INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores:	Fernanda Bravo, Daniel Espinosa, Rodrigo Wolf
Coordinador:	Daniel Lillo
Auxiliares:	Víctor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 7
Jueves 3 de Junio 2010

Problema 1 (Análisis de Sensibilidad)

Considere el problema (P):

$$\begin{gathered} \max c_1x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 3x_1 - x_2 \leq b_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Encuentre los rangos en que pueden variar c_1 y b_2 para que el óptimo se encuentre en la intersección de ambas restricciones.

Problema 2 (Análisis de Sensibilidad)

Considere el clásico problema de combinación de productos sujeto a restricciones de disponibilidad de recursos:

$$\begin{gathered} \max x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \leq 100 \\ x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

1. Realice un análisis de sensibilidad para el vector del lado derecho de las restricciones.
2. Realice un análisis de sensibilidad para el vector de coeficientes de la función objetivo.
3. Suponga que se evalúa la posibilidad de fabricar un nuevo producto x_{nuevo} de modo que el problema queda descrito como:

$$\begin{gathered} \max x_1 + 3x_2 + x_{nuevo} \\ x_1 + 4x_2 + 5x_{nuevo} \leq 100 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_{nuevo} \leq 60 \\ x_1 + x_2 + 2x_{nuevo} \leq 50 \\ x_1, x_2, x_{nuevo} \geq 0 \end{gathered}$$

¿Sigue siendo óptima la solución del problema?

Hint: En el óptimo, la base esta formada por las variables x1, x2 y x5, en donde se han asignado las variables x3, x4 y x5 como holgura de las restricciones según el orden enunciado.

Problema 3 (Branch & Bound)

El auxiliar del curso de optimización de una prestigiosa universidad ha sido invitado a un asado de fin de año, para celebrar el fin de las clases, junto al cuerpo docente y los alumnos del curso. Este personaje cuenta con un automóvil, un notebook, 6 parlantes y 3 cuchillos que podría llevar al evento, cada uno de los cuales le entrega cierta utilidad si los lleva. Sin embargo, este personaje es famoso por cuidar demasiado sus pertenencias y considera arriesgado llevarlas al asado. Por esta razón, ha asignado un valor al riesgo unitario en que incurre llevando cada objeto, el cual se muestra en la siguiente tabla, junto con la utilidad unitaria que recibe si lo lleva y el máximo riesgo total que está dispuesto a correr:

Índice	Objeto	Tiene	Utilidad	Riesgo
1	Auto	1	40	90
2	Parlantes	6	5	20
3	Cuchillos	3	15	10
4	Notebook	1	25	40
Máximo Riesgo Admisible: 150				

Dado su amplio conocimiento en el campo de la optimización, se ha dado cuenta de que puede modelar esta situación como una pequeña adaptación del famoso Problema de la Mochila y así poder decidir qué objetos y cuántos de ellos llevar al asado de manera de obtener la máxima utilidad posible:

a) Escriba la relajación lineal del problema (P)
b) ¿Existe alguna forma simple de obtener la solución óptima del problema relajado, sin realizar ningún algoritmo?, ¿cómo es? Resuelva mediante este método el problema (P).
c) Resuelva el problema utilizando el algoritmo Branch & Bounds, resolviendo cada nodo mediante el método desarrollado en b).

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Daniel Espinosa, Rodrigo Wolf
Coordinador: Daniel Lillo
Auxiliares: Víctor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Pauta Auxiliar 7
Jueves 3 de Junio 2010

Problema 1

Escribiendo (P) en forma estándar:

$$\begin{gathered} Min - c_1x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = b_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{gathered}$$

Si el óptimo se encuentra en la intersección de las restricciones, entonces las variables de holgura son nulas, y por lo tanto, no están en la base, luego: $x_B = \{x_1, x_2\}$ y $x_R = \{x_3, x_4\}$.

Entonces: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 + b_2 \\ 15 - b_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Luego: $b_2 \leq 15 \; y \; b_2 \geq -5$ para mantener la factibilidad.

$$\bar{R} = B^{-1}R = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando los costos reducidos:

$$\begin{aligned} \overline{c_R} &= c_R - c_B\bar{R} \\ &= (0 \quad 0) - (-c_1 \quad -1)\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}(c_1 + 3 \quad c_1 - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Luego: $c_1 \geq -3 \; y \; c_1 \geq 1$ para mantener la optimalidad.

Por lo tanto, $b_2 \epsilon [-5{,}15] \; y \; c_1 \epsilon [1, \infty)$ para que la base siga siendo óptima.

Problema 2

Primero, pasamos el problema a su forma estándar:

$$\begin{aligned} min\; z = \; & -x_1 + \; -3x_2 \\ s.t.\; & x_1 + 4x_2 + x_3 = 100 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 60 \\ & x_1 + x_2 + +x_5 = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \; \geq 0 \end{aligned}$$

Además nos dicen que la solución óptima, está conformada por la base de x1, x2 y x5, luego:

$$A_B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ante variaciones del vector b, solo necesitamos analizar factibilidad, es decir, $B^{-1}b \geq 0$.

$$A_B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Se podría hacer un análisis general que conlleva a generar espacios de soluciones, pero en vez de eso haremos un análisis ceteris paribus (dejando todos los parámetros constantes menos uno).

