INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Daniel Espinoza, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 3
15 de Abril, 2010

Problema 1

Plantear el siguiente problema de manera lineal:

$$\begin{gathered}\max\ t = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \\ s.a\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S\end{gathered}$$

Se desea plantear algo del tipo

$$\begin{gathered}\max\ t = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \\ s.a\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S\end{gathered}$$

La función objetivo anterior es intrínsicamente no lineal. Queremos plantear un modelo lineal:

$$\begin{array}{lrcll} & & \max\ t & & \\ s.a & t & \geq & x_i & \forall i. \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \in & S & \end{array}$$

Sin embargo, esto no impide que t crezca indefinidamente. Queremos que $t = x_1$ ó $t = x_2$ ó ... ó $t = x_n$. Esto se implementa con variables binarias:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si } t \leq x_i \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Luego, considerando $M \gg 1$ el modelo queda:

$$\begin{array}{lrcll} & & \max\ t & & \\ s.a & t & \geq & x_i & \forall i. \\ & t & \leq & x_i + M(1 - y_i) & \forall i. \\ & \sum_{i=1}^{n} y_i & = & 1 & \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \in & S & \end{array}$$

Problema 2

Douglas Pompkins es un prominente empresario que esta analizando su plan de inversiones para el próximo año, para determinar en que proyecto invertir y que ejecutivos contratar para que administren cada uno de dichos proyectos. Para eso cuenta M posibles proyectos

para desarrollar y con N posibles ejecutivos para administrarlos, debiendo asignar al menos un ejecutivo por cada proyecto. Sin embargo, no todos los ejecutivos tienen las habilidades técnicas para administrar todos los proyectos. En efecto, se conocen los parámetros aij que toma el valor 1 si el ejecutivo i esta capacitado para hacerse cargo del proyecto j y 0 si no lo está.
Los proyectos a elegir tienen una serie de condiciones técnicas que deben ser cumplidas:
Para cada proyecto j existe un conjunto Ej de proyectos que no pueden ser realizados si el proyecto j es realizado y viceversa, es decir si se realiza el proyecto j no puede realizarse ningún proyecto en Ej y si se realiza algún proyecto en Ej no puede realizarse el proyecto j.
Para cada proyecto j existe un conjunto Ij de proyectos que deben ser realizados si el proyecto j es realizado, es decir si se realiza el proyecto j deben realizarse también todos los proyectos en Ij y si existe algún proyecto en Ij que no se realiza, el proyecto j no puede realizarse.
Para cada proyecto j existe un conjunto Rj de proyectos que son requisitos para la realización del proyecto j , es decir, para que el proyecto j sea realizado es necesario que todos los proyectos en Rj sean realizados.
Para cada proyecto j existe un conjunto Sj de proyectos que son requisitos alternativos para la realización del proyecto j, es decir, para que el proyecto j sea realizado es necesario que al menos uno proyecto en Sj sean realizados.
A su vez existen restricciones de índole financiera. Se sabe que un proyecto i requiere una inversión de pj y tiene una rentabilidad esperada de uj . Con esto se debe elegir una cartera de inversión tal que la rentabilidad esperada sea mayor que U y no se invierta mas de P.
Pompkins para disminuir el riesgo de su cartera separa los M proyectos en m (W_1 ...W_m) grupos, y el gasto dentro de cada grupo esta acotado por una cantidad K_m la cual debe respetarse en al menos k de los m grupos.
Con los datos anteriores y suponiendo que para cada ejecutivo i existe un sueldo de contratación ci, formule un modelