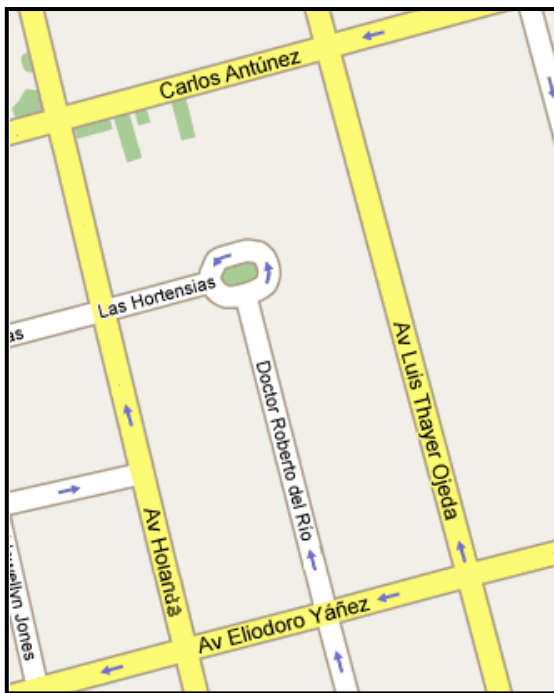


IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 8
17 de Junio, 2010

Problema 1

Nuestro buen amigo Danielillo necesita de su ayuda: Su madre le ha pedido que vaya a comprar el pan todos los días al negocio más cercano a su hogar. Danielillo siempre se ha cuestionado cuál es la ruta más corta desde su casa al negocio y, dado que ahora tendrá que hacer el recorrido a diario, le gustaría saber el camino óptimo a seguir. Debido a su alta carga de trabajo, Danielillo no es capaz de hacer un estudio detallado de su problema, por lo que le ha pedido a usted que se lo resuelva.

Usted sabe que su amigo vive en la esquina de Luis Thayer Ojeda con Eliodoro Yañez, y que el almacén queda en la esquina de Carlos Antunez con Holanda. Además, usted ya ha estimado previamente la distancia recorrida en cada una de las cuadras de interés, las que se resumen a continuación junto al mapa respectivo:



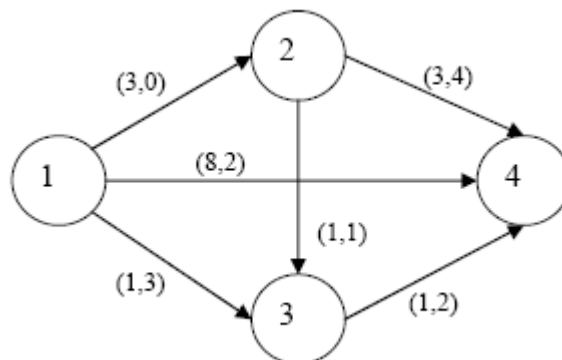
- Luis Thayer Ojeda, entre Carlos Antunez y Eliodoro Yañez: 350 metros
- Eliodoro Yañez, entre Luis Thayer Ojeda y Doctor Robert del Río: 100 metros
- Eliodoro Yañez, entre Doctor Roberto del Río y Holanda: 100 metros
- Holanda, entre Eliodoro Yañez y Las Hortensias: 200 metros
- Doctor Roberto del Río entre Eliodoro Yañez y Las Hortensias: 150 metros
- Las Hortensias, entre Doctor Roberto del Río y Holanda: 70 metros
- Holanda, entre las Hortensias y Carlos Antunez: 100 metros
- Carloz Antunez, entre Luis Thayer Ojeda y Holanda: 180 metros

Modele el problema como un grafo dirigido, indicando arcos y nodos y los costos asociados. Luego, encuentre la ruta más corta desde la casa de Danielillo a todas las esquinas mencionadas anteriormente, utilizando Dijkstra.

Problema 2

- a) Considere un juego en el que en cada jugada se pueden obtener 0, 2 o 3 puntos. Suponga que un jugador ha completado 11 puntos, queremos saber cuál es la mínima cantidad de jugadas en la que el jugador podría haber obtenido su puntaje. Modele el problema como un problema de camino más corto. Explique detalladamente qué representan los nodos y los arcos de la red, así como los costos de los arcos.
- b) Modifique el algoritmo Dijkstra (one to all) para que entregue las distancias mínimas desde todos los nodos a uno en particular (all to one).
- c) ¿Por qué el algoritmo Dijkstra requiere costos no-negativos en sus arcos? Explique su respuesta.
- d) Sea un grafo $G(N,A)$, en el cual se definen 2 parámetros para cada arco en A , (c_{ij}, b_{ij}) que corresponden al costo y al gasto de cierto recurso (piense en gasolina, por ej.) al ir de i a j , respectivamente. Suponga que se dispone de R unidades del recurso y se desea encontrar la ruta de mínimo costo entre el nodo 1 y n , sin agotar el recurso. Modele la siguiente instancia como un problema de flujo en redes, para ello defina un grafo apropiado y especifique nodos, arcos y costos.