<u>Para b_1:</u>

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 + 120 \\ \frac{b_1}{2} - 30 \\ \frac{b_1}{2} - 40 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Entonces tenemos que:

$$-b_1 + 120 \geq 0 \implies b_1 \leq 120$$

$$\frac{b_1}{2} - 30 \geq 0 \implies b_1 \geq 60$$

$$\frac{b_1}{2} - 40 \geq 0 \implies b_1 \geq 80$$

Entonces intersectando las soluciones de esas tres ecuaciones se concluye que ante variaciones de b_1, se mantiene la factibilidad de la solución si:

$$80 \leq b_1 \leq 120$$

<u>Para b_2:</u>

El procedimiento es el mismo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ b_2 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 + 2b_2 \\ 50 - \frac{b_2}{2} \\ 50 - \frac{3b_2}{2} + 500 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

y se obtiene que:

$$50 \leq b_2 \leq \frac{200}{3}$$

Para b_3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100+120 \\ 50-30 \\ 50-90+b_3 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Y se tiene que:

$$b_3 \leq 40 \blacksquare$$

2. Para variaciones en el vector de costo solo se debe ver que ante variaciones de este, se mantenga la condición de optimalidad, es decir que los costos reducidos sean mayores que cero.

Para c_1:

Como x_1 es básica, entonces tenemos que considerar todos los costos reducidos

$$\begin{aligned} (\bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (c_3, c_4) - (c_1, c_2, c_5)\, \mathrm{A_B^{-1}}\mathrm{A_N} \\ &= (0,0) - (-c_1, -3, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0,0) - (-c_1, -3, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \\ &\models -(c_1 - 3/2, -2c_1 + 3/2) \geq (0,0) \end{aligned}$$

Entonces para mantener optimalidad se tiene que (ceteris paribus):

$$\frac{3}{4} \leq c_1 \leq \frac{3}{2}$$

Para c2:

Nuevamente x2 es básica, entonces tenemos que considerar todos los costos reducidos:

$$\begin{aligned} (\bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (c_3, c_4) - (c_1, c_2, c_5)\, \mathrm{A_B^{-1}}\mathrm{A_N} \\ &= (0,0) - (-1, -c_2, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0,0) - (-1, -c_2, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \\ &= -(1 - \frac{c_2}{2}, -2 + \frac{c_2}{2}) \geq (0,0) \end{aligned}$$

Entonces:

$$2 \leq c_2 \leq 4$$

Obs: Análisis para c3, c4 y c5 no tienen sentido para este problema pues las variables asociadas son las de holgura. De todas formas, el procedimiento es análogo (con la diferencia que cuando es variable no básica podrían hacerse menos cálculos).

3. Adelantando un poco, este problema cabe dentro de análisis post-optimal pues veremos cual es nuevo óptimo para una variación dada del los parámetros del problema. Claramente la incorporación de este nuevo producto, como no se esta produciendo ($x_{nuevo} = 0$), no viola la factibilidad del problema. Luego, sólo tenemos que verificar la optimalidad:

$$\begin{aligned}(\bar{c}_{nuevo}, \bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (-1,0,0)(-1,-3,0)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -(3,1/2,1/2) \geq (0,0)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la base sigue siendo óptima.

Problema 3

a) Relajación Lineal:

$$\begin{aligned}&(P0)\ Max\ z = 40x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 25x_4 \\ &s.a.\quad 90x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 40x_4 \leq 150 \\ &\qquad x_2 \leq 6, \quad x_3 \leq 3 \\ &\qquad x_1, x_4 \in [0,1] \quad x_2, x_3 \in R_0^+\end{aligned}$$

b) La forma más sencilla de resolver el problema de la mochila relajado es rankear los objetos según la razón Beneficio-Capacidad, que en este caso es la razón Utilidad-Riesgo.

Índice	Objeto	Tiene	Utilidad	Riesgo	Razón Utilidad / Riesgo
1	Auto	1	40	90	0,44
2	Parlantes	6	5	20	0,25
3	Cuchillos	3	15	10	1,5
4	Notebook	1	25	40	0,63
Máximo Riesgo Admisible: 150					

Luego, se llevan, en primer lugar, todos los cuchillos que se pueda, es decir 3, utilizando 30 unidades de riesgo. En segundo lugar se agrega el notebook, con lo que sólo restan 80 unidades de riesgo. Luego se agrega el auto, pero como "no cabe" entero, se agregan sólo 8/9 del auto, para satisfacer la restricción de riesgo. Con esto queda la siguiente solución:

$$x_1 = 8/9, \quad x_3 = 3$$
$$x_2 = 0, \quad x_4 = 1$$

c) Inicialización: Se inicializa el **incumbente** (mejor solución entera encontrada hasta ahora) en $\bar{z} = -\infty$.

