INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Daniel Espinoza, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Control 3
10 de Junio, 2010

Problema 1:

1) (1 pto.) ¿Qué debe ocurrir en un problema primal para que los valores de las variables duales correspondan al valor marginal de las restricciones (para perturbaciones pequeñas)?. Dé un ejemplo en R^2 donde esto se cumpla.

2) (1 pto.) ¿Qué debe ocurrir para que el valor dual asociado a una restricción sea no nulo, pero que al aumentar el lado derecho de la misma (estrictamente) la solución optima no cambie? (es decir, la variable dual no es el beneficio marginal de aumentar esa restricción)

3.a) **Sólo sección Daniel Espinoza:**

(1 pto.) Dé un ejemplo de un problema donde el valor óptimo primal sea menor estricto que el valor óptimo dual.

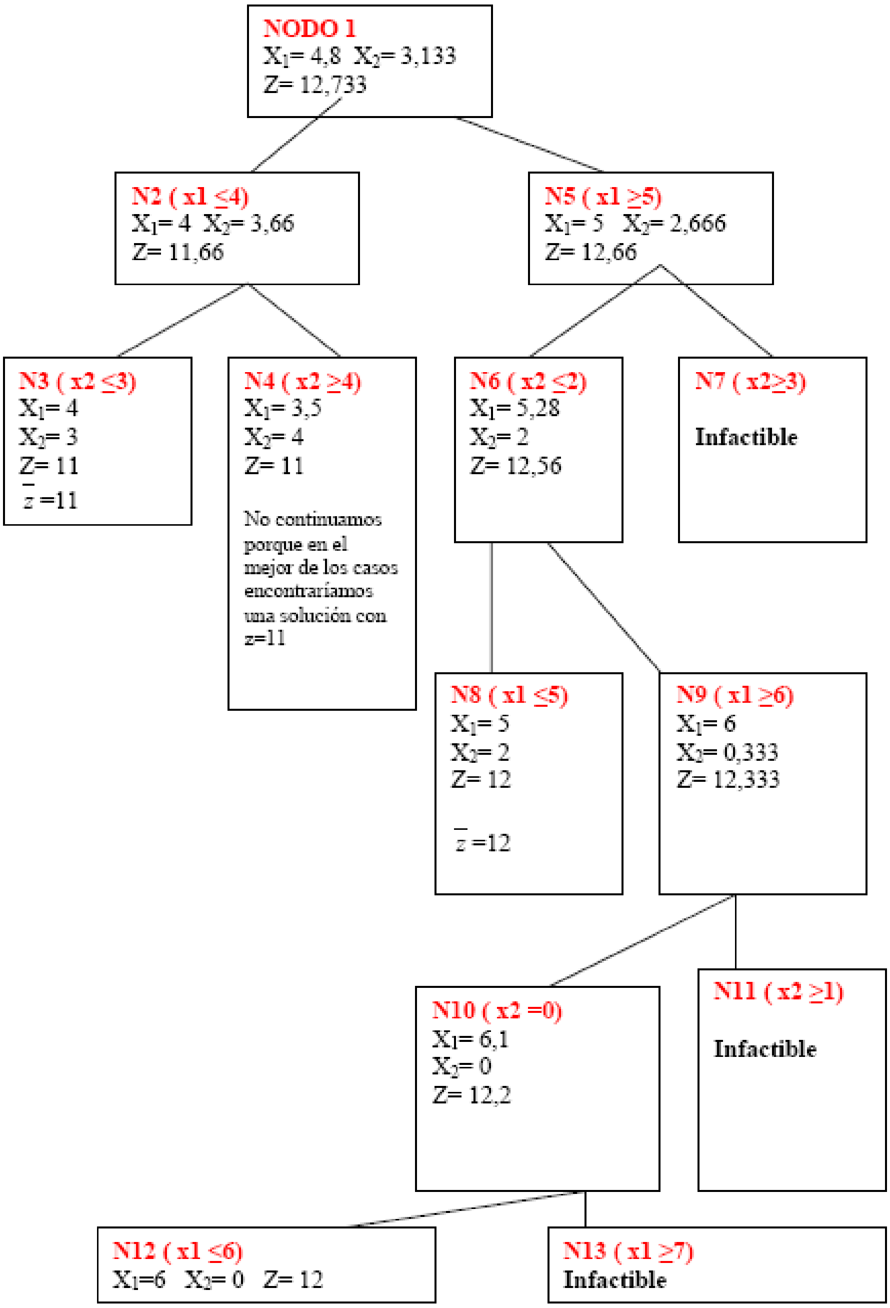
3.b) **Sólo sección Rodrigo Wolf, Fernanda Bravo:**

(1 pto.) Usted ya solucionó un problema, cuando se entera que un parámetro del vector del lado derecho (b_i) cambia. Al hacer análisis de sensibilidad de la solución que ya tenía, ve que el problema se torna infactible. ¿Qué haría usted para continuar usando simplex desde el punto en donde quedó, y no volver a partir de cero?

