

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 6
27 de Mayo, 2010

Problema 1

Sea A una matriz simétrica cuadrada. Considere el siguiente PPL:

$$\begin{aligned} (P) \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax \geq c \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \text{Pruebe que si } \bar{x} \text{ satisface } A\bar{x} = c \text{ y } \bar{x} \geq 0, \text{ entonces } \bar{x} \text{ es una} \\ \text{solución óptima.}$$

Sea (D) $\max \quad c^t y$ el dual de (P)
 $\text{s.a } Ay \leq c$
 $y \geq 0$

Y sea $\bar{y}$ tal que $A\bar{y} = c \quad / \cdot c A^{-1}$
 $c\bar{y} = c A^{-1} c$
 Por enunciado $A\bar{x} = c \quad / \cdot c A^{-1}$
 $c\bar{x} = c A^{-1} c = c\bar{y}$

Como $\bar{y}$ es factible en (D), por dualidad débil se tiene:

$$\begin{aligned} c\bar{y} &\leq cx \quad \forall x \text{ factible en (P)} \\ \rightarrow c\bar{x} &\leq cx \quad \forall x \text{ factible en (P)} \\ \rightarrow \bar{x} &\text{ es óptimo de (P)} \end{aligned}$$

Problema 2

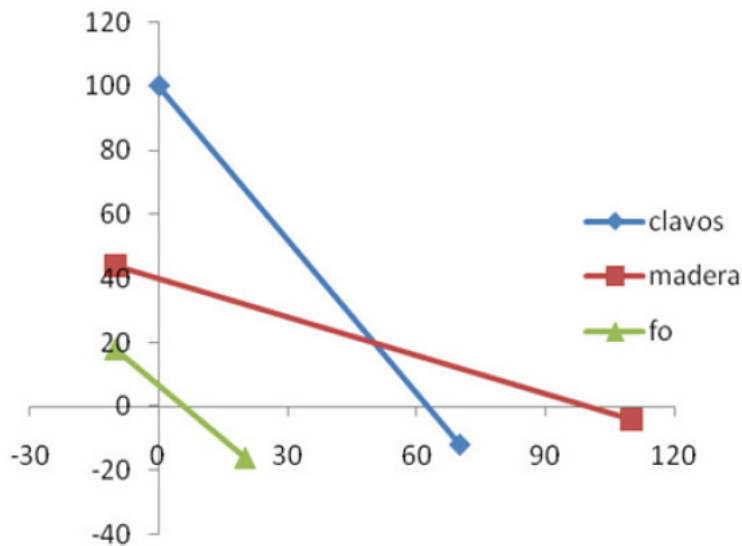
Considere el problema que enfrenta una mueblería que fabrica sillas y mesas, los materiales que ocupa son básicamente clavos y madera, sabemos que para fabricar 1 silla se requiere de 8 clavos y 4 tablas de madera y que para una mesa se necesitan 5 clavos y 10 tablas de madera. Actualmente, la bodega tiene 500 clavos y 400 tablas, y se sabe que cada silla se vende a 4 unidades monetarias [u. m.] y una mesa se vende a 5 [u. m.].

- a) Plantee el ppl (P) que maximice la utilidad de esta mueblería, dado el inventario de clavos y tablas en la bodega. Encuentre el óptimo gráficamente.

Queremos pasar de un problema de maximización de beneficios a uno de minimización de costos, para esto:

- b) Amplifique cada restricción i por una variable Y_i y sume ambas inecuaciones.
 c) Imponga algunas condiciones para encontrar una cota superior para la F.O. de (P), escriba el ppl (D) que encuentra la mínima cota superior.
 d) Encuentre el óptimo del dual y de una interpretación económica de estos valores en el problema (P).

- a) (P) $\text{Max } 4X_1 + 5X_2$
s.a. $8X_1 + 5X_2 \leq 500$ (clavos)
 $4X_1 + 10X_2 \leq 400$ (tablas)
 $X_1, X_2 \geq 0$



$$\rightarrow X^* = (50, 20)$$

- b)
- $\text{Max } 4X_1 + 5X_2$
s.a. $8X_1 + 5X_2 \leq 500$ $\quad \quad \quad / \cdot Y_1$
 $4X_1 + 10X_2 \leq 400$ $\quad \quad \quad / \cdot Y_2$
 $X_1, X_2 \geq 0$

