La Geometría de la Programación Lineal

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis

"Introduction to Linear Optimization"

Chap. 2

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.

Introducción

- Se dice que un conjunto S en R^n es un poliedro si puede ser representado como un conjunto finito de inecuaciones lineales: $S = \{x \in R^n / Ax \geq b\}$
  - Donde **A** es una matriz de m x n, **b** es un vector en R^m y **m** es la cantidad de inecuaciones.
- La región factible de todo Problema de Programación Lineal (PPL) puede ser descrita por restricciones de desigualdad de la forma $Ax \geq b$ y, por lo tanto, es un poliedro.
- Notar que un poliedro, equivalentemente, se puede definir:

$$S = \{x \in R^n / Ax \leq b\}$$

Ejemplo: Poliedro en R

- Consideremos las siguientes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
&4x_1 \geq 8 \\
&-x_1 \geq -7 \\
&x_1 \geq 1
\end{aligned}
$$

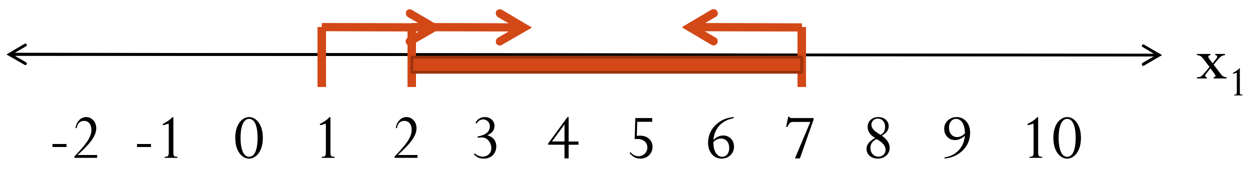
- En este caso tenemos $n = 1, \quad m = 3\,, A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Gráficamente:

Ejemplo: Poliedro en R

- De la primera desigualdad tenemos que: $x_1 \geq 2$
- De la segunda desigualdad tenemos que: $x_1 \leq 7$
- De la tercera desigualdad tenemos que: $x_1 \geq 1$

- Luego el poliedro representado con estas desigualdades es el siguiente:



Ejemplo: Poliedro en R^2

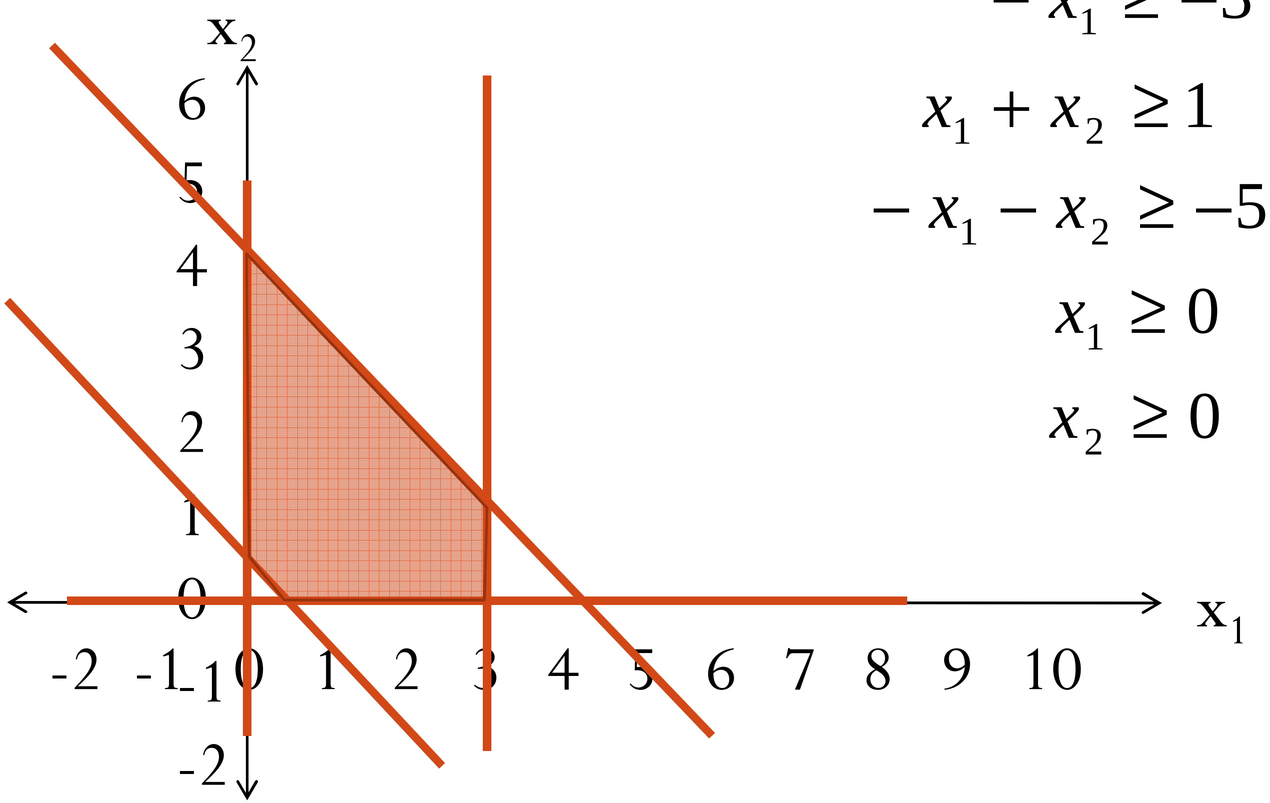
- Consideremos las siguientes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
-x_1 &\geq -3 \\
x_1 + x_2 &\geq 1 \\
-x_1 - x_2 &\geq -5 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

- En este caso tenemos $n = 2, \quad m = 5$

Ejemplo: Poliedro en R^2

- Gráficamente:



$$-x_1 \geq -3$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$-x_1 - x_2 \geq -5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Ejemplo: Poliedro en R³