4) (1 pto.) Una empresa lo contrató para que modelar uno de sus procesos. Usted llevó a cabo esta tarea usando modelos lineales. Uno de los parámetros más relevantes de su problema es el precio del combustible por los próximos 3 años. Usted ya encontró la solución del problema, sin embargo, sabe que ante pequeñas variaciones en el precio futuro del combustible esta pierde validez y se torna en una muy mala solución. Por otro lado, existe otra solución que no es la óptima para los parámetros del problema, pero que se comporta mucho mejor ante variaciones del precio del combustible. ¿Cuál de las dos soluciones usaría y por qué? (máximo 5 lineas)

5) (1 pto.) Dé un ejemplo donde el valor óptimo de un problema de programación entera es estrictamente menor que el valor de la relajación lineal correspondiente.

6) (1 pto.) Sea el siguiente árbol de B&B resultante de un problema de optimización. ¿Es este un problema de minimización o maximización? ¿Por qué? Explique el orden, de 2 posibles formas, en que se fueron creando los nodos del problema. Argumente su respuesta. Si alguna de las formas que explica es a lo ancho o en profundidad, coméntelo.


NODO 1
X_1= 4,8 X_2= 3,133
Z= 12,733
N2 (x1 $\leq$4)
X_1= 4 X_2= 3,66
Z= 11,66
N5 (x1 $\geq$5)
X_1= 5 X_2= 2,666
Z= 12,66
N3 (x2 $\leq$3)
X_1= 4
X_2= 3
Z= 11
$\bar{z}$ =11
N4 (x2 $\geq$4)
X_1= 3,5
X_2= 4
Z= 11
No continuamos porque en el mejor de los casos encontraríamos una solución con z=11
N6 (x2 $\leq$2)
X_1= 5,28
X_2= 2
Z= 12,56
N7 (x2$\geq$3)
Infactible
N8 (x1 $\leq$5)
X_1= 5
X_2= 2
Z= 12
$\bar{z}$ =12
N9 (x1 $\geq$6)
X_1= 6
X_2= 0,333
Z= 12,333
N10 (x2 =0)
X_1= 6,1
X_2= 0
Z= 12,2
N11 (x2 $\geq$1)
Infactible
N12 (x1 $\leq$6)
X_1=6 X_2= 0 Z= 12
N13 (x1 $\geq$7)
Infactible

Problema 2:

(7 ptos.) La multinacional CHRONO & CO, líder en retail a nivel mundial, está a punto de inaugurar una nueva red de K supermercados en la región metropolitana. Para hacerlo, la empresa primero debe decidir cuántos productos mantener en sus góndolas mes a mes, para satisfacer las necesidades de los clientes y a su vez maximizar sus utilidades.

La empresa puede ofrecer N productos distintos, los que se dividen en dos categorías: perecibles y no perecibles. Dadas las características de los productos perecibles $P \subset N$, éstos son enviados desde los productores directamente hacia las góndolas de los supermercados, donde se mantienen por un período de un mes, y si no se venden son desechados. En cambio, para el conjunto de productos no perecibles $NP \subset N$, se cuenta con una bodega central, donde éstos se pueden almacenar. Todos los productos no perecibles se envían directamente a la bodega, desde donde se pueden despachar a las góndolas del supermercado en el mismo período, o bien en períodos posteriores (la bodega está actualmente vacía). Los productos no perecibles no tienen fecha de vencimiento, por lo que se pueden mantener en góndola por varios períodos hasta ser vendidos.

Considere que, por contrato, la empresa debe pedir una cantidad mínima MIN_P de cada producto perecible, todos los meses. A su vez, la empresa no puede pedir más de MAX_N de cada producto en un mes (perecible o no), por temas de capacidad de producción.