$$(8X_1 + 5X_2)Y_1 + (4X_1 + 10X_2)Y_2 \leq 500Y_1 + 400Y_2$$

$$(8Y_1 + 4Y_2)X_1 + (5Y_1 + 10Y_2)X_2 \leq 500Y_1 + 400Y_2$$

- c)
- Notemos que si: $Y_1, Y_2 \geq 0$; $(8Y_1 + 4Y_2) \leq 4$ y $(5Y_1 + 10Y_2) \leq 5$

$$\rightarrow 4X_1 + 5X_2 \leq 500Y_1 + 400Y_2$$

$$\rightarrow (D) \text{ min } 500Y_1 + 400Y_2$$

s.a. $8Y_1 + 4Y_2 \geq 4$
 $5Y_1 + 10Y_2 \geq 5$
 $Y_1, Y_2 \geq 0$

d)

Por teorema de holgura complementaria tenemos:

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = 0 \quad \forall j$$

- $(4 - 8 Y_1^* - 4 Y_2^*) 50 = 0 \rightarrow 4 - 8 Y_1^* - 4 Y_2^* = 0$
- $(5 - 5 Y_1^* - 10 Y_2^*) 20 = 0 \rightarrow 5 - 5 Y_1^* - 10 Y_2^* = 0$

$$\rightarrow Y^* = (1/3 \quad 1/3)$$

Problema 3

Considere un problema de programación lineal en forma estándar el cual es infactible, pero que se convierte en factible y con un costo óptimo finito cuando la última restricción de igualdad es omitida. Muestre que el problema dual del original (infactible) es factible y que el costo óptimo es infinito.

Solución:

Tenemos los siguientes problemas:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min c^t x \\ & Ax = b \\ & a_{m+1} x = b_{m+1} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

El cual es infactible. Asumimos que es la última restricción la que hace el problema infactible.

$$\begin{aligned} (P') \quad & \min c^t x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

El cual es factible y tiene un costo óptimo finito, pues eliminamos la restricción que hacia infactible el problema.

$$\begin{aligned} (D') \quad & \min b^t y \\ & A^t y \leq c \end{aligned}$$

El cual es el primal del problema (P'). Como P' tiene un óptimo, y un costo finito, entonces D' también los posee.

Sea D el dual de D',

$$\begin{aligned} (D) \quad & \min b^t y + b_{m+1} y_{m+1} \\ & A^t y + a_{m+1}^t \leq c \end{aligned}$$

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max & -x_1 - x_2 - 10x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_2 + 4x_3 = 2 \\ & -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Encuentre una base inicial factible usando fase 1 de simplex.

Solucion:

Lo primero que se debe hacer es escribir el problema en forma estándar. Notemos que, para efectos de este problema, no es necesario agregar variables de holgura, pues las restricciones están con igualdad.

$$\begin{aligned} \min & x_1 + x_2 + 10x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_2 + 4x_3 = 2 \\ & -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Se puede ver que el origen no es una solución básica factible (basta reemplazar $(0,0,0)$ en las restricciones), por lo que **debemos hacer fase 1 para encontrar una base factible inicial** (esto se hace siempre que el origen NO sea solución básica factible!), que es justamente lo que nos piden en el enunciado.

Escribimos entonces el problema en fase 1^a, agregando variables artificiales:

$$\begin{aligned} \min y_4 + y_5 \\ \text{s.a. } x_2 + 4x_3 + y_4 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 + y_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, y_4, y_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

El problema de fase 1 lo único que hace es agregar variables artificiales a las restricciones (manteniendo las variables de holgura si las hubiera, en este caso no hay). La gracia está en que, si agregamos una variable a cada restricción, podemos usar la identidad como base factible inicial. Fíjense que, además, cambia la función objetivo. Tenemos que minimizar la suma de todas las variables que agregamos. La idea es que, usando simplex, resolvamos este problema y si TODAS las variables artificiales en el óptimo dan cero, obtenemos una base inicial factible para el problema original (es necesario que TODAS las variables artificiales sean cero, pues así es como "no haber agregado nada"). Por eso, exigiremos que la función objetivo del problema de fase 1 sea cero, sino alguna de las variables no es cero y el problema original está mal construido/es infactible.

Notar que se puede hacer fase 1 de forma un poco más inteligente. Podríamos haber agregado sólo una variable artificial a la segunda restricción (y_5), y podríamos tener de todas formas la identidad si usamos las columnas asociadas a x_2 e y_5 . Eso también es válido (y de hecho más fácil) para calcular fase 1.