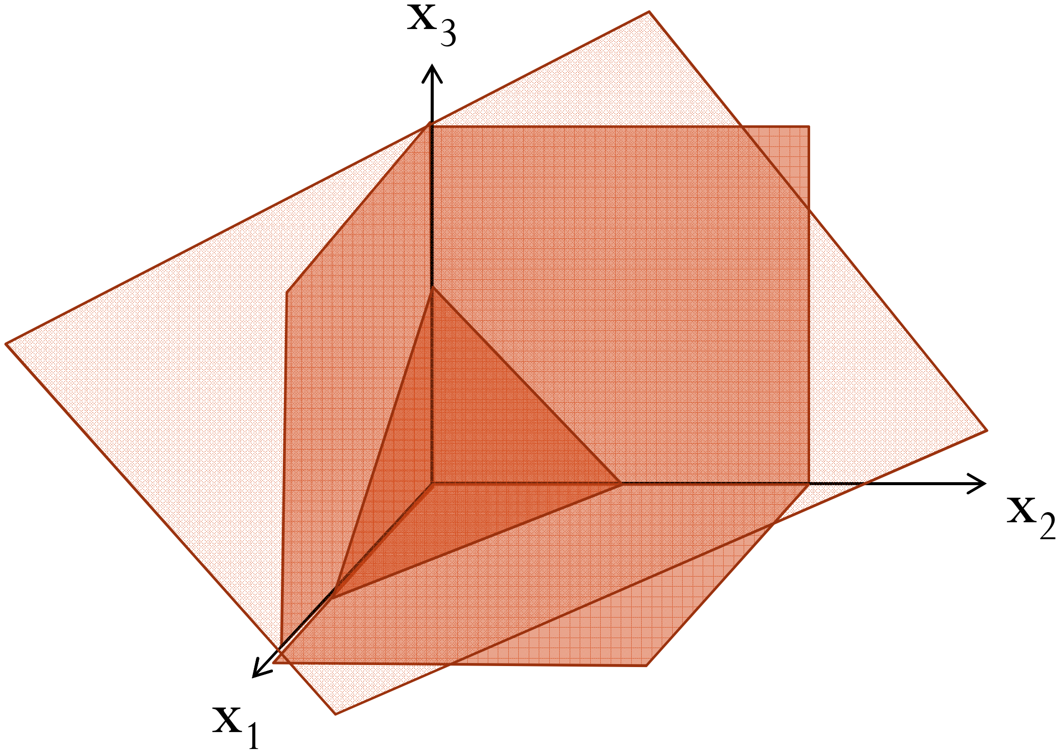
- Consideremos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- En este caso tenemos $n = 3, \quad m = 4$

Ejemplo: Poliedro en R^3

- Gráficamente:



$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

Casos Particulares

- **Hiperplano**
  - Es un poliedro determinado por una única restricción de igualdad.

$$\{x \in R^n \,/\, a'x = b\}$$

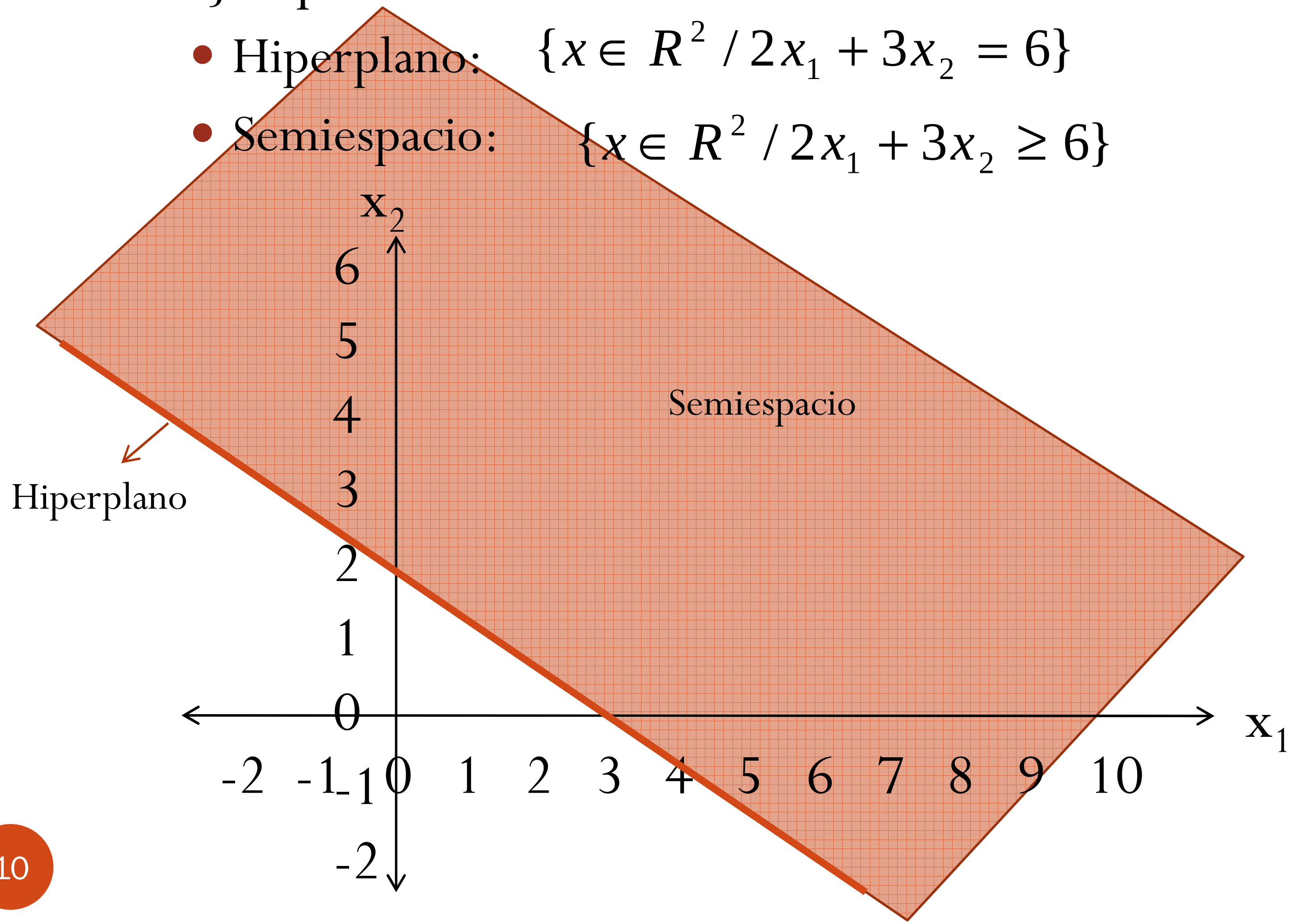
- **Semiespacio**
  - Es un poliedro determinado por una única restricción de desigualdad.

$$\{x \in R^n \,/\, a'x \geq b\}$$

- Notar que todo semiespacio está limitado por el hiperplano correspondiente.

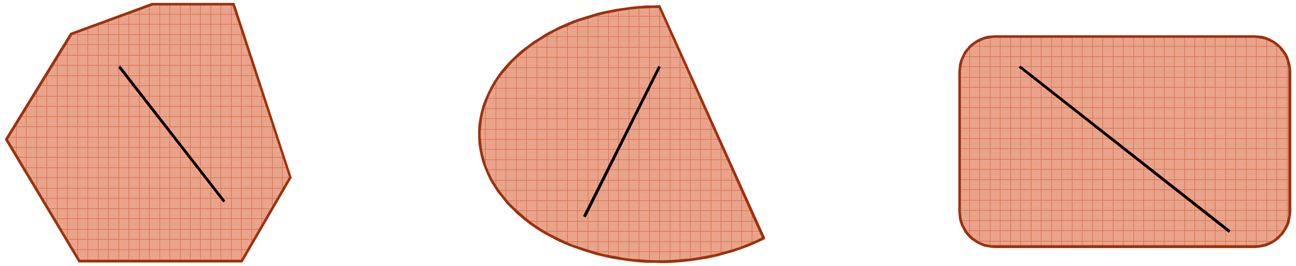
Casos Particulares

- Ejemplo:
  - Hiperplano: $\{x \in R^2 / 2x_1 + 3x_2 = 6\}$
  - Semiespacio: $\{x \in R^2 / 2x_1 + 3x_2 \geq 6\}$

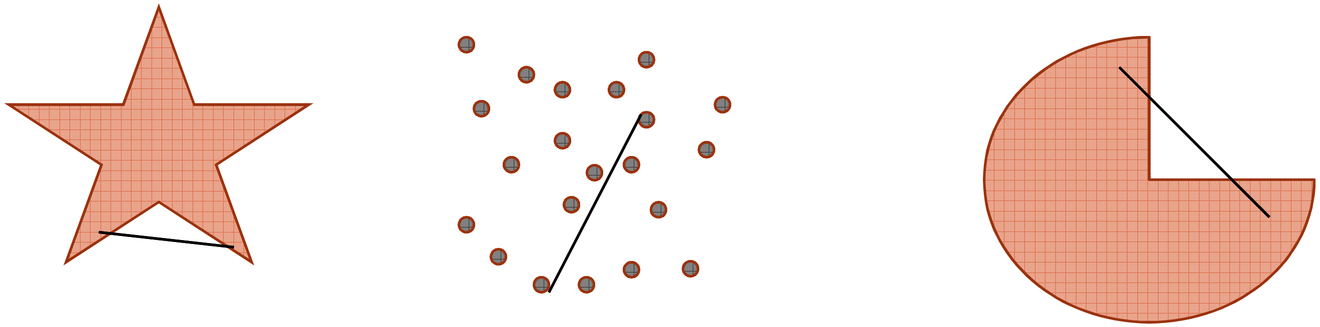


Conjuntos Convexos

- Un conjunto es convexo si, para cualquier par de puntos en él, la recta que los une está contenida en el conjunto.
- Ej: Conjuntos Convexos:



- Ej: Conjuntos No Convexos:

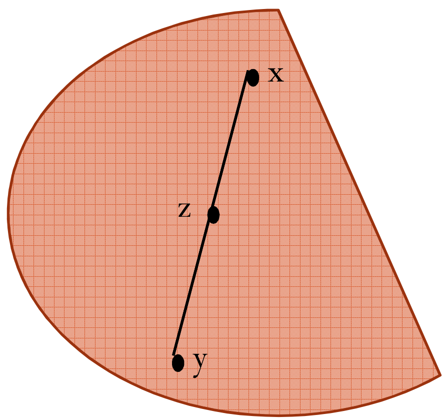


Conjuntos Convexos

- Un conjunto es convexo si, para cualquier par de puntos en él, la recta que los une está contenida en el conjunto.

- Formalmente: Un conjunto S es convexo si:

$$\forall x, y \in S,\ \lambda \in [0,1], \quad z = \lambda x + (1-\lambda) y \in S$$



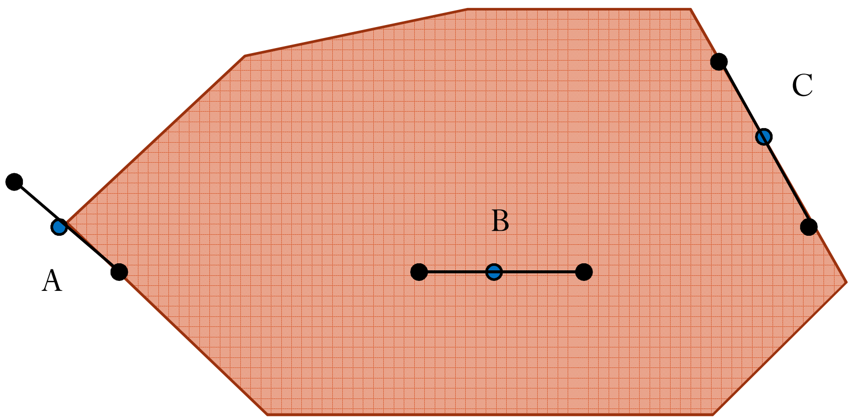
- Se dice que **z** es una combinación lineal convexa de **x** e **y**.

Puntos Extremos, Vértices y Soluciones Básicas Factibles

- **Punto Extremo:**
  - Un punto extremo es aquel que <u>no</u> puede ser expresado como una combinación lineal convexa de otros dos puntos del poliedro.
  - Formalmente: x es un punto extremo de P si <u>no</u> existen:

$$y, z \in P/\{x\},\ \lambda \in [0,1],\quad x = \lambda y + (1-\lambda)z$$

  - A es un punto extremo
  - B no es un punto extremo
  - C no es un punto extremo

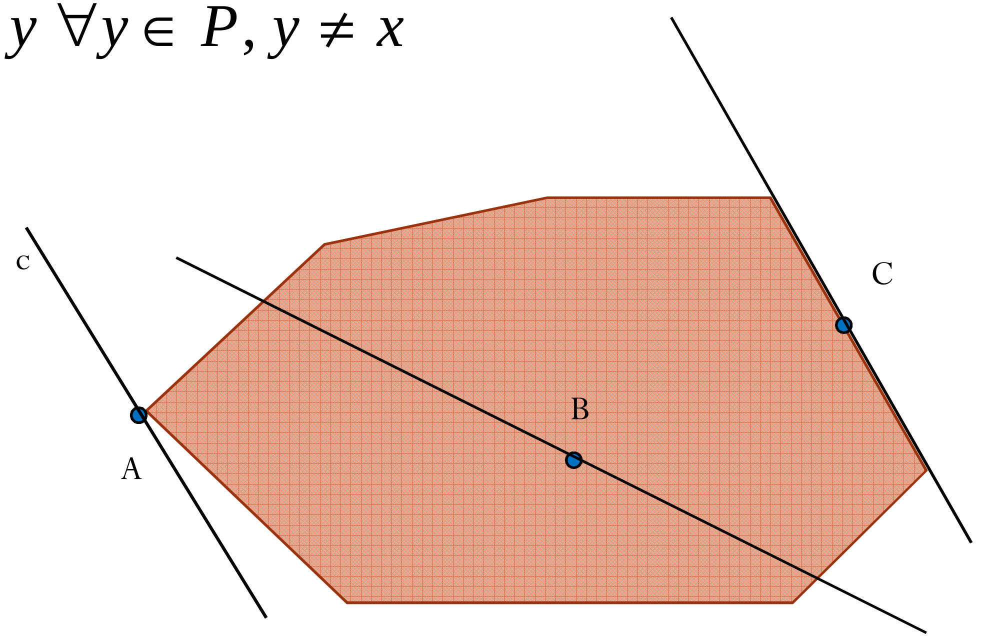


Puntos Extremos, Vértices y Soluciones Básicas Factibles

- **Vértice**
  - Un punto x es un vértice de un poliedro P, si existe una recta que intersecte a P sólo en el punto x.
  - Formalmente: x es un vértice de P si:

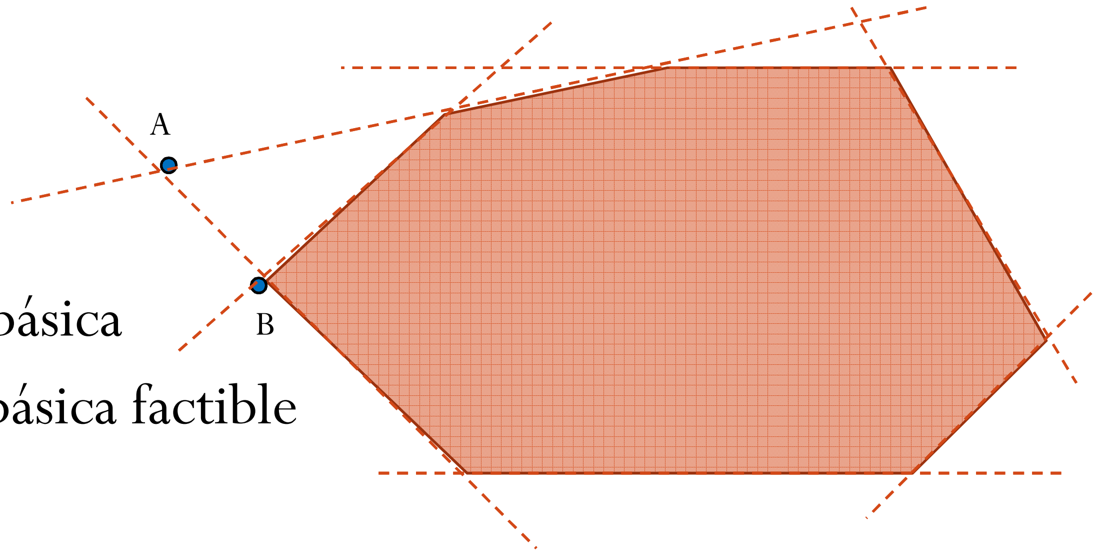
$$\exists c \,/\, c'x < c'y \;\; \forall y \in P,\, y \neq x$$

  - A es un vértice
  - B no es un vértice
  - C no es un vértice



Puntos Extremos, Vértices y Soluciones Básicas Factibles

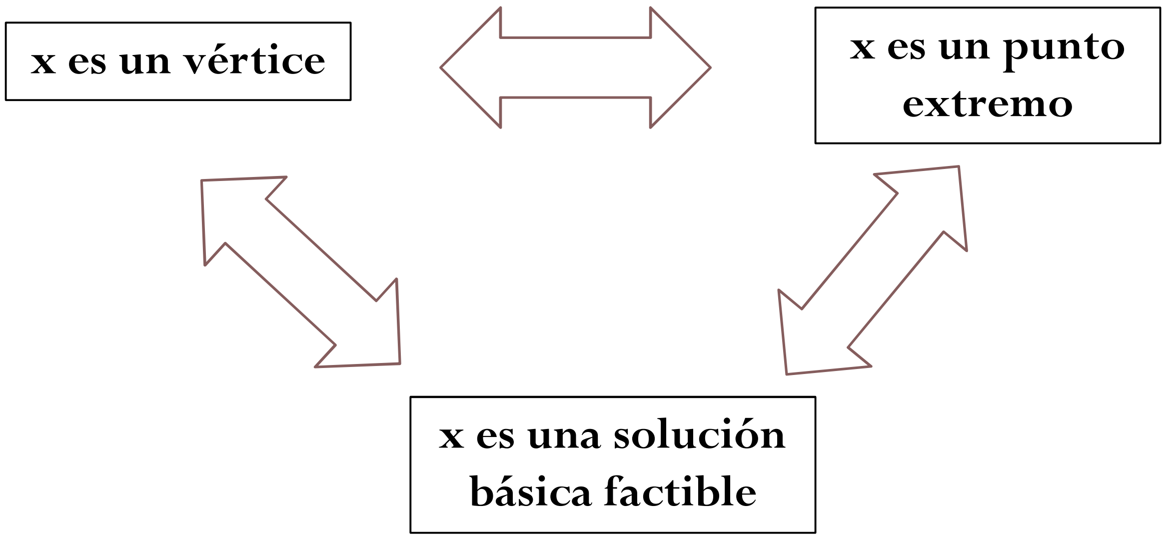
- **Solución Básica:**
  - Un punto x es una solución básica de un poliedro P en R^n si corresponde a la intersección de n restricciones linealmente independientes.
- **Solución Básica Factible:**
  - Una solución básica se dice factible si satisface todas las restricciones.



  - A es una solución básica
  - B es una solución básica factible

Puntos Extremos, Vértices y Soluciones Básicas Factibles

- Sea P un poliedro no vacío y x un punto de P, son equivalentes:



Restricciones Activas

- **Restricción Activa:** Se dice que una restricción es activa en un punto x* si se cumple con igualdad en ese punto.
- Ej: La restricción $a'_i \cdot x \leq b_i$ es activa en x* si $a'_i \cdot x^* = b_i$

- **Conjunto Activo:** Es el conjunto de todas las restricciones activas en el punto x*.

$$I = \{ i \,/\, a'_i \cdot x^* = b_i \}$$

Teorema

- Sea x* en R^n e I el conjunto activo de x*, entonces lo siguiente es equivalente:

  - Existen n restricciones l.i. que pasan por x* (pertenecen a I).
  - Los coeficientes de las restricciones activas determinan vectores (filas en la matriz) que generan el espacio R^n.
  - El sistema de ecuaciones de todas las restricciones activas tiene una solución única.

Poliedro en Forma Estándar

- Un poliedro en forma estándar es aquel que puede ser representado:
  - Sólo con restricciones de igualdad
  - Sólo con variables no negativas
  - Es decir: $P = \{x \in R^n \;/\; Ax = b,\; x \geq 0\}$
    - Donde A es una matriz de m x n y b es un vector en R^m
- Notar que todo poliedro puede ser escrito en forma estándar
  - Agregando variables de holgura
  - Reemplazando variables negativas y libres

Poliedro en Forma Estándar

- Ejemplo:
  - Sea P el siguiente poliedro:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 6\\
&-x_1 + 9x_2 - 2x_3 \geq 10\\
&x_1 \leq 0\\
&x_2 \geq 0\\
&x_3 \in R
\end{aligned}
$$

- Agregamos las variables de holgura (positivas):

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 6\\
&x_4 \geq 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&-x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_5 = 10\\
&x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Reemplazamos las variables no positivas:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{'} = -x_1\\
&x_1^{'} \geq 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&x_3^{'} - x_3^{''} = x_3\\
&x_3^{'}, x_3^{''} \geq 0
\end{aligned}
$$

Poliedro en Forma Estándar

- Ejemplo:
  - Sea P el siguiente poliedro:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 6 \\
&-x_1 + 9x_2 - 2x_3 \geq 10 \\
&x_1 \leq 0 \\
&x_2 \geq 0 \\
&x_3 \in R
\end{aligned}
$$

- Obtenemos el poliedro en forma estándar P':

$$
\begin{aligned}
&-2x_1^{'} + 3x_2 - 5x_3^{'} + 5x_3^{''} + x_4 = 6 \\
&x_1^{'} + 9x_2 - 2x_3^{'} + 2x_3^{''} - x_5 = 10 \\
&x_1^{'}, x_2, x_3^{'}, x_3^{''}, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

- O, equivalentemente:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 6 \\
&-x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_5 = 10 \\
&x_1 = -x_1^{'} \\
&x_3 = x_3^{'} - x_3^{''} \\
&x_1^{'}, x_2, x_3^{'}, x_3^{''}, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Poliedro en Forma Estándar

- Notar que un poliedro en forma estándar tiene n variables (incluidas las variables de holgura) y (n+m) restricciones (incluyendo las restricciones de no negatividad).

- Ejemplo:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 7 \\ 5x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad = 1 \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \geq 0 \end{array} \right\}$$

  - En este caso se tiene n=5 y m=3.

Soluciones Básicas

- Sin pérdida de generalidad se asume que las **m** restricciones son linealmente independientes, lo que implica que $m \leq n$

- Recordemos que para que un punto sea solución básica debe ser la intersección de **n** restricciones l.i. (**n** restricciones activas)
  - Como ya se tienen **m** restricciones de igualdad $(Ax = b)$, faltan (n-m) restricciones activas, que se logran escogiendo (n-m) variables y fijándolas en 0, haciendo que las correspondientes restricciones $x_i \geq 0$ sean activas.

Soluciones Básicas

- Consideremos **m** columnas linealmente independientes de la matriz **A**.

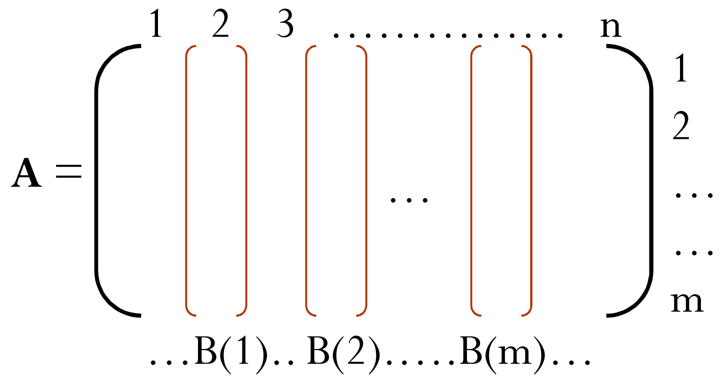
$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad n \\ \left(\begin{array}{ccccc} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] & \cdots & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] & \end{array}\right) \\ \ldots B(1) \ldots B(2) \ldots\ldots B(m) \ldots \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \cdots \\ \cdots \\ m \end{array}$$

  - Como cada columna está asociada a una variable, estamos escogiendo también **m** variables.
  - Estas **m** variables se conocen como **variables básicas**.
  - La matriz formada por estas **m** columnas se conoce como matriz básica (A_B).

$$A_B = \{B(1), B(2), \ldots, B(m)\}$$

Soluciones Básicas

- Consideremos **m** columnas linealmente independientes de la matriz **A**.

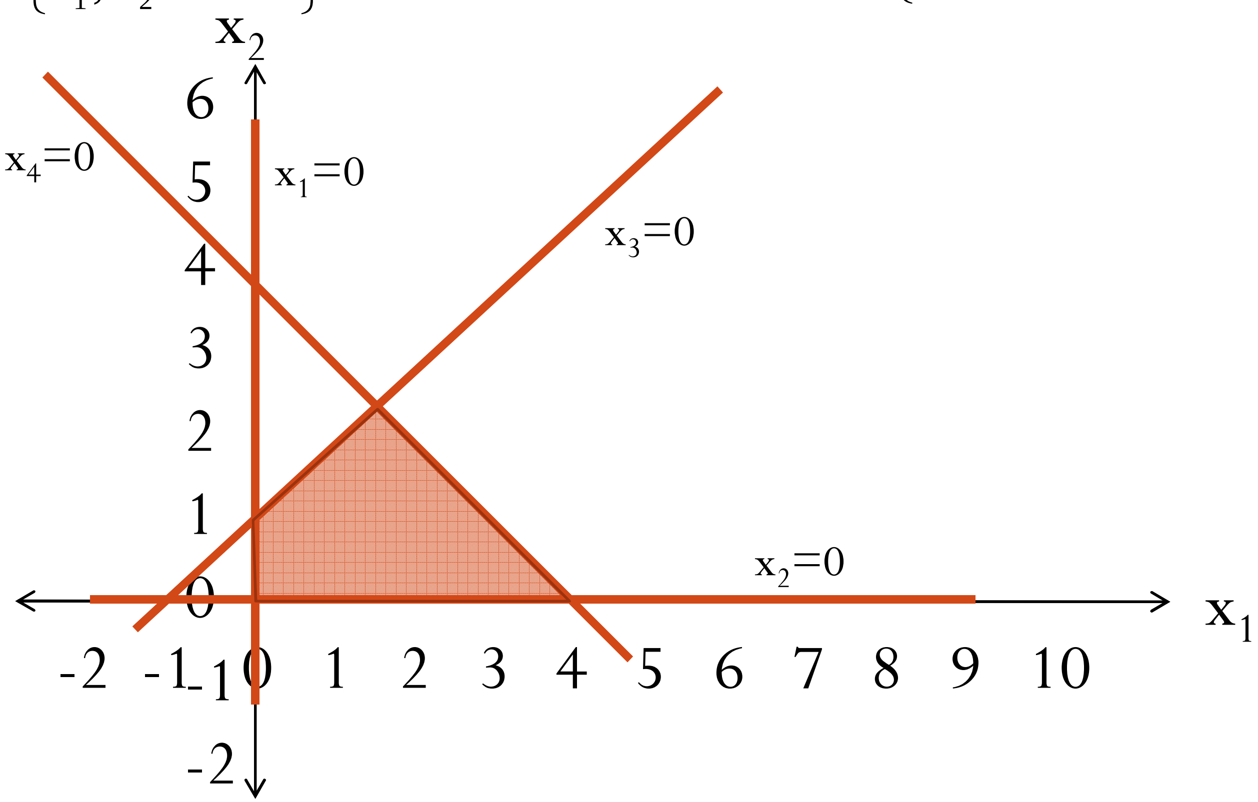


- Una vez escogidas estas **m** variables, las (n-m) restantes se fijan en 0, es decir: $x_i = 0 \quad \forall i \notin A_B$
- Finalmente, se resuelve el sistema de **m** ecuaciones $Ax = b$ para las variables $x_i \ / \ i \in A_B$

Soluciones Básicas

- Ejemplo:

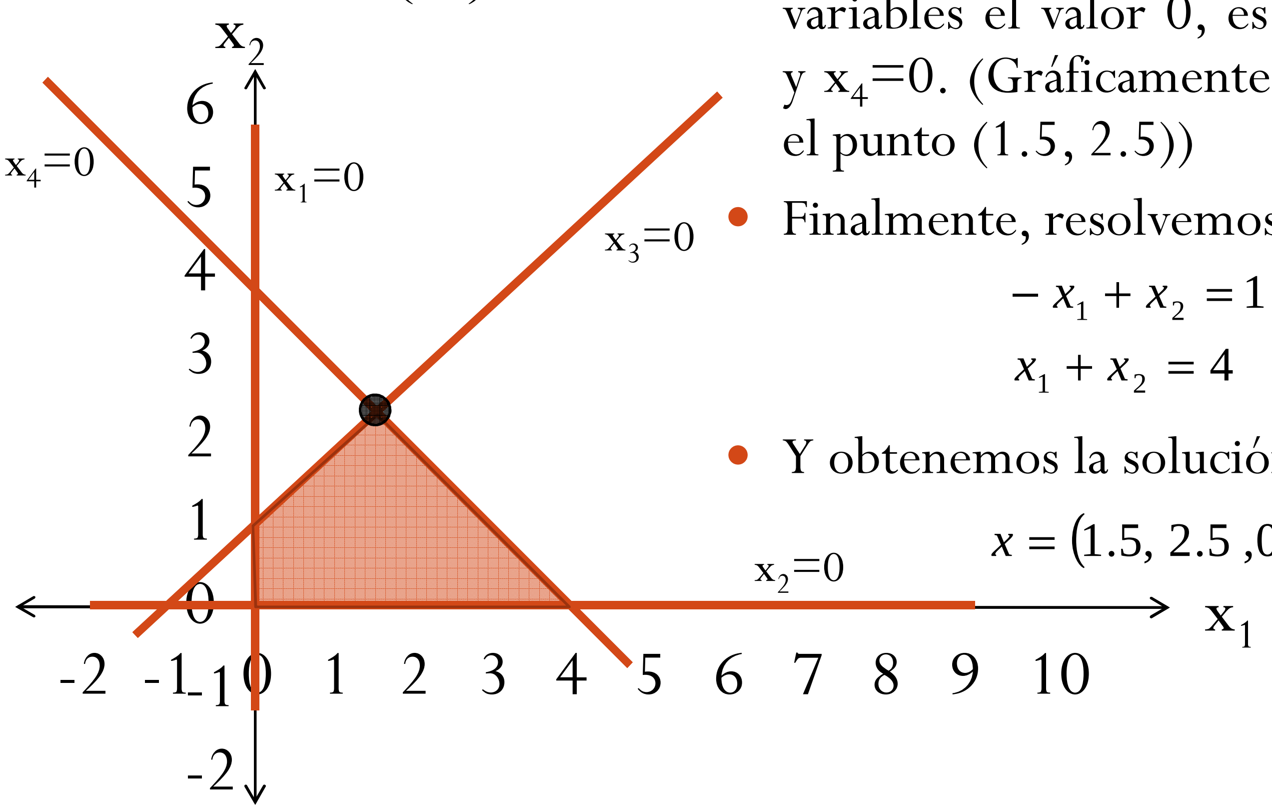
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Forma Estándar}} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$



Soluciones Básicas

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



- Elegimos arbitrariamente las primeras 2 columnas (asociadas a x_1 y x_2) que son l.i.
- Luego asignamos a todas las demás variables el valor 0, es decir x_3=0 y x_4=0. (Gráficamente estamos en el punto (1.5, 2.5))
- Finalmente, resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

