

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 4
29 de Abril de 2010

Problema 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y sea c alguna constante. Pruebe que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ es convexo.

Problema 2

Considere el poliedro generado por el siguiente conjunto de restricciones del tipo $\{a^i x_i \leq b_i : i \in I\}$:

$$x_1 + x_2 \leq 3; \quad x_1 \leq 2; \quad x_1 - x_2 \leq 1; \quad x_2 \leq 2; \quad x_1, x_2 \geq 0$$

- Grafique el poliedro
- Encuentre todas las soluciones básicas. ¿Cuáles de ellas son soluciones básicas factibles?
- Encuentre las restricciones activas en los puntos (1,2) y (2,1). ¿Son los vectores $\{a^i : i \in I^*\}$ linealmente independientes?
- Escriba el poliedro en forma estándar
- Considere el punto (0,2). Encuentre el valor de las variables de holgura en ese punto y determine la base asociada, es decir, los vectores $\{A_i : i \in B\}$ con $\|B\| = m$ que son l.i.

Problema 3

Considere un poliedro en forma estándar $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax = b\}$, donde las filas de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son linealmente independientes.

- Suponga que hay dos Bases distintas asociadas a la misma solución básica $\bar{x}$. Muestre esta solución es "degenerada".
- Suponga que todas las soluciones básicas factibles son "no degeneradas". Sea $x \in P$ tal que exactamente m de sus componentes son positivas. Muestre que x es una solución básica factible. Qué ocurre si eliminamos el supuesto de "no degeneradas"?

Problema 4

Para las siguientes afirmaciones, justifique en no más de 5 líneas si éstas son verdaderas o falsas. Entregue argumentos convincentes y formales en su respuesta.

- Existe un poliedro no vacío y acotado, de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, en el cual cada solución básica es también un vértice.
- Considere el problema de optimización $\text{Min } c'x$ con $Ax \leq b$. Si incrementamos algún componente de b , entonces el costo óptimo no puede empeorar.

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 4
29 de Abril de 2010

Problema 1

Sean x, y en $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ y $\lambda \in [0,1]$.

Debemos probar que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$

$$f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \text{ ya que } f \text{ es una función convexa}$$

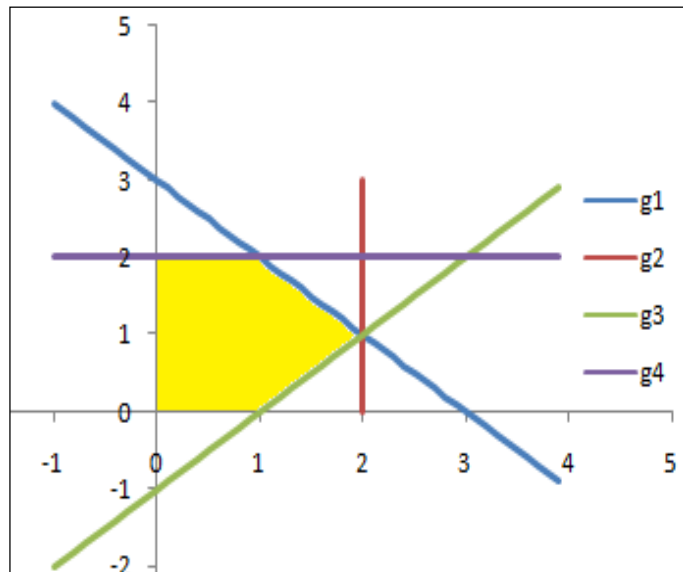
$$\leq \lambda c + (1-\lambda)c, \text{ ya que } x, y \text{ pertenecen a } S$$

$$= c$$

Por lo tanto $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$, luego S es un conjunto convexo.

Problema 2

a)



b) Soluciones básicas: $(0,0), (0,-1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,2)$.

Soluciones básicas factibles: $(0,0), (0,2), (1,0), (1,2), (2,1)$

c) Punto $(1,2)$: $g1, g4$

$$g1: (1,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 3, \quad g4: (0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 2$$

Los vectores $(1,1)$ y $(0,1)$ son l.i.

Punto (2,1): g1, g2, g3

$$g1: (1,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 3, \quad g2: (1,0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 2, \quad g3: (1,-1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 1$$

Los vectores (1,1), (1,0) y (1,-1) no son l.i.

d) Forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_6 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{o bien:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) Punto (0,2)

Variables:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escojamos como base las variables no nulas en ese punto:

$$B = \{2,3,4,5\}, \|B\| = 4 \text{ (4 es el número de restricciones)}$$

Los vectores de la matriz A asociados son l.i.:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3

a)

Se debe demostrar que $\bar{x}$ es degenerada, es decir, que tiene más de n-m componentes nulas.

Sean B_1, B_2 dos bases distintas asociadas a $\bar{x}$

Supongamos que $\bar{x}$ es no degenerada.

Por definición sabemos que $\bar{x}_i = 0 \quad \forall i \notin B_1$ (variables no básicas) y, del mismo modo, $\bar{x}_j = 0 \quad \forall j \notin B_2$.

Para las variables básicas: $\bar{x}_i \geq 0 \quad \forall i \in B_1$ y $\bar{x}_j \geq 0 \quad \forall j \in B_2$

Como las bases son distintas, necesariamente existe $k \in B_1$ tal que $k \notin B_2$ o viceversa.

Como $k \in B_1$ entonces $\bar{x}_k \geq 0$ (variable básica)

y como $k \notin B_2$ entonces $\bar{x}_k = 0$ (variable no básica)

Pero como ambas bases definen a $\bar{x}$ se tiene que $\bar{x}_k = 0$ con $k \in B_1$, es decir, se tiene una variable básica nula. $\rightarrow \leftarrow$

Luego, se tienen más de $n-m$ componentes nulas en $\bar{x}$, por lo que es una solución degenerada.

b) Como $x \in P$ cumple que $Ax = b$, luego $\sum_{i=1}^n A_i x_i = b$

Sean $\{B(1), \dots, B(m)\}$ los índices de las componentes positivas de x .

Luego $\sum_{j=1}^m A_{B(j)} x_{B(j)} = b$ es un sistema "cuadrado" con solución única, lo que implica

que las columnas $A_{B(j)}$ son l.i.

Si las m columnas son l.i. entonces las m filas también lo son, por lo que se tienen m restricciones activas l.i.

Luego x es una solución básica factible.

Si eliminamos el supuesto de "no degeneradas" el punto x no será necesariamente una solución básica factible, ya que puede ocurrir que un punto interior tenga m componentes positivas, basta considerar el punto donde se produce la degenerancia y moverse hacia el interior del poliedro aumentando las variables básicas que son nulas. Con esto se tienen m componentes positivas en un punto interior.

Problema 4

(a) Verdadero, Considere $P = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 0, x \leq 1\}$.

Luego $x = 0$ y $x = 1$ son las únicas soluciones básicas, las que además son vértices de P .

(b) Verdadero. Incrementando una componente de b , se obtiene un poliedro igual o mayor al original. Por lo tanto el costo óptimo no puede empeorar.

Dudas y/o Comentarios a:
ndevia@ing.uchile.cl