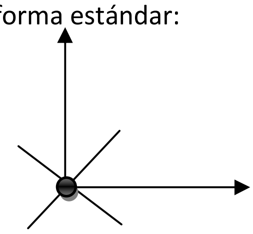
Responda las siguientes preguntas, justifique su respuesta. Note que puede obtener hasta nota 8 en esta pregunta.

1. **(1 pto.) En un poliedro en forma estándar, es posible que una solución degenerada esté asociada a una sola base, en caso afirmativo de un ejemplo.**

Sí, es posible, basta considerar como ejemplo el poliedro en forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

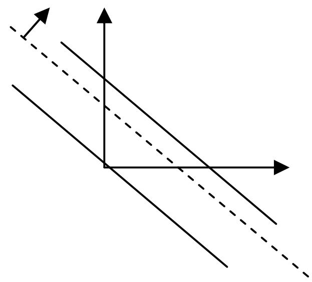


El único punto del poliedro $(0,0)$ es una solución básica factible degenerada, ya que tiene 2 variables y 2 restricciones y, por lo tanto, debería tener $(n-m)=0$ componentes nulas para no ser degenerada, lo cual no se cumple y además tiene una sola base asociada $B=\{1,2\}$.

2. **(1 pto.) Si el poliedro de un problema de minimización no posee puntos extremos, entonces el problema es no acotado, de un ejemplo para apoyar su respuesta.**

No necesariamente, el poliedro del siguiente problema no posee puntos extremos, pero la solución óptima es acotada $z^* = -1$

$$\begin{aligned} Min\ z = -x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{aligned}$$



Esto ocurre porque la función objetivo es paralela a uno de los lados del poliedro no acotado.

3. **(1 pto.) Sea el problema**

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Min\ c^t x} \\ \boldsymbol{Ax \leq b} \\ \boldsymbol{x_i \geq 0, x_j\ libre} \end{gathered}$$

Dado (P) como antes y su representación en forma estándar, ¿puede que más de una variable asociada a x_j sea básica?

Forma estándar:

$$\begin{gathered} Min\ c^t x \\ Ax + y = b \\ x_i \geq 0 \end{gathered}$$

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$
$$x_j^+, x_j^-, y \geq 0$$

Dado que B es base y que $x_j > 0$, sólo una de las variables asociadas $x_j^+ \ o \ x_j^-$ podrá ser positiva y estar en la base. Esto dado a que las columnas asociadas a ambas variables en la matriz A son l.d., y dado que estamos considerando una base, todas las columnas referenciadas en ésta deben ser l.i. Luego sólo la columna asociada a x_j^+ está en la Base.

4. **(1 pto.) Todo LP que tiene solución óptima tiene un punto extremo óptimo.**

Falso, basta considerar el mismo ejemplo que en 2.

5. **(1 pto.) Para un poliedro en forma estándar $\boldsymbol{P = \{x | Ax = b,\ x \geq 0\}}$, $\boldsymbol{A \epsilon R^{mxn}. Si\ x \epsilon P}$, posee más de $\boldsymbol{m}$ componentes no negativas, $\boldsymbol{I(x)}$ tiene menos de $\boldsymbol{m}$ restricciones li.**

Dado que el poliedro está en forma estándar, siempre se tiene que hay más de m componentes no negativas. (Con esta respuesta están ok)

Ahora veamos que pueden haber respondido por casos para justificar que no necesariamente la afirmación en verdadera:

- Si una o varias componentes de las m no negativas de x es o son nulas. Si además las $(\mathrm{n-m})$ restantes son también nulas, entonces estamos en una solución degenerada, y por lo tanto $\mathrm{I(x)}$ tiene m restricciones que son l.i. (si tiene más, éstas serán l.d. con las primeras m)
- Si x posee más de m componentes positivas:
  Entonces posee menos de $(n-m)$ componentes nulas, luego el punto no es una solución básica factible y, por lo tanto, hay menos de m restricciones activas en el punto x.

6. **(1 pto.) Dado un problema (P) en forma estándar y $\boldsymbol{x}$ un punto extremo para (P) con no todos los costos reducidos $\boldsymbol{\bar{c} \geq 0}$, entonces $\boldsymbol{x}$ no es óptimo del problema.**

La afirmación es falsa. Si en un punto extremo no degenerado los costos reducidos son todos positivos, entonces estamos en el óptimo. En caso de soluciones degeneradas lo anterior no necesariamente en cierto.

Esto es cierto para soluciones no degeneradas. Para el caso degenerado puede ocurrir que haya una base no óptima asociada a un punto óptimo, por lo que esta base tendrá algún costo reducido negativo que hará que el algoritmo siga iterando hasta encontrar la base óptima.

7. **(1 pto.) Para (P) en forma estándar, toda iteración de simplex mejora estrictamente la función objetivo, o termina con la solución al problema.**

Esto es cierto para el caso no degenerado. En general, puntos degenerados pueden estar asociados a más de una base, luego, como Simplex busca el óptimo recorriendo las bases, puede ocurrir que llegue al punto óptimo visitando una de sus bases que no es la base óptima, y por lo tanto, debe realizar al menos una iteración extra, en la que no cambia de punto (no mejora la función objetivo) y no se llega necesariamente a la base óptima.

Otro argumento válido es cuando el problema es no acotado. En la última iteración, Simplex se da cuenta que no hay ninguna variable básica que cumpla el criterio de salida de la base, y por lo tanto, termina con el resultado "no acotado", o bien "$-\infty$", caso en el que no se llega a la solución óptima (no la hay) y no se mejora el valor de la función objetivo.