P0: Se utiliza el problema relajado (P0) y se resuelve con el método desarrollado en b) llegando a una solución no entera en x_1. Luego se ramifica en $x_1 = 0$ y $x_1 = 1$, ya que son sus únicas opciones.

P1: Se resuelve, del mismo modo P1, que es igual a P0, pero con la restricción $x_1 = 0$, obteniéndose una solución entera. Luego, actualizamos el incumbente $\bar{z} = 90$. Este nodo no se sigue ramificando, ya que, al agregar más restricciones siempre se llega a soluciones peores o iguales a la anterior.

P2: Ahora se resuelve P2, que es igual a P0, pero con la restricción $x_1 = 1$, obteniéndose una solución no entera en x_4. Luego, ramificamos en $x_4 = 0$ y $x_4 = 1$, ya que son sus únicas opciones.

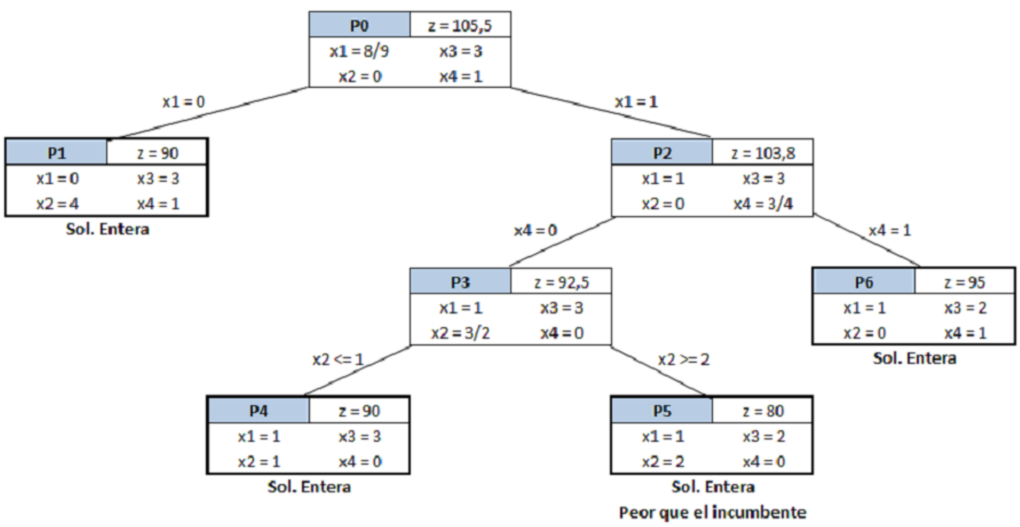
P3: Ahora se resuelve P3, que es igual a P2, pero con la restricción $x_4 = 0$, obteniéndose una solución no entera en x_2, $(x_2 = 1{,}5)$. Luego, ramificamos en $x_2 \leq 1$ y $x_2 \geq 2$, ya que necesitamos dejar fuera la solución decimal que nos daba.

P4: Ahora se resuelve P4, que es igual a P3, pero con la restricción $x_2 \leq 1$, obteniéndose una solución entera, con valor 90. Luego, se deja de ramificar.

P5: Ahora se resuelve P5, que es igual a P3, pero con la restricción $x_2 \geq 2$, obteniéndose una solución entera, con valor 80. Luego, se deja de ramificar por 2 razones: primero, porque ya es una solución entera y, segundo, porque el valor que se obtiene en este nodo es 80, que es peor que el incumbente, luego, no se obtendrá nada mejor de esta rama.

P6: Ahora se resuelve P6, que es igual a P2, pero con la restricción $x_4 = 1$, obteniéndose una solución entera, con valor 95. Luego, actualiza el incumbente $\bar{z} = 95$ y se deja de ramificar, ya que se tiene una solución entera.

Llegamos a una situación en la que no se puede seguir ramificando, luego, la solución óptima es la que genera el incumbente $\bar{z} = 95$ (podría ser más de una). El árbol asociado a este problema es el siguiente:



Observaciones:

- Las variables x_1, x_4 son binarias, por lo que al ramificar en ellas sólo hay 2 opciones: (=0 y =1). En general, para variables enteras se ramifica utilizando las desigualdades "menor o igual a la parte entera" y "mayor o igual a la parte entera más uno", por ejemplo, si el problema entrega la variable $x = 3{,}8$, se debe ramificar en $x \leq 3$ y $x \geq 4$.
- Llamamos solución entera a la que tiene todas las variables enteras, independiente de si el valor de z es entero o no. Si todos los coeficientes de la función objetivo son enteros, una solución entera entregará un valor de z entero.
- Los 3 criterios para dejar de ramificar son: Solución entera, Solución peor que el incumbente y Solución infactible.
- En este caso, de haber resuelto P6 antes que P3, no habría sido necesario resolver P4 ni P5, ya que P3 hubiese caído en el criterio "Solución peor que el incumbente"