Dado el layout de sus distintos supermercados, se sabe que como máximo se pueden tener CAP_{nk} unidades de producto n por periodo dentro del supermercado k. Adicionalmente, la empresa puede decidir ampliar un supermercado después de un año de la inauguración, lo que aumentará su capacidad en una fracción A_k fija para todos los productos[1]. Sólo puede ampliar una vez cada supermercado, a un costo de CA_{kt}

La ciudad está dividida en S zonas, cada una de las cuales tienen un tipo determinado de cliente, de tal forma que un cliente solo comprará en un supermercado de su zona. Sea Z_s el conjunto de locaciones para un supermercado ubicadas en la zona S. La demanda ha sido estimada en d_{snt}, por lo que se debe contar en cada período con una cantidad suficiente de productos para satisfacerla.

Considere que el costo por producto es de CV_{nt}, el costo de mantener una unidad de producto en el supermercado es de CM_{nk}, por almacenarlo en bodega es de CB_n, por transportar unidades del producto n desde la bodega a las góndolas es de CG_{nk}. Sabiendo que puede vender cada producto a G_n, formule un modelo de programación lineal entera, que le permita decidir qué productos mantener en la bodega y en las góndolas, para maximizar sus utilidades durante los próximos T meses.

[1] A_k es un número entre 0 y 1.

Pauta

Problema 1:

1) Esto se cumple siempre que el problema **no** sea degenerado (0,5 ptos.). Cualquier ejemplo bajo esta condición sirve, por ejemplo:

El primal:

$$\begin{aligned} \max\ & z = 3x_1 + x_2 \\ s.a.:\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Su dual es:

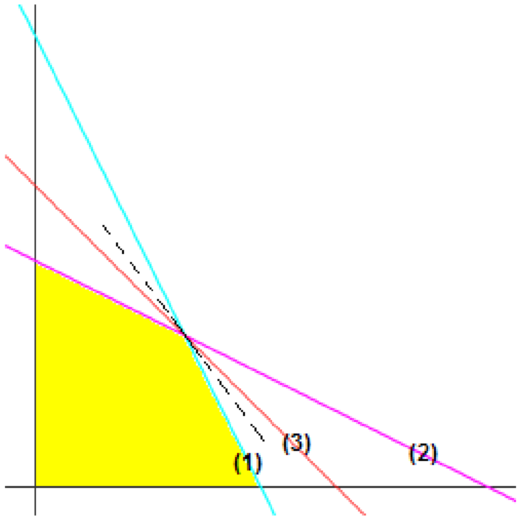
$$\begin{aligned} \min\ & w = 20y_1 + 2y_2 \\ s.a.:\ & 4y_1 + 1y_2 \geq 3 \\ & 5\,y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Nota de corrección: *Fijarse que el ejemplo no sea degenerado. Cualquier otro está ok siempre que pongan bien el dual. 0,5 ptos el ejemplo si está todo bien.*

2) Este es el caso complementario a la parte 1). Se puede dar esta situación si el problema primal es degenerado **en el óptimo**. En tal caso, se tiene un número de restricciones en el punto que es mayor al número de dimensiones del problema, por lo que el punto está sobredeterminado. Si se incrementa el valor del lado derecho de una de las restricciones activas en el óptimo, el valor de la función objetivo no cambiará (pues el óptimo es el mismo que antes, el punto era degenerado), por lo que en este caso la variable dual no representa el beneficio marginal de aumentar la capacidad de la restricción. OJO: Esto no ocurre con TODAS las restricciones activas, sino que sólo con algunas. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max\ & z = 3/2x_1 + x_2 & \\ s.a.:\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 & (1) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 & (2) \\ & x_1 + x_2 \leq 8/3 & (3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

El gráfico queda:



El punto óptimo (4/3,4/3) es degenerado, y se ve claramente que si incrementamos el lado derecho de las restricciones (2) o (3), el óptimo no cambiará (para verlo, imaginen que trasladan una de esas curvas hacia la derecha, que es equivalente a incrementar el lado derecho). Sin embargo, si incremento el lado derecho de la restricción (1), el óptimo sí cambiará.

