Profesores: Fernanda Bravo, Daniel Espinoza, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar Extra
10 de Mayo, 2010

Problema 1

Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el vértice actual es una solución óptima del problema? ¿Por qué?

b) Si el vértice actual es óptimo, ¿Cómo se puede determinar a través del algoritmo si hay más de un óptimo?

c) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el problema es no acotado?

d) Explique cómo el algoritmo Simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.

e) Señale si el algoritmo Simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué? Si no lo asegura, explique cómo se podría lograr la máxima variación.

f) ¿Cuando una solución es degenerada?

g) ¿Puede suceder que en un PL de minimización exista algún costo reducido negativo, pero que en esa iteración del Simplex la función objetivo no pueda ser mejorada?

Problema 2

Considere el problema de minimización $c^t x$ en el poliedro P, pruebe lo siguiente:

a) Una solución factible x es óptima ssi $c^t d \geq 0$, para toda dirección factible d en x.

b) Una solución factible x es la única solución óptima ssi $c^t d > 0$ para toda dirección factible $d \neq 0$ en x.

Problema 3

Sea x una solución básica factible asociada con alguna matriz B, pruebe que:

a) Si el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo, entonces x es la única solución óptima.

b) Si x es la única solución y es no degenerada, entonces el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo.

Problema 1:

<u>Solución:</u>

Tenemos el problema:

$$(P)\ \min c^t x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Si dividimos la matriz A en dos matrices, para construir nuestras soluciones básicas:

$$A = (B|R)$$

Donde B es una matriz cuadrada de dimensión m, y R es una matriz de m x (n-m).
Entonces podemos transformar nuestro problema a:

$$(P)\ \min c^t \binom{x_b}{x_r}$$

$$(B|R)\binom{x_b}{x_r} = b$$

$$x \geq 0$$

Que es equivalente a:

$$\min c_b^t x_b + c_r^t x_r$$
$$Bx_b + Rx_r = b$$
$$x_b, x_r \geq 0$$

Como B tiene columnas l.i., es invertible, entonces:

$$x_b + B^{-1}Rx_r = B^{-1}b$$
$$x_b = B^{-1}b - B^{-1}Rx_r$$

Y la función objetivo se puede escribir como:

$$\min z = c_b^t(B^{-1}b - B^{-1}Rx_r) + c_r^t x_r$$

$$\min z = c_b^t B^{-1}b + (c_r^t - c_b^t B^{-1}R)x_r$$

Si se fijan una vez elegida una base, la f. o. queda solo en función de lo variables no básicas.

Además, en los costos reducidos aparece la solución del problema dual de la base asociada.

Entonces el problema asociado a la base B de columnas de A queda dado por:

$$\min z = c_b^t B^{-1}b + (c_r^t - c_b^t B^{-1}R)x_r$$

$$x_b = B^{-1}b - B^{-1}Rx_r$$

$$x_b, x_r \geq 0$$

Luego, la solución básica asociada a esta base está dada por $x_b = B^{-1}b$ y $x_r = 0$
Ahora estamos en condiciones de resolver las preguntas:

a) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el vértice actual es una solución óptima del problema? ¿Por qué?

Si definimos $c_r^t - c_b^t B^{-1} R = \bar{c}_r$, como los costos reducidos asociados a la base, el vértice representado por esta base será óptimo si todos los costos reducidos son mayores o iguales a cero.

Esto se debe a que si los costos reducidos son menores que cero la función objetivo puede disminuir su valor si x_r crece, y por lo mismo, si sus costos reducidos son mayores que cero, si x_r deja de valer 0, entonces la función objetivo aumenta su valor. Luego el vértice es óptimo si los costos de las variables reducidas son mayores que cero.

b) Si el vértice actual es óptimo, ¿Cómo se puede determinar a través del algoritmo si hay más de un óptimo?

Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con costo reducido igual a cero y tiene rango factible para crecer, entonces el problema admite óptimos alternativos.

Esta variable puede crecer hasta que una variable básica se haga cero. Esto se da porque:

$$x_b = B^{-1}b + B^{-1}Rx_r$$

Si $\bar{b} = B^{-1}b$ y $\bar{R} = B^{-1}R$ entonces:

$$x_b = \bar{b} - \bar{r}x_r$$

$$x_b = \bar{b} - \bar{r}_{m+1}x_{m+1} - \ \ldots - \bar{r}_n x_n$$

Supongamos que $x_s$es la variable que tiene costo reducido igual a cero, si ella aumenta o disminuya su valor, la función objetivo no cambia. Como en el óptimo todas las demás variables no básicas valen 0, entonces:

$$x_b = \bar{b} - \bar{r}_s x_s$$

Esta igualdad de vectores se puede separar coordenada a coordenada,

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{r}_{is}x_s \qquad i = 1, \ldots, m. \qquad x_i \ variable\ básica$$

Entonces si x_s puede crecer de tal forma que $x_i > 0$, entonces el máximo valor que puede tomar x_s es :

$$\min_{\overline{r_{is}}>0}\left\{\frac{\overline{b_i}}{\overline{r_{is}}}\right\}$$

c) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el problema es no acotado?

Si la variable que entra a la base es x_s (pues tiene un costo reducido menor que cero)

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{r}_{is}x_s \qquad i = 1, \ldots, m. \qquad x_i \ variable\ básica$$

Vemos que si $\bar{r}_{is} \leq 0$ para todo i= 1 ,..., m entonces x_s puede crecer indefinidamente antes que se anule alguna variable básica. Luego el problema tiene óptimo $z = -\infty$

d) Explique cómo el algoritmo Simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.