Partiendo del origen del nuevo problema, calculamos:

$$\begin{aligned} B &= \{4, 5\} \\ N &= \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & A_B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_N &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix} & \overline{A_N} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \overline{b} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (0 \ 0 \ 0) - (1 \ 1) * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = (2 \ -1 \ 2) \geq 0$$

Hay un costo reducido negativo, por lo que entra a la base su variable asociada (x_2).

Usamos el criterio de salida para ver que variable sale de la base:

$$\min \{2/1, 2/1\}$$

Nota: ¿Por qué es este el criterio de salida? (esta explicación no es tan rigurosa y NO reemplaza lo visto en cátedra, pero les ayudará a visualizar el concepto).

Recordemos el problema que optimiza simplex según lo que les mostré en la auxiliar:

$$\begin{aligned} \min \{ & C_B \bar{b} + (C_N - C_B \overline{A_N}) X_N \} \\ \text{s.a. } & X_B = \bar{b} - \overline{A_N} X_N \\ & X_B, X_N \geq 0 \end{aligned}$$

La pregunta del millón: ¿qué variable X_{iB} es la que PRIMERO se hace cero cuando X_S crece? (recuerden que nos estamos moviendo a un vértice adyacente). Fijense que X_{iB} vale cero cuando $X_S = \bar{b}_i / \overline{a_{is}}$. Por lo tanto, la primera variable que se hace cero es la que corresponde al mínimo de los $\bar{b}_i / \overline{a_{is}}$, que corresponde al criterio de salida mostrado anteriormente (es decir, X_S va creciendo y cuando llega a cierto valor, algún X_{iB} se hace cero, eso es lo que buscamos... el primero que se hace cero, pues así garantizamos que es un vértice adyacente).

.....

Como ambos valores son iguales, podemos elegir qué variable entra. Elegimos arbitrariamente la variable Y_4

Iteramos con la nueva base

Calculamos:

$$B = \{2, 5\}$$

$$N = \{1, 4, 3\}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A_N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (0 \ 1 \ 0) - (0 \ 1) * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = (2 \ 2 \ 10) \geq 0$$

Como todos los costos reducidos son positivos, encontramos el óptimo.

Las variables básicas son $X_2=2, Y_5=0$ y las no básicas $X_1=X_3=Y_4=0$.

Fase 1 debe cumplir que su función objetivo al encontrar una base sea cero. En este caso se cumple, por lo que el problema original está bien definido. Notar que hay una variable artificial en la base encontrada, por lo que será necesario agregar esta variable al problema original, usar la base y resolver fase 2.

En otras palabras, el problema de fase 2 queda:

$$\begin{aligned} \min & x_1 + x_2 + 10x_3 + My_5 \\ \text{s.a.} & x_2 + 4x_3 = 2 \\ & -2x_1 + x_2 - 6x_3 + y_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

y se resuelve usando fase 2 de simplex, es decir, hacemos simplex partiendo de la base encontrada en fase 1, $B=\{2,5\}$. Notar que si NO hubiera quedado una variable artificial en la base no hubiera sido necesario agregarla en el problema de fase 2. Además, esta variable se agrega con el coeficiente M =“infinito” en la función objetivo, para que tenga un costo muy alto y sólo salga de la base, nunca entre. En realidad no es infinito, sólo imaginen que es un valor muy grande.

Sólo plantearemos la primera iteración de fase 2, queda propuesto resolverlo:

Calculamos:

$$B=\{2,5\}$$

$$N=\{1,3\} \text{ // Ya no existe la variable } Y_4$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \overline{A_N} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (1 \ 10) - (1 \ M) * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = (1 - 4M, 10 + 2 + 10M) \geq 0$$

Recordar que M es muy grande (positivo). El único costo reducido negativo es entonces el asociado a la variable X_1 . La variable X_1 entra de la base.

Para ver que variable sale, calculamos:

$$\min_{a_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}}{a_{is}} \right\} = \left\{ \frac{0}{4} \right\}$$

Sale la variable Y_5 . Ojo que no pusimos el término asociado a la variable X_2 pues este era $2/0$ y está explícito que $a_{is} > 0$, lo que para esa variable no se cumple.

Iteramos, la nueva base es:

$$B = \{2, 1\}$$

$$N = \{5, 3\}$$

y volvemos a hacer un paso de simplex, esto hasta que todos los costos reducidos sean positivos (¡háganlo! :).