Nota de corrección: *En esta parte no se pedía un ejemplo, es sólo para efectos explicativos. Por decir que el punto óptimo debe ser degenerado dar 0,5 ptos. Por decir además que no todas las restricciones activas en el óptimo se pueden alterar, dar otros 0,5 ptos. Para ello, probablemente necesiten dar un ejemplo como el de arriba, pero si lo pueden explicar en palabras también está ok.*

3.a) Aquí sirve cualquier ejemplo donde tanto el primal como el dual son infactibles (esto lo discutieron en cátedra). Por ejemplo:

El primal:

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 \\ s.a.\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \text{ irrestricto} \end{aligned}$$

Su dual:

$$\begin{aligned} \min\ & 3y_1 + 4y_2 \\ s.a.\ & y_1 + 2y_2 = 1 \\ & y_1 + 2y_2 = 2 \\ & y_1, y_2 \text{ irrestricto} \end{aligned}$$

Ambos problemas son infactibles. Se tiene que $-\infty = Z_p < Z_d = \infty$.

Nota de corrección: *Con un ejemplo basta, no es necesario explicar el caso general.*

3.b) Nos pasamos al dual. El cambio en b_i no altera factibilidad en el dual, así que resolvemos éste y luego volvemos al primal.

4) La solución **no** optima para el escenario base, porque el precio del combustible es muy volátil, luego las proyecciones tienen muchas chances de tener errores. Esta respuesta tiene 1 pto.

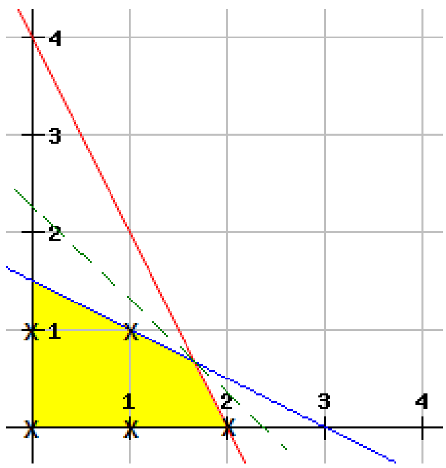
Si alguien llegase a contestar que elige el óptimo, pero especifica que existe el riesgo antes señalado y dice que prefiere correrlo, poner 0,75 ptos (no se lleva el puntaje completo pues la decisión debería tomarla la empresa).

Si comenta que existe el riesgo anterior y señala que le preguntaría a la empresa o bien pone como supuesto que la empresa prefiere correr el riesgo, poner 1 punto.

5) Cualquier problema de maximización donde el óptimo relajado no sea entero sirve. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= x + y \\ \text{s.a.} \quad & x + 2y \leq 3 \\ & 2x + y \leq 4 \\ & x, y \text{ enteros} \end{aligned}$$

Al relajar las variables X e Y (es decir, ahora las variables pueden tomar valores en los reales), el óptimo es X=12,34; Y=3,66; Z=55,32. Gráficamente:



La solución entera del problema original debe ser menor (estricto) que el del problema relajado, pues el problema original es más restrictivo. Se debe notar que el problema original exige que las variables sean enteras, lo que implica que sólo los puntos enteros en la región amarilla en el gráfico (indicados con una cruz) son puntos factibles. Claramente, con cualquiera de estos puntos se obtiene un valor menor para la función objetivo.

***Nota de corrección**: Se pide explícitamente un ejemplo. No hace falta graficar, siempre que argumenten bien. Si alguien pone el caso general (max c*x s.a. A*x<=b), también es válido pero sólo si puso que el óptimo del relajado no puede ser entero, sino no lleva puntaje.*

6) Es un problema de maximización, pues los nodos van disminuyendo su valor objetivo a medida que descendemos en el árbol (i.e. a medida que agregamos restricciones, el valor de la función objetivo decrece, lo que indica un problema de maximización. En un problema de minimización ocurriría lo contrario). (0,2 ptos.)

Para lo siguiente, la idea es que argumenten bien cuando se detiene el algoritmo y por qué. Se deben explicar 2 formas para llegar a la configuración dada:

- Una forma posible para llegar a esta configuración es resolviendo en profundidad. Los nodos en este caso se visitaron en el siguiente orden: 1,2,3 (se detuvo porque llegó a un nodo con variables enteras),4 (se detuvo porque Z del nodo es igual al incumbente, no se podrán obtener mejores soluciones al ramificarlo),5,6,8 (se detuvo porque llegó a un nodo con variables enteras),9,10,12 (se detuvo porque llegó a un nodo con variables enteras),13 (se detuvo por ser un nodo infactible),11 (se detuvo por ser un nodo infactible), 7 (se detuvo por ser un nodo infactible). (0,4 ptos.)