$R=4$ y G es:

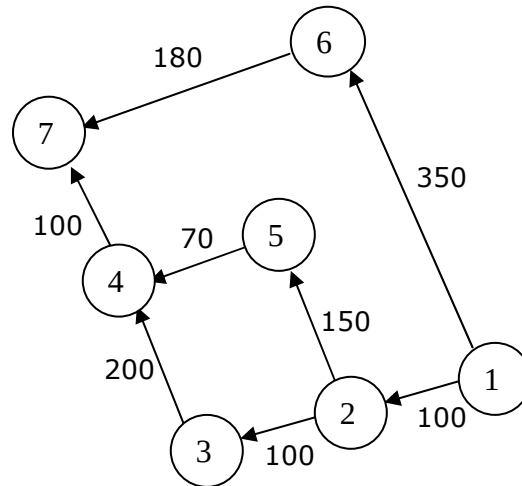


Solución

Problema 1

Primero, debemos construir la red. Las calles serán representadas por arcos, las esquinas por nodos y las distancias serán los costos de los arcos. Con este esquema, podemos usar Dijkstra para calcular la ruta más corta desde un nodo a todos los otros de la red, i.e. desde una esquina a todas las otras.

El grafo queda:



Inicialización:

- $\Pi(1)=0$
- $\Pi(i)=+\infty \quad \forall i \neq 1$
- $P(1)=1$
- $S=\emptyset$

Iteración 1:

- $S=\{1\}$
- ¿ $\Pi(2) > \Pi(1)+100$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(2)=\Pi(1)+100=100$
- $P(2)=1$
- ¿ $\Pi(6) > \Pi(1)+350$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(6)=\Pi(1)+350=350$
- $P(6)=1$

Iteración 2:

- $S=\{1,2\}$
- ¿ $\Pi(3) > \Pi(2)+100$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(3)=\Pi(2)+100=200$
- $P(3)=2$
- ¿ $\Pi(5) > \Pi(2)+150$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(5)=\Pi(2)+150=250$
- $P(5)=2$

Iteración 3:

- $S=\{1,2,3\}$
- ¿ $\Pi(4) > \Pi(3)+200$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(4)=\Pi(3)+200=400$
- $P(4)=3$

Iteración 4:

- $S=\{1,2,3,5\}$
- ¿ $\Pi(4) > \Pi(5)+70$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(4)=\Pi(5)+70=320$
- $P(4)=5$

Iteración 5:

- $S=\{1,2,3,5,4\}$
- ¿ $\Pi(7) > \Pi(4)+100$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(7)=\Pi(4)+100=420$
- $P(7)=4$

Iteración 6:

- $S=\{1,2,3,5,4,6\}$
- ¿ $\Pi(7) > \Pi(6)+180$? NO, así que no actualizamos nada y seguimos.

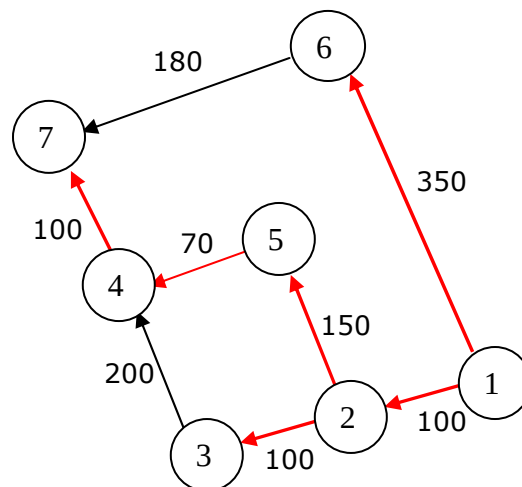
Iteración 7:

- $S=\{1,2,3,5,4,6,7\}$

Como ya entraron todos los nodos, termina el algoritmo (no se hace nada en esta iteración).

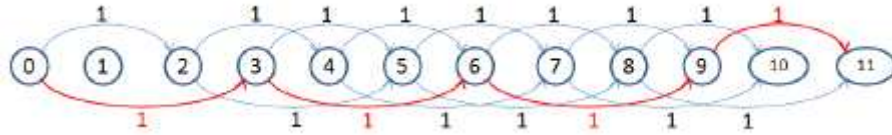
Noten que el número de iteraciones es igual al número de nodos, siempre (pues va entrando un nodo a S en cada iteración).