El algoritmo SIMPLEX se asegura de no salir del poliedro factible al efectuar de manera correcta el criterio de salida de la base.

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{r}_{is} x_s$$

Si para algún i = 1, ..., m, $\bar{r}_{is} > 0$, entonces cuando x_s crece, x_i decrece. Notar que el valor mínimo que puede tener x_i es cero, para que el problema siga siendo factible. Entonces el valor máximo que puede tomar x_s es hasta que la primera variable básica de la base antigua se haga cero, que es precisamente la que sale de la base.

e) Señale si el algoritmo Simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué? Si no lo asegura, explique cómo se podría lograr la máxima variación.

El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son < 0. Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local. Sin embargo, al escoger esta variable de entrada se esta automáticamente determinando cual será la variable básica que saldría de la base, y puede darse el caso que esta variable aportaba a la minimización de la función objetivo. Entonces para lograr la máxima variación habría que escoger como variable de entrada aquella que en conjunto con la variable que saldría impliquen la mayor variación en la función objetivo. Para esto es necesario probar todos los casos.

f) ¿Cuándo una solución se dice degenerada?

Cuando existe a lo menos una variable básica igual a cero.

g) ¿Puede suceder que en un PL de minimización exista algún costo reducido negativo, pero que en esa iteración del Simplex la función objetivo no pueda ser mejorada?

Si, si estamos por primera vez en una solución básica factible degenerada no óptima algún costo reducido será menor que cero, sin embargo, al aplicar los criterios de entrada/salida a la base será posible obtener otra base representativa del mismo vértice (porque es degenerado), y en ese caso el valor de la función objetivo no cambiará (ya que se evalúa en el mismo punto).

Problema 2

a)

⟹ Condición suficiente (por contradicción)

Sea x solución óptima ($c^t x \leq c^t y \quad \forall y \in P$)

Supongamos que ∃ d tal que $c^t d < 0$

Sea $y = x + \theta d, \qquad \theta > 0$

Como x es óptimo: $c^t x \leq c^t y$

$$c^t x \leq c^t (x + \theta d)$$

$$0 \leq \theta c^t d$$

$$0 \leq c^t d \ \rightarrow\leftarrow$$

⇐ Condición necesaria

Supongamos que $c^t d \geq 0$ ∀ d dirección factible

Sea y tal que $d = y - x$

$$c^t d \geq 0$$

$$c^t(y - x) \geq 0$$

$$c^t y \geq c^t x$$

Luego x es óptimo

b)

⇐ Condición necesaria

Sea y otra solución óptima, con x≠y

Como y ϵ P , $\exists\ un\ \bar{d}$ tal que: $y = x + \theta\bar{d}$, ya que P es convexo

Tenemos que $c^t d > 0$ ∀ d factible, en particular para $\bar{d}$

$c^t\bar{d} > 0$

Si multiplicamos la ecuación anterior por θ y le sumamos $c^t x$

$$c^t\left(x + \theta\bar{d}\right) > c^t x$$

$$c^t y > c^t x$$

Luego x es el único óptimo.

⟹ Condición suficiente (por contradicción)

Sea x el único óptimo $c^t x < c^t y$ ∀ y ∈ P/{x}

Además, todo y ∈ P/{x} se puede escribir como: $y = x + \theta\bar{d}$ con $\theta > 0$, ya que P es convexo

Supongamos que ∃ $\bar{d}$ factible tal que $c^t\bar{d} \leq 0$

Al multiplicar por θ y sumar $c^t x$ en ambos lados, obtenemos:

$$c^t\left(x + \theta\bar{d}\right) \leq c^t x$$

$$c^t y \leq c^t x \quad \rightarrow\leftarrow$$

Problema 3

Sea $x \neq \bar{x}$

Como x no es el óptimo, alguna variable no básica en la base óptima tendrá valor positivo en x, es decir:

$\exists\, k \in N^*$ tal que $x_k > 0$, N^*: conjunto de variables no básicas en la base óptima

Sabemos que en el óptimo: $c\bar{x} = c_b\bar{b}$

En x: $$cx = c_b\bar{b} + \bar{c}_r x_r$$
$$= c_b\bar{b} + \textstyle\sum_{i \in N^*} \bar{c}_i x_i \quad \text{(donde } x_i = 0 \; para \; i \neq k)$$
$$= c_b\bar{b} + \underbrace{c_k}_{>0} x_k$$
$$> c_b\bar{b} = c\bar{x}$$

Luego $\bar{x}$ es el único óptimo.

Como $\bar{x}$ es no degenerada $\exists\, \lambda > 0 \; tal \; que \; \bar{x} + \lambda v^k \in P$ con v^k dirección básica en $\bar{x}$

$v^k = (v_b, v_r) = (-\overline{A_k}\,, e_k)$

$$c(\bar{x} + \lambda v^k) = c\bar{x} + \lambda c v^k$$
$$= c\bar{x} + \lambda(c_r - c_b\bar{R})v_r^k$$
$$= c\bar{x} + \lambda\bar{c}_r v_r^k$$

Por otro lado, como $\bar{x}$ es el único óptimo:

$$c\bar{x} < c(\bar{x} + \lambda v^k)$$
$$c\bar{x} < c\bar{x} + \lambda\bar{c}_r v_r^k$$
$$0 < \lambda\bar{c}_r v_r^k$$

Sabemos que v_k^k=1 y por lo tanto $\bar{c}_k > 0$

Finalmente, como usamos un k genérico esto se cumple $\forall k \in N^*$