



**fcfm**

FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Capítulo: Programación Entera

IN3701

Otoño 2010

## Programación Lineal Entera

Es una técnica que permite modelar y resolver problemas cuya característica principal es que el conjunto de soluciones factibles es discreto.

Modelo Lineal (que vimos en P.L.) agregando que las variables de decisión deben ser enteras.

A veces, algunas variables pueden ser enteras y otras continuas, en este caso hablamos de **programación lineal entera mixta**.

Ejemplos de estos modelos: localización de plantas.

Caso Particular: modelos lineales binarios donde las variables representan decisiones del tipo *si* o *no* (1 o 0).



## El Problema

$$\begin{aligned} \text{(PE) mín} \quad & z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x_i \in \mathbb{N}_0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Con  $\mathbb{N}_0$  los naturales unión el cero.

Es claro que si el conjunto  $\{x/Ax \leq b\}$  es acotado, el número de soluciones factible es finito.

Eso implica que el problema es fácil?

No, necesariamente, porque el número de soluciones puede ser exponencial en el tamaño del problema (número de variables).

Por ejemplo, el conjunto definido por

$$\begin{aligned} 0 \leq x_i \leq 1 \quad & i = 1, \dots, n \\ x_i \in \mathbb{N}_0 \quad & i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Es el conjunto de vértices del  $n$ -cubo que tiene  $2^n$  vértices.

Se puede mostrar que los problemas del tipo (PE) son NP-completos, lo que significa que son difíciles de resolver.

## El Problema

### Problema Mixto:

$$\begin{aligned} \text{(PM) mín} \quad & z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x_i \in \mathbb{N}_0 \quad i \in I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ & x_j \geq 0 \quad j \in I^C \end{aligned}$$

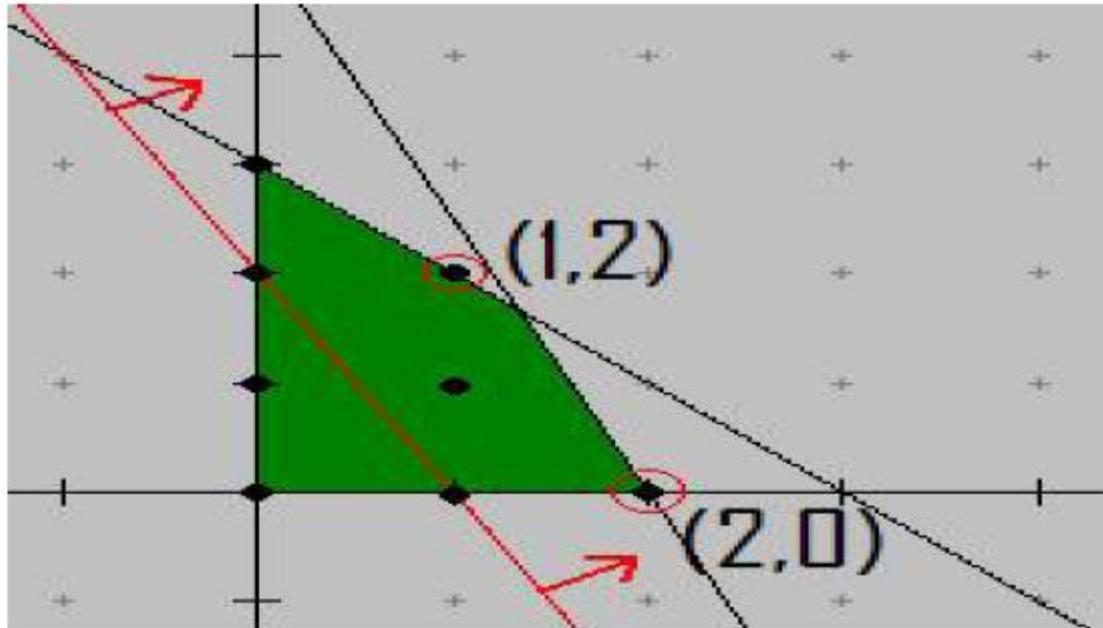
(PM) es tan complicado como (PE).

### Ejemplo de (PE):

$$\begin{aligned} \text{máx } z = \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad \textit{enteros} \end{aligned}$$



## El Problema



Dejamos los métodos de soluciones para más adelante. Veremos algunos modelos de programación lineal entera.



## Problema de la Mochila

Se tienen  $n$  tipos diferentes de objetos, cada uno de ellos tiene un peso  $w_j$  y un valor  $v_j$ .

Se dispone de una mochila donde se colocarán los objetos, que soporta un peso máximo de  $W$ , de manera de maximizar el valor total del contenido de la mochila.

Los objetos son indivisibles, o sea sólo se puede colocar un número entero de cada objeto.

**Modelo:** (Problema de la Mochila (knapsack) Entero)

$x_j$   $\longrightarrow$  unidades del objeto  $j$  que se colocarán en la mochila.

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= \sum_{j=1}^n v_j x_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq W \\ & x_j \geq 0, \quad \text{enteros} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$



## Problema de la Mochila

Si solo existe un objeto de cada tipo entonces  $x_j = 0$  ó  $1 \rightarrow$  knapsack binario ó 0-1, 1 corresponde a poner el objeto en la mochila y 0 a no ponerlo.

Otra aplicación de este problema se utiliza cuando existen mercaderías que deben ser almacenadas o transportadas considerando una disponibilidad de espacio o peso limitado, con cada mercadería con un cierto valor.

Está probado que se puede resolver (usando programación dinámica) en tiempo  $O(nW)$ . Pero si  $W$  no está acotado por un polinomio en  $n$  esto no es un buen resultado.

### **Otros Problemas:**

Asignación

El Vendedor Viajero

Localización de Instalaciones



## Ramificación y Acotamiento (Branch & Bound)

$$\begin{aligned} \text{(PE) mín} \quad & z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x_i \in \mathbb{N}_0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

### Definición:

El problema lineal continuo que se obtiene del problema (PE) al omitir las restricciones de integralidad de las variables se denomina **relajación lineal** de (PE).

**Observación:** Si la solución óptima de la relajación lineal de (PE) es entera, entonces esta solución es óptima para (PE).

La estrategia de enumerar todas las soluciones factibles de un problema entero (y elegir la mejor) se denomina **enumeración explícita**. En muchas ocasiones esto es impracticable.

La idea es enumerar de forma "inteligente" de modo que no sea necesario pasar por aquellas que sabemos que no son óptimas.



## Ramificación y Acotamiento

B&B tiene ese objetivo: intentar una enumeración parcial que asegure pasar por una solución óptima. Se denomina **enumeración implícita**.

La idea de este algoritmo consiste en particionar el conjunto factible de la relajación del problema en cuestión y resolver los subproblemas resultantes de esta partición (ramificación).

A partir del análisis de las soluciones obtenidas para los subproblemas y de sus respectivos valores óptimos (o de cotas para los valores óptimos) se puede establecer si es posible obtener mejores soluciones dividiendo nuevamente algún subproblema (proceso de acotamiento).

Si se concluye que determinado subproblema no puede mejorar la solución actual, no se le ramifica. En caso contrario, será uno de los candidatos a ser ramificado.



## Ramificación y Acotamiento

Veamos entonces el criterio más formalmente:

Tenemos el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \\ & x_j \in \mathbb{N}_0 \quad j \in I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ & x_k \geq 0 \quad k \in I^C \end{array}$$

Y asumimos que el conjunto factible es acotado.

Sea  $R_0 = \{x / Ax \leq b, x_j \geq 0 \forall j\}$  y sea la relajación lineal de (PE)

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{P}_0) & z_0 = \text{mín } c^T x \\ \text{s.a.} & x \in R_0 \end{array}$$

Sea  $x^0$  una solución óptima de  $\mathbf{P}_0$ , es decir  $x^0 \in R_0$  y  $c^T x^0 = z_0$ .

Si  $x_j^0 \in \mathbb{N}_0 \quad \forall j \in I \Rightarrow x^0$  es solución óptima también del (PE), problema resuelto.

Si no, existe un índice  $k \in I$  tal que  $x_k^0$  no pertenece a  $\mathbb{N}_0$ .



## Ramificación y Acotamiento

Usando este valor podemos ramificar ( $P_0$ ) en dos:

$$R_0^+ = R_0 \cap \{x/x_k \geq \lfloor x_k^0 \rfloor + 1\}$$

$$R_0^- = R_0 \cap \{x/x_k \leq \lfloor x_k^0 \rfloor\}$$

Sean entonces los siguientes problemas

$$\begin{aligned} (P_0^+) \quad & z_0^+ = \min c^T x \\ \text{s.a.} \quad & x \in R_0^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_0^-) \quad & z_0^- = \min c^T x \\ \text{s.a.} \quad & x \in R_0^- \end{aligned}$$

Obviamente:  $z_0^+ \geq z_0$  y  $z_0^- \geq z_0$ .

Además, si  $x^*$  es solución óptima del (PE),  $x^*$  debe estar en  $R_0^+$  o en  $R_0^-$ , pues  $x_k^*$  debe ser entera.



## Ramificación y Acotamiento

Ahora se puede tomar  $(P_0^+)$  y analizar su óptimo. Sea  $x^1$  su solución óptima. Si  $x_j^1 \in \mathbb{N}_0 \quad \forall j \in I$  es una solución entera factible. Es óptima para (PE)?

No necesariamente; en  $R_0^-$  podría haber una solución entera mejor.

Lo que si es seguro es que es una cota superior del óptimo.

Si  $x^1$  no es factible para (PE) se puede repetir la ramificación.

De este modo se construye un árbol donde de cada nodo se derivan dos ramas. Eventualmente, en las ramas finales estarían todas las soluciones factibles de (PE).

Sin embargo, un nodo del árbol puede no requerir más ramificaciones en cuyo caso se dice que se *poda* esa rama.

Las razones para no ramificar son:

1. El problema en el nodo resulta infactible. Obviamente, cualquier ramificación será infactible.



## Ramificación y Acotamiento

2. La solución en el nodo es factible para (PE). Por lo tanto cualquier ramificación no podría tener mejor solución entera. El valor entero obtenido debe ser guardado (si no es mejor que alguno que ya se tenga no hace falta). El valor de la mejor solución entera obtenida hasta el momento se denomina **incumbente**.
3. Si en un nodo del árbol el valor óptimo es  $z$  y el valor incumbente es  $\bar{z}$  con  $z \geq \bar{z}$ , es claro que ramificar en ese nodo sólo daría soluciones enteras peores (o iguales) a la mejor obtenida hasta el momento.

En su forma estandar, el algoritmo maneja una lista  $L$  de problemas candidatos, que deben ser examinados para eventual ramificación.

Sea  $\bar{x}$  la mejor solución entera disponible y  $\bar{z}$  el valor de la función objetivo en  $\bar{x}$  (o sea el valor del incumbente)



## Algoritmo “Branch & Bound”

$L$ : Lista de problemas candidatos a ser ramificados.

0.  $L = \{(P_0)\}$ ;  $\bar{z} = +\infty$ .
1. Escoger un problema (nodo) de la lista  $L$ .  
Sea (P) el problema seleccionado.  
Si  $L = \phi$ , TERMINAR con las siguientes conclusiones:
  - Si  $\bar{z} = +\infty$ , (PE) es infactible.
  - En caso contrario, la solución óptima de (PE) es  $(\bar{x}, \bar{z})$ .
2. Resolver el problema (P).  
Si (P) es infactible, eliminarlo de  $L$  (podar la rama que nace de (P)). Ir a (1).
3. Si (P) es factible, sea  $z'$  el valor óptimo y  $x'$  una solución óptima.  
Si  $z' \geq \bar{z}$  eliminar (P) de  $L$  e ir a (1).
4. Si  $z' < \bar{z}$  y  $x'$  cumple la condición de integralidad, entonces actualizar los valores  $\bar{z} \leftarrow z'$  y  $\bar{x} \leftarrow x'$ , eliminar (P) de  $L$  e ir a (1).

## Algoritmo “Branch & Bound”

5. En caso contrario, sea  $k \in I$  tal que  $x'_k$  no pertenece a  $IN_0$ . Ramificar el problema (P) creando dos nuevos problemas:  $(P^+)$  y  $(P^-)$ .  
 $(P^-)$  se construye agregando la restricción  $x_k \leq \lfloor x'_k \rfloor$ .  
 $(P^+)$  se construye agregando la restricción  $x_k \geq \lfloor x'_k \rfloor + 1$   
 Por último se actualiza  $L \leftarrow L \cup \{P^-, P^+\}$  y se va al paso (1).

Ej:

$$\begin{aligned}
 (\text{PE}) \text{ mín } & z = -5x_1 - 8x_2 \\
 \text{s.a. } & x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
 & x_1, x_2 \geq 0, \quad \textit{enteros}
 \end{aligned}$$

Hacemos  $\bar{z} = +\infty$ .

$(P_0)$ : Relajación lineal

$$\begin{aligned}
 \text{mín } z = & -5x_1 - 8x_2 \\
 \text{s.a. } & x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

## Algoritmo “Branch & Bound”

Resolvemos usando SIMPLEX:

$$z_0 = -41,25 \quad x_1 = 2,25 \quad x_2 = 3,75$$

Vemos que  $x_1$  y  $x_2$  son no enteros.

Elegimos  $x_2$  para ramificar, creando  $(P_1)$  y  $(P_2)$ .

$$\begin{aligned} (P_1) \text{ mín } z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_2) \text{ mín } z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



## Algunas Observaciones sobre el Algoritmo

### 1. Cuál variable elegir para la ramificación?

Existen algunas técnicas que permiten estimar el grado de mejora de la función objetivo que se obtendrá al ramificar en cada una de las variables.

Otra alternativa (heurística) es darle prioridad a aquella variable con menor  $c_j$  (mayor contribución para la mejora de la función objetivo).

### 2. Qué nodo elegir para ramificar?

Podemos ramificar *a lo ancho* o *en profundidad*. En principio, esta última estrategia garantiza mejorar más rápido la cota para la función objetivo.

Igualmente, no hay forma de garantizar que la rama examinada incluya a la solución del problema.

### 3. Uso de una buena cota superior

El incumbente inicia el algoritmo con un valor de  $+\infty$  y va mejorando cuando se encuentran soluciones enteras factibles mejores.



## Algunas Observaciones sobre el Algoritmo

Suele ser útil aplicar una heurística al problema, generalmente que devuelva una “buena” solución entera factible (y empezar con  $\bar{z}$  en este valor).

***Como Aplicaría B&B para un Problema de Optimización con variables binarias?***



**fcfm**

FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

*Fin*

*Les deseamos Mucho Éxito en sus estudios!!*

*Rodrigo Wolf y Fernanda Bravo*