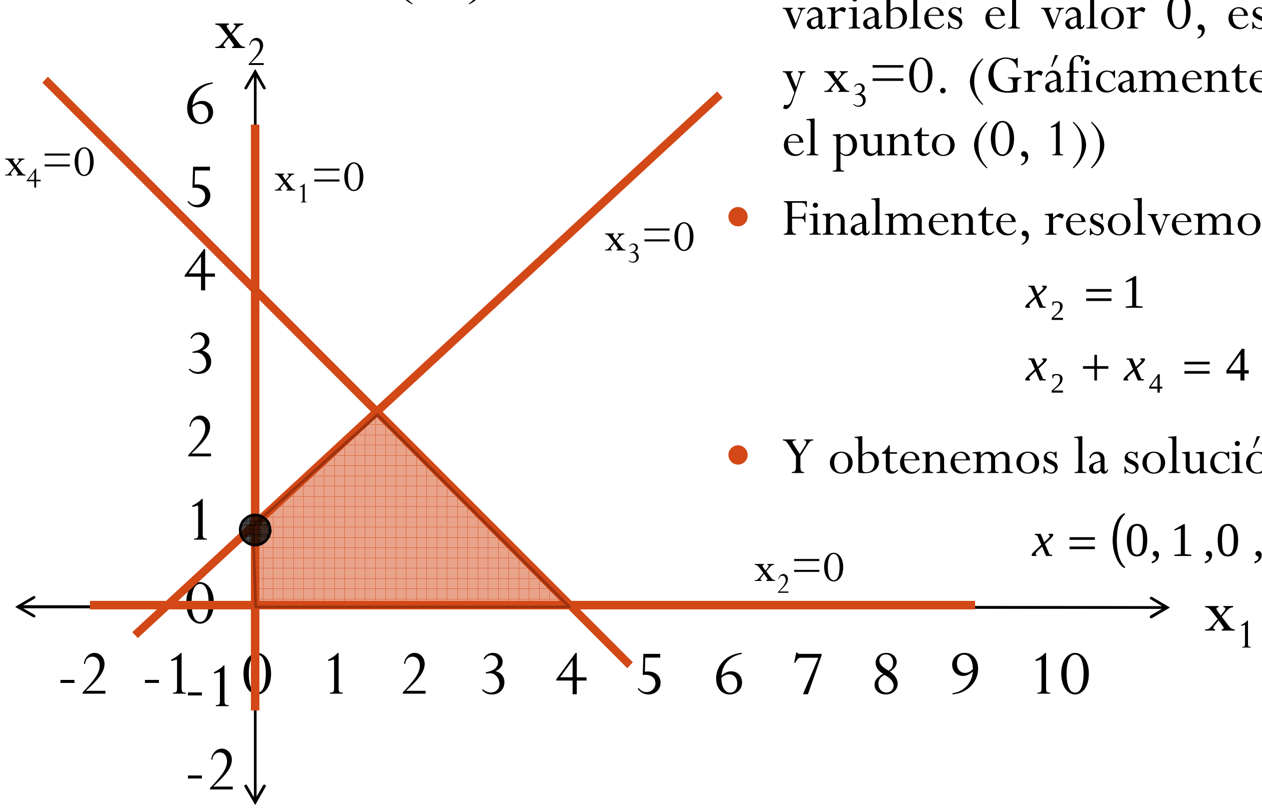
- Y obtenemos la solución básica

$$x = (1.5,\ 2.5\ ,0\ ,0)$$

Soluciones Básicas

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



- Si, en cambio, elegimos las columnas 2 y 4 (asociadas a x_2 y x_4) que son l.i.
- Luego asignamos a todas las demás variables el valor 0, es decir x_1=0 y x_3=0. (Gráficamente estamos en el punto (0, 1))
- Finalmente, resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

- Y obtenemos la solución básica

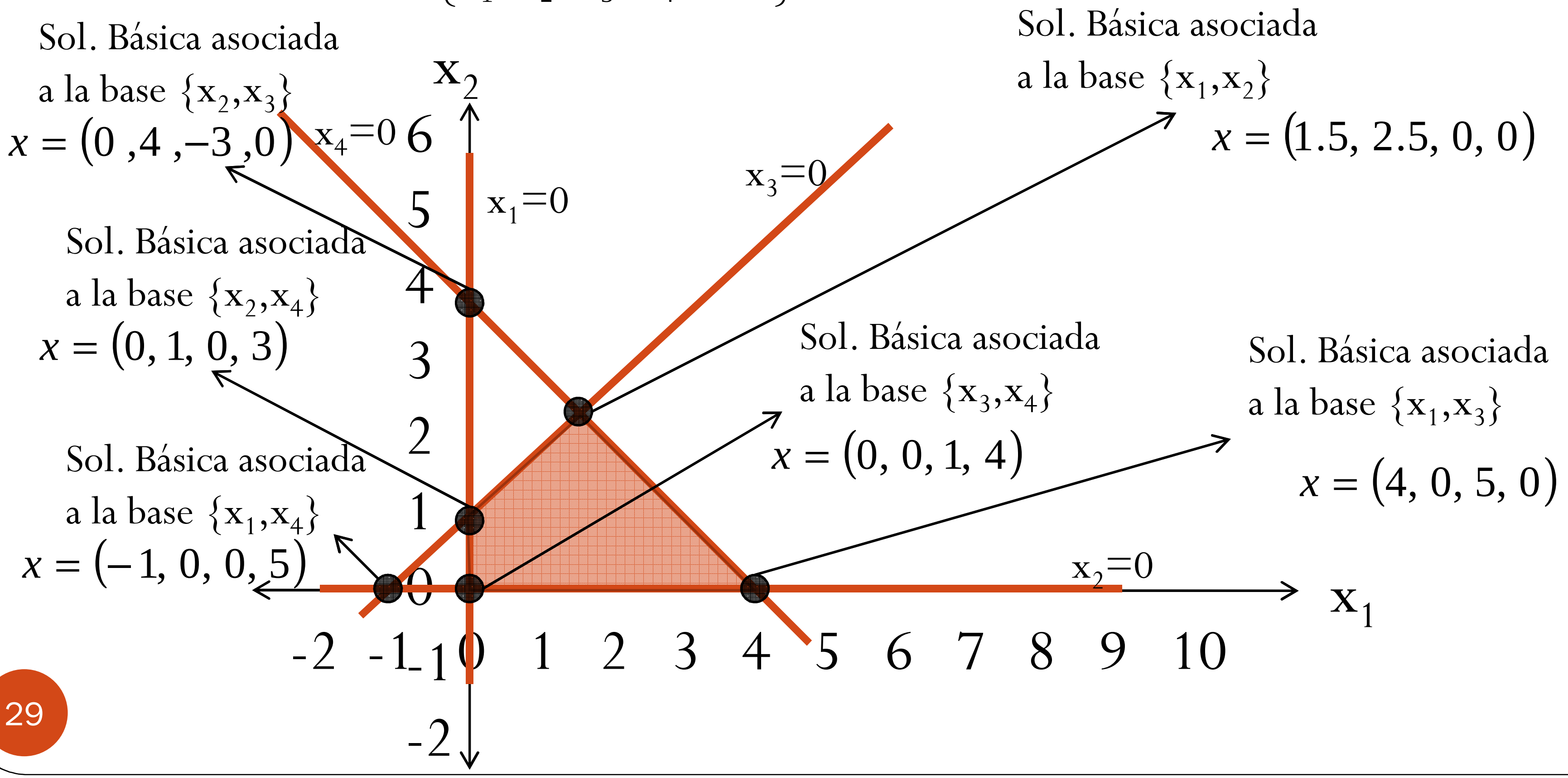
$$x = (0, 1, 0, 3)$$

Soluciones Básicas

- En resumen:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- Esto puede hacerse escogiendo cualquier par de columnas l.i. de la matriz A.



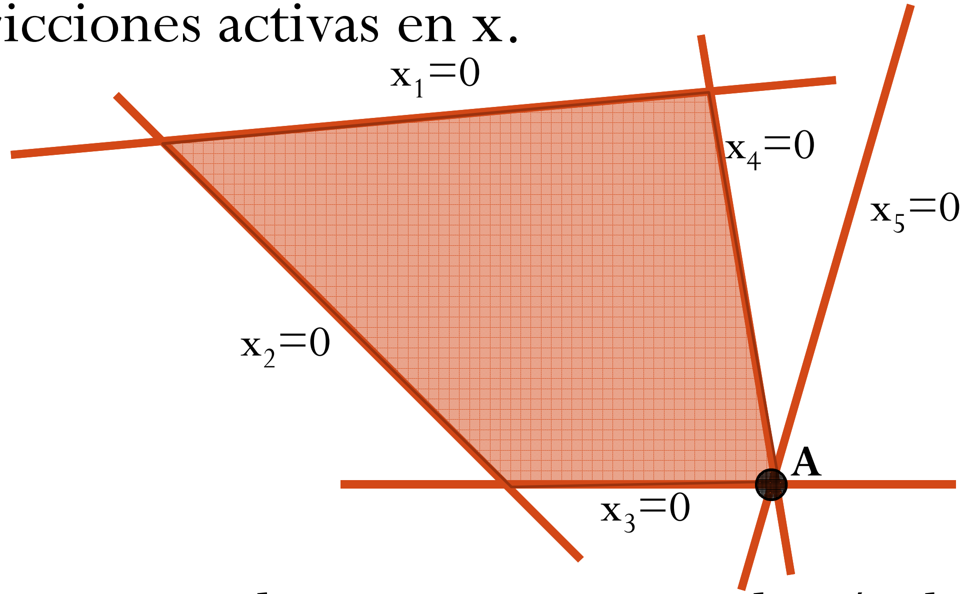
Soluciones Básicas

- Una base está asociada a una única solución básica, mientras que una solución básica puede ser representada por más de una base.

- Si se da este último caso, decimos que la solución básica es degenerada.

Degenerancia

- Una solución básica x se dice **degenerada** si hay más de **n** restricciones activas en x.

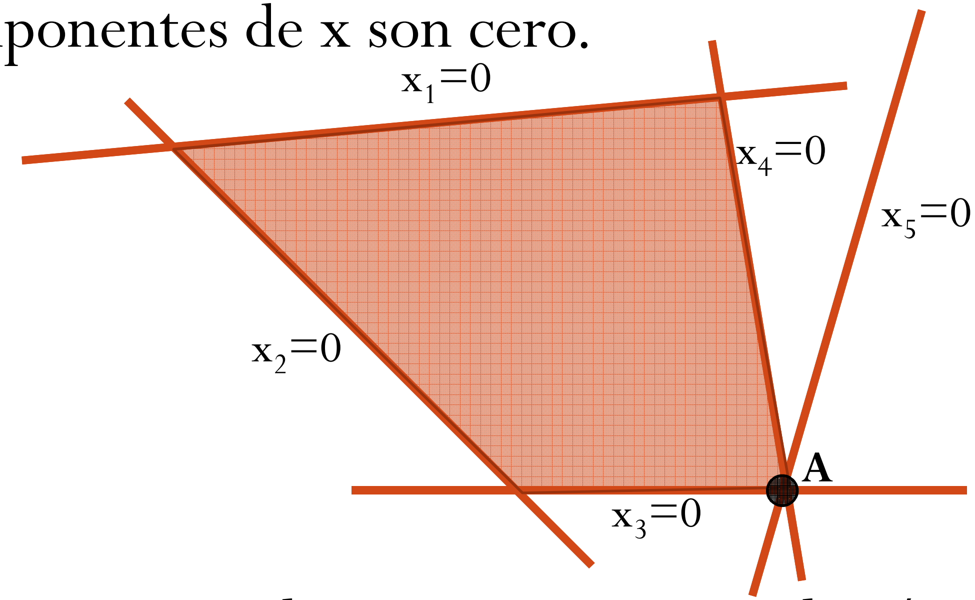


- En este caso, el punto **A** es una solución básica degenerada y puede representarse con las bases:

$$B_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$$
$$B_2 = \{x_1, x_2, x_4\}$$
$$B_3 = \{x_1, x_2, x_5\}$$

Degenerancia

- Una solución básica x se dice **degenerada** si más de **(n-m)** componentes de x son cero.



- En este caso, el punto **A** es una solución básica degenerada porque tiene 5 variables, 3 restricciones* y más de 2 variables nulas: $x_3 = 0,\ x_4 = 0\ y\ x_5 = 0$
  - * Como estamos en R^2, las restricciones $x_1, x_2 \geq 0$ no se cuentan dentro de las m restricciones del tipo $Ax = b$

La Geometría de la Programación Lineal

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis
"Introduction to Linear Optimization"
Chap. 2

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.