Gráficamente, la solución queda:



Problema 2:

- a) Considere una red con nodos que van del 0 al 11, que corresponden a los puntajes obtenidos por el jugador. Los arcos de la red tienen costo igual a 1 y corresponden a una jugada factible, por lo que desde cada nodo i (excepto 1) salen dos arcos, uno que avanza dos nodos (2 puntos) y uno que avanza tres nodos (3 puntos). La red considerada se expone a continuación:



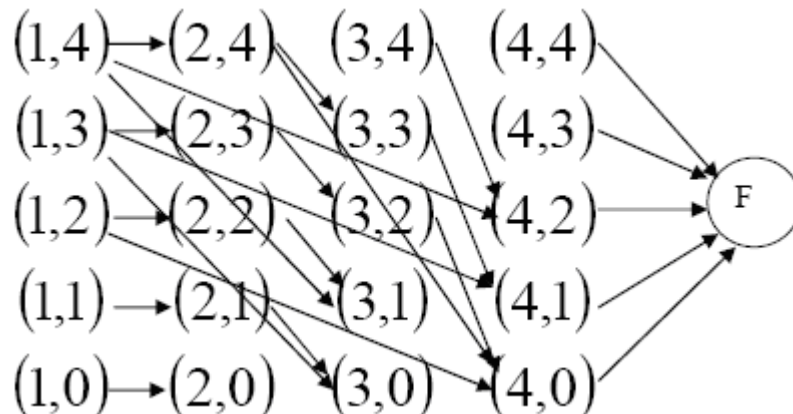
Se observa que la solución de la ruta más corta corresponde precisamente a las 4 jugadas que son el mínimo necesario para alcanzar los 11 puntos requeridos.

- b) Queremos encontrar la ruta mínima desde cualquier nodo i al nodo n , luego basta con comenzar el algoritmo desde n y revisar los arcos hacia atrás, de la misma forma que el algoritmo original. Noten que en la prueba tendrían que reescribir el algoritmo, pues eso era lo que se pedía. El algoritmo queda igual que en los apuntes, pero tienen que poner que el punto inicial es el nodo n e inicializar desde ahí.
- c) Porque el algoritmo podría no encontrar la ruta más corta. Por ejemplo, en una red de 3 nodos, donde hay un camino de 1 al 3 de longitud 2, de 1 al 2 de longitud 3 y otro de 2 al 3 de longitud -2, Dijkstra no encuentra la ruta más corta de 1 a 3; encuentra el camino de longitud 2 (camino 1 $\rightarrow$ 2) y no el de longitud 1 (camino 1 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 2). ¡Resuelvan con dijkstra y vean que efectivamente ocurre esto! Esto se da porque en la última iteración no se alcanza a actualizar el costo de llegar al nodo 2 antes de finalizar el algoritmo.

- d) Definimos un nuevo grafo $G'(N', A')$, donde:

- o $N' = \{(n, r) / n \in N, r \in \{0, 1, \dots, R\}\} \cup \{F\}$, es decir, el par (n, r) nos indica en qué nodo estamos parados en el grafo original, y cuántas unidades de recursos nos quedan). El nodo F es un nodo artificial que se agrega a este problema (después se explica).
- o $A' = \{((n_1, r_1), (n_2, r_2)) / (n_1, n_2) \in A \wedge r_1 - b_{n_1, n_2} = r_2\} \cup \{((N, r), F), r \in \{0, 1, \dots, R\}\} \cup \{F\}$.
- o $c'((n_1, r_1), (n_2, r_2)) = c(n_1, n_2)$, $c'((N, r), F) = 0$

El grafo queda:



Ahora se puede resolver este nuevo grafo, partiendo desde el nodo (1,4), con Dijkstra por ejemplo, para encontrar las rutas mínimas. Si revisamos la distancia desde (1,4) hasta (F), encontraremos el camino óptimo en el problema original. Cabe destacar que no es necesario dibujar todos los nodos de arriba, pues hay varios que no son factibles dados nuestra definición de N' y A' (por ejemplo, nunca estaremos en (1,3), (1,2), etc.). Estos fueron dibujados sólo por si ayudan a visualizar la definición. En estricto rigor, sólo basta con los nodos que sí se ajustan al problema original.

Notar que si no se agrega el nodo artificial F, habría que correr dijkstra y luego ver cuál de los nodos (4,r) tiene el menor costo para decidir cuál es el camino mínimo. Al agregar el nodo F y los arcos de costo cero desde todos los nodos (4,r) a F, estamos eliminando ese "problema", pues ahora basta con mirar el costo de F para saber cuál de los nodos (4,r) tenía el costo mínimo.

Por último, nos pedían modelar el problema como un problema de flujo en redes, por lo que en realidad hablar de usar dijkstra no era válido como respuesta para esta pregunta. El modelo en cuestión es el típico:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \sum_{(i,j) \in A'} x_{ij} c'_{ij} \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{j \in O(i)} x_{ij} - \sum_{j \in D(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = (1,4) \\ -1 & \text{si } i = F \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
 & \quad x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A'
 \end{aligned}$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl