INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Daniel Espinoza, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Diego Vergara, Nelson Devia

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar extra PPL
23 de Junio, 2010

Problema 1

Considere el problema de localización de plantas de una empresa productora de plástico. Éste considera N posibles localizaciones y K alternativas tecnológicas.

El producto puede ser transportado a Santiago para su venta por contrato o a Valparaíso para su exportación. Se considera, para este último caso, que la cantidad a exportar es libre pero con tope EXPF y que para cada período se ha estimado una curva de demanda. Considere, además, que no se puede almacenar el producto.

Además, se conocen los siguientes parámetros:

$PEXP_1^t$ Precio unitario de exportación para el tramo [0, EXP1] en el período t.

$PEXP_2^t$ Precio unitario de exportación para el tramo [EXP1, EXPF] en el período t. $PEXP_1^t > PEXP_2^t$

$PSTGO^t$ Precio unitario de venta en Santiago en el período t.

$DSTGO^t$ Demanda fija a cumplir para Santiago en el período t.

CAP_k Capacidad de la planta con tecnología k.

$CINV_{ik}^t$ Costo de inversión en una planta con tecnología k en la localización i y período t.

$COPER_{ik}^t$ Costo unitario de producción de la planta con tecnología k y localización i en el período t. Incluye costos de materia prima, mantenciones, etc.

$CTRANS_{ij}^t$ Costo unitario de transporte desde la planta ubicada en i al destino j (j = 1, Santiago, o j = 2, Valparaíso) en el período t.

Plantee un modelo de programación lineal mixta para decidir cuántas plantas abrir, sus localizaciones y alternativas tecnológicas de tal modo de maximizar el beneficio actual neto (BNA). Considere un horizonte de T períodos y que los parámetros monetarios para cada período ya llevan incorporada la tasa de descuento. Defina claramente variables, restricciones y función objetivo.

Problema 2:

La multinacional líder en el mercado de bebidas de fantasía, Carboni-Cola Company, quiere mejorar la planificación de la producción de sus I marcas y el posterior embotellado en distintos formatos, el que genera J productos diferentes[1]. Para efectos de modelamiento considere conocido el parámetro S_{ij} que vale 1 si el producto final j se produce con el producto genérico i, y 0 si no.

El proceso productivo comienza con M maquinas capaces de producir cualquiera de las I marcas, a una tasa PM_{mi} por hora para la maquina m y la marca i. Luego, la producción se pasa a uno de los I estanques, uno para cada marca, donde puede almacenarse o traspasarse a una de las L líneas de embotellado.

Las líneas de embotellado son capaces de producir cualquiera de los J productos finales, y trabajan a una tasa PL_{lj} por hora para la línea l y el producto final j. Cada máquina puede producir sólo una de las I marcas cada día y cada línea sólo puede embotellar un producto final por día. La jornada de producción diaria dura NH horas, y cuando se produce un cambio de marca en una maquina entre un día y el anterior es necesario dedicar TCG horas para realizarlo, análogamente cuando se produce un cambio de producto final entre un día y el anterior es necesario dedicar TCF hora para realizarlo.

El horizonte de planificación es de T días, y se conocen las demandas Djt para cada producto final j en el día t, las que deben ser satisfechas en algún momento durante los T días considerados. El inventario inicial de cada marca es conocido y son Si unidades, mientras que el inventario inicial de productos finales es nulo. Dado que el horizonte de planificación no es muy largo, se considera que los costos de producción son fijos una vez conocida la demanda, por lo que el interés de la empresa es minimizar el inventario de productos finales y de productos genéricos en los estanques. Además, se sabe que se puede dejar demanda insatisfecha en un periodo, satisfaciéndola en alguno de los siguientes días. Sin embargo, ejecutivos de la empresa estiman que el costo de no satisfacer una unidad de demanda por un periodo es igual a W veces el costo de mantener una unidad de inventario un periodo (W>>1).

Desarrolle un modelo de programación lineal mixto que permita resolver el problema de Carboni-Cola Company, es decir decidir cuánto producir y almacenar de cada producto genérico y final en cada periodo, de modo de satisfacer la demanda durante el horizonte de planificación minimizando los inventarios y la demanda insatisfecha según sus costos relativos.

[1] Por ejemplo, algunas de las I marcas pueden ser Carboni-Cola, Fantabeliuk, Bucareite, etc, mientras que algunos de los J productos finales pueden ser Carboni-Cola de 500cc, Carboni-Cola de 1000cc, Fantabeliuk de 500cc, etc. (marca + tamaño/tipo envase).

<u>Solución</u>

Problema 1

<u>Variables:</u>

$$x_{ik}^t = \begin{cases} 1 & si\ se\ construye\ planta\ i\ con\ tecnolog\acute{\imath}a\ k\ en\ periodo\ t \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$$y_{ik}^t = cantidad\ producida\ por\ planta\ i\ con\ tecnolog\acute{\imath}a\ k\ en\ periodo\ t$$

$$w_{ij}^t = cantidad\ trasnportada\ de\ planta\ i\ a\ destino\ j\ en\ periodo\ t$$

$$z_1^t = cantidad\ exportada\ a\ precio\ PEXP_1^t\ en\ periodo\ t$$

$$z_2^t = cantidad\ exportada\ a\ precio\ PEXP_2^t\ en\ periodo\ t$$

<u>Restricciones:</u>

1. Naturaleza de las Variables:
2.

$$x_{ik}^t \in \{0,1\},\ y_{ik}^t, w_{ij}^t, z_1^t, z_2^t \geq 0 \quad \forall i, j, k, t$$

3. Cada planta se construye a lo más una vez y a lo más con una tecnología:

$$\sum_t \sum_k x_{ik}^t \leq 1 \quad \forall i$$

4. Capacidad de producción:

$$y_{ik}^t \leq CAP_k \cdot \sum_{\tau=1}^{t} x_{ik}^{\tau} \quad \forall i, k$$

5. Cantidad transportada:

$$\sum_j w_{ij}^t = \sum_k y_{ik}^t \quad \forall i, t$$

6. Demanda de Santiago:

$$\sum_i w_{i,STGO}^t = DSTGO^t \quad \forall t$$

7. Exportaciones:

$$z_1^t + z_2^t = \sum_i w_{i,VALPO}^t \quad \forall t$$

8. Definición de z_1^t, z_2^t:

$$z_1^t \leq EXP_1 \quad \forall t$$

$$z_2^t \leq EXP_F - EXP_1 \quad \forall t$$

<u>Función Objetivo:</u>

$$Max \sum_{t=1}^{T} \left\{ \begin{array}{l} PSTGO^t \cdot \sum_i w_{i,STGO}^t + PEXP_1^t \cdot z_1^t + PEXP_2^t \cdot z_2^t - \sum_i \sum_k CINV_{ik}^t \cdot x_{ik}^t \\ - \sum_i \sum_k COPER_{ik}^t \cdot y_{ik}^t - \sum_i \sum_j CTRANS_{ij}^t \cdot w_{ij}^t \end{array} \right\}$$

Problema 2:

Parámetros:

NH = duración de la jornada de trabajo en horas.

PM_{mi} = Producción/hora de la máquina m para el producto genérico i.

PL_{lj} = Producción/hora de la línea l para el producto final j.

D_{jt} = Demanda del producto final j en día t.

I_i = Inventario inicial producto genérico i.

S_{ij} = 1 si el producto final j puede ser producido con el producto genérico i. 0 si no.

TCG = tiempo que toma hacer un cambio de producto genérico.
TCF = tiempo que toma hacer un cambio de producto final.
W = costo relativo de dejar demanda insatisfecha en comparación a tener inventario.

Variables de decisión (1 pto.):

G_{mit} = 1 si el producto genérico i se produce en la máquina m el día t. 0 si no.

GX_{mit} = Producción del producto genérico i en la máquina m el día t.