- Otra forma posible es ramificar a lo ancho. 1, 2, 5, 3 (solución entera), 4 (Z peor que incumbente), 6, 7 (infactible), 8 (solución entera), 9, 10, 11 (infactible), 12 (solución entera), 13 (infactible). (0,4 ptos.)

Problema 2:

Nota de corrección: *En esta pregunta pueden sacarse un 8.*

Variables de decisión: (0.2 ptos. c/u)

$$Y_{kt} = \begin{cases} 1 & \text{Si agrando supermercado k en t} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$P_{nkt} =$ Cantidad de productos perecibles $n \in P$ en el supermercado k en el período t

$NP_{nkt} =$ Cantidad de producto no perecibles $n \in NP$ en el supermercado k en t.

$NPG_{nkt} =$Cantidad de productos no perecibles $n \in NP$ enviado al supermercado k en el período t (desde la bodega)

$NPB_{nt} =$ Cantidad de productos no perecibles $n \in NP$ enviado (a la bodega desde productores) en el período t

$VNP_{nkt} =$ Unidades vendidas de producto no perecibles $n \in NP$ en supermercado k en t

$I_{nt} =$ Inventario de producto n en el período t

Restricciones:

1) Ampliar máximo una vez (ojo con los límites de la sumatoria): (0,6 ptos.)

$$\sum_{p=13}^{t} Y_{kp} \leq 1 \qquad \forall k, t > 12$$

2) Capacidad de las góndolas (ojo con los límites de la sumatoria): (0,4 ptos. c/u)

$$P_{nkt} \leq (A_k * \sum_{p=1}^{t} Y_{kp} + 1) * CAP_{nk} \qquad \forall n \in P, k, t$$

$$NP_{nkt} \leq (A_k * \sum_{p=1}^{t} Y_{kp} + 1) * CAP_{nk} \qquad \forall n \in NP, k, t$$

3) Conservación de flujo en la bodega (inventario): (0,6 ptos.)

$$I_{nt} = I_{n(t-1)} + NPB_{nt} - \sum_{k} NPG_{nkt} \qquad \forall n \in NP, t$$

4) Conservación de flujo de productos No Perecibles en góndola: (0,6 ptos.)

$$NP_{nkt} = NP_{nk(t-1)} + NPG_{nkt} - VNP_{nkt} \qquad \forall n \in NP, k, t$$

5) Pedido mínimo y máximo a los productores: (0,2 ptos. c/u)

$$\sum_{k=1}^{K} P_{nkt} \geq MIN_n \qquad \forall n \in P, t$$

$$\sum_{k=1}^{K} P_{nkt} \leq MAX_n \qquad \forall n \in P, t$$

$$NPB_{nt} \leq MAX_n \qquad \forall n \in NP, t,$$

6) Satisfacer la demanda: (0,4 ptos. c/u)

$$\sum_{k \in Zs} P_{nkt} \geq d_{snt} \qquad \forall n \in P, s \in S$$

$$\sum_{k \in Zs} VNP_{nkt} \geq d_{snt} \qquad \forall n \in NP, s \in S, t$$

7) Condición inicial (la bodega debe partir vacía): (0,3 ptos.)

$$I_{nk0} = 0 \qquad \forall n, k$$

8) Naturaleza de las variables: (0.3 ptos.)

$$Y_{kt} \in \{0,1\}$$

$$P_{nkt}, NP_{nkt}, NPG_{nkt}, NPB_{nt}, VNP_{nkt}, I_{nt} \in \mathrm{N}$$

Función objetivo: (1 pto.)

$$\max\{\sum_{n,k,t}(P_{nkt} + VNP_{nkt})G_n - \sum_{k,t}(CI_k X_k + CA_k Y_{kt}) - \sum_{n \in P,k,t} CV_{nt} P_{nkt} - \sum_{n \in NP,t} CV_n NPB_{nt} +$$
$$- \sum_{n,k,t} CM_{n,k}(P_{nkt} + NP_{nkt}) - \sum_{n,k,t}(CG_{nk} NPG_{nkt}) - \sum_{n,t} CB_n I_{nt}\}$$

Nota de corrección: *También se considerará válido si en la función objetivo multiplican el ingreso por la demanda en vez de las variables P y VNP. En tal caso, también es correcto minimizar sólo los costos, pues los ingresos serían constantes.*

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl