

Demostración Teorema equivalencia vértices, pto. extremos y sol. básicas:
 Sin pérdida de generalidad, asumimos que P es representado en términos de las restricciones $a'_i x \geq b_i$ y $a'_i x = b_i$.

Vértice \Rightarrow Punto Extremo

Supongamos que $x^* \in P$ es un vértice. Luego por definición existe un $c \in R^n$ tal que $c'x^* < c'y$ para cada y , satisfaciendo $y \in P$ e $y \neq x^*$. Si $y \in P$, $z \in P$, $y \neq x^*$, $z \neq x^*$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces $c'x^* < c'y$ y $c'x^* < c'z$ lo cual implica que $c'x^* < c'(\lambda y + (1 - \lambda)z)$ y por lo tanto, $x^* \neq \lambda y + (1 - \lambda)z$. Así x^* no puede ser representado como combinación convexa de otros elementos de P , y por lo tanto, es un punto extremo (por definición).

Punto Extremo \Rightarrow Solución Básica Factible

Supongamos que $x^* \in P$ no es una solución básica factible. Vamos a mostrar que x^* no es un punto extremo de P . Sea $I = \{i | a'_i x^* = b_i\}$. Dado que x^* no es una solución básica factible, entonces no existen n vectores li de la familia a_i , $i \in I$. Así los vectores a_i , $i \in I$, están en subespacio propio de R^n , y existe un vector distinto de 0, $d \in R^n$ tal que $a'_i d = 0$, para todo $i \in I$. Sea ϵ un número positivo pequeño, y considere los vectores de la forma $y = x^* + \epsilon d$ y $z = x^* - \epsilon d$. Notamos que $a'_i y = a'_i x^* = b_i$, para $i \in I$. Más aún, para $i \notin I$ tenemos $a'_i x^* > b_i$ y, dado que ϵ es pequeño, también tenemos que $a'_i y > b_i$ (basta con escoger $\epsilon |a'_i d| < a'_i x^* - b_i$ para todo $i \notin I$). Así cuando ϵ es suficientemente pequeño, $y \in P$ y, por un argumento similar $z \in P$. Finalmente notamos que $x^* = \frac{(x+y)}{2}$, lo cual implica que x^* no es un punto extremo.

Solución Básica Factible \Rightarrow Vértice

Sea x^* una solución básica factible, y sea $I = \{i | a'_i x^* = b_i\}$ y sea $c = \sum_{i \in I} a_i$. Luego tenemos

$$c'x^* = \sum_{i \in I} a'_i x^* = \sum_{i \in I} b_i$$

Más aún, para cualquier $x \in P$ y cualquier i , se tiene que $a'_i x \geq b_i$, y

$$c'x = \sum_{i \in I} a'_i x \geq \sum_{i \in I} b_i \quad (*)$$

Esto muestra que x^* es una solución óptima al problema de minimizar $c'x$ en el conjunto P . Más aún, la igualdad en (*) ssi $a'_i x = b_i$ para todo $i \in I$. Dado que x^* es una solución básica factible, existen n restricciones li activas en x^* , y x^* es la única solución al sistema de ecuaciones $a'_i x = b_i$, $i \in I$. Sigue que x^* es el único que minimiza $c'x$ en el conjunto P , por lo tanto x^* es un vértice de P .

Dado que una solución básica factible, es equivalente a un punto extremo, y dado que por definición un punto extremo no se refiere a una representación particular del poliedro, concluimos que la propiedad de ser una solución básica *factible*, es también independiente de la representación utilizada. (Esto contradice la definición de solución básica, la cual depende de la representación)