de nodos etiquetados y R conjunto de nodos revisados.

M_{pq} :

Inicialización:

$$E = \{p\}$$

$$R = \emptyset$$

Repetir

Si $E = \emptyset$ terminar (entrega no)

Si $q \in E$ terminar (entrega sí)

Escoger nodo $i \in E$

$$\forall j \notin R / (i, j) \in A, E = E \cup \{j\}$$

$$E = E / \{i\}$$

$$R = R \cup \{i\}$$

Luego basta con aplicar el algoritmo anterior:

A:

Si $M_{sa}, M_{ab}, M_{bt} = \text{sí}$, entrega sí

Si $M_{sb}, M_{ba}, M_{at} = \text{sí}$, entrega sí

entrega no

b)

Basta con aplicar el algoritmo una vez:

Si entrega "no", entonces la ruta mínima no existe, entrega null

Si entrega "sí":

Si $M_{sa}, M_{ab}, M_{bt} = \text{sí}$, aplicar Dijkstra entre s-a, a-b, y b-t, entrega

$$D_{st}^1 = D_{sa} + D_{ab} + D_{bt}$$

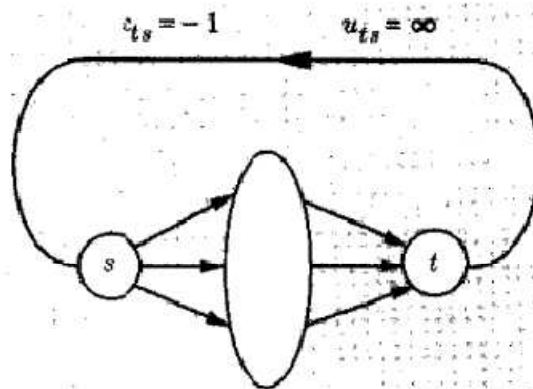
Si $M_{sb}, M_{ba}, M_{at} = \text{sí}$, aplicar Dijkstra entre s-b, b-a, y a-t, entrega

$$D_{st}^2 = D_{sb} + D_{ba} + D_{at}$$

Entrega $\text{Min}\{D_{st}^1, D_{st}^2\}$

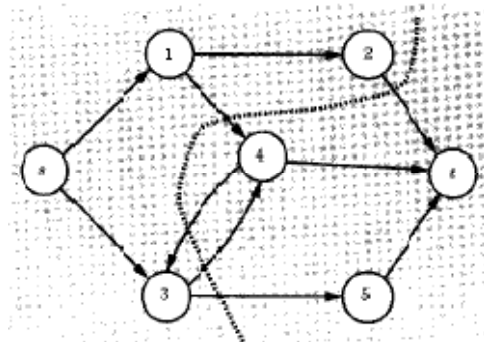
Problema 4

El problema de flujo máximo se puede reformular como un problema de flujo a costo mínimo de la siguiente manera: fijando el costo de todos los arcos de la red en 0, y agregando un nuevo arco (t, s) a la red, de capacidad infinita y costo $c_{ts} = -1$. Resolver el problema de flujo a costo mínimo, y minimizar $\sum_{ij} c_{ij} f_{ij}$ en esta red modificada es equivalente a maximizar el flujo f_{ts} del nuevo arco. Como el flujo del arco (t, s) debe retornar desde s a t a través de la red original, maximizar f_{ts} es lo mismo que resolver el problema de flujo máximo original.



Problema 5

Dado un grafo $G(N, A)$, un nodo inicial s y un nodo final t , se define un corte S , como una partición de N , tal que $s \in S, t \in S^c$. La capacidad de un corte está definida como la suma de las capacidades que lo atraviesan "hacia adelante": $C(S) = \sum_{(i,j) \in A, i \in S, j \in S^c} u_{ij}$.



Luego, como todo flujo F que vaya desde s a t debe atravesar el corte se tiene que $F \leq C(S) \forall S$. En particular $F \leq \min_S \{C(S)\}$.

Sea F^* el flujo máximo que atraviesa la red desde el nodo s al nodo t y supongamos que $F^* < C^* = \min_S \{C(S)\}$. Luego, existe un camino que va de s a t que atraviesa el corte S y tiene capacidad residual $\delta = C^* - F^*$, por lo que existe un flujo factible de $F^* + \delta$ que va de s a t , y por lo tanto, F^* no es flujo máximo.

Luego, el máximo flujo equivale al corte de mínima capacidad de la red.

Dudas y/o Comentarios a:
Nelson Devia
ndevia@ing.uchile.cl