GI_{it} = Inventario del producto genérico i (en estanque i) al final del día t.

F_{ljt} = 1 si el producto final j se envasa en la línea l el día t. 0 si no.

FX_{ljt} = Producción del producto final j en la línea l el día t.

FI_{jt} = Inventario del producto final j al final del día t.

B_{jt} = Demanda no satisfecha del producto final j al final del día t.

Aunque no es necesario, también se puede definir la variable:
E_{jt} = Cantidad enviada a los clientes del producto final j, el día t.

Función Objetivo (1 pto.):

$$MinZ = \sum_{i,t} GI_{it} + \sum_{j,t} (FI_{jt} + W \cdot B_{jt})$$

Restricciones (4 ptos.):

1) Naturaleza de las variables:

$$G_{mit}, F_{ljt} \in \{0,1\}$$

$$GX_{mit}, GI_{it}, FX_{ljt}, FI_{jt}, B_{jt}, E_{jt} \in N^*$$

Con i=1,…,I; j=1,..,J; m=1,…,M; l=1,…,L; t=0,1,…,T

Obs: El periodo t=0 es ficticio, y solo se utiliza para considerar el inventario inicial.

2) Solo se puede producir un producto genérico por día en cada máquina:

$$\sum_i G_{mit} \leq 1 \qquad \forall m \ \forall t \geq 1$$

3) Solo se puede embotellar un producto final por día en cada línea:

$$\sum_j F_{ljt} \leq 1 \qquad \forall l \ \forall t \geq 1$$

4) Capacidad de producción de maquina m para producto genérico i el día t:

$$GX_{mit} \leq NH \cdot PM_{mi} \cdot G_{mit} \qquad \forall m,i \ \forall t \geq 1$$

5) Capacidad de maquina m si se cambia de producto genérico:

$$GX_{mit} \leq NH \cdot PM_{mi} - TCG \cdot PM_{mi} \cdot \left(G_{mit} - G_{mi(t-1)}\right) \ \forall m,i \ \forall t \geq 2$$

Obs: Hasta aquí el supuesto implícito es que el primer día no se paga el tiempo de cambio. Si se supone lo contrario se agrega:

$$GX_{mi1} \leq NH \cdot PM_{mi} - TCG \cdot PM_{mi} \cdot G_{mi1}$$

6) Capacidad de envasado de la línea l para producto genérico k el día t:

$$FX_{ljt} \leq NH \cdot PL_{lj} \cdot F_{ljt} \qquad \forall l,j \ \forall t \geq 1$$

7) Capacidad de línea l si se cambia de producto final:

$$FX_{ljt} \leq NH \cdot PL_{lj} - TCF \cdot PL_{lj} \cdot \left(F_{ljt} - F_{lj(t-1)}\right) \qquad \forall l,j \ \forall t \geq 2$$

Obs: Análoga a 5)

8) Flujo de productos genéricos:

$$GI_{it} = GI_{i(t-1)} + \sum_m GX_{mit} - \sum_l \sum_j FX_{ljt} \cdot S_{ij} \qquad \forall i,t \geq 1$$

9) Flujo de productos finales:

$$FI_{j(t-1)} + \sum_{l} FX_{ljt} - B_{j(t-1)} = D_{jt} + FI_{jt} - B_{jt} \quad \forall j, t \geq 1$$

Equivalentemente, con la variable de envíos E_{jt} queda:

$$FI_{j(t-1)} + \sum_{l} FX_{ljt} = E_{jt} + FI_{jt} \qquad \forall j, t \geq 1$$

$$E_{jt} = D_{jt} + B_{j(t-1)} - B_{jt} \qquad \forall j, t \geq 1$$

10) Satisfacer la demanda en alguno de los periodos:

$$B_{jT} = 0 \qquad \forall j$$

11) Condiciones iniciales:

$$GI_{i0} = I_i \qquad \forall i$$

$$FI_{j0} = 0 \qquad \forall j$$

$$B_{j0} = 0 \qquad \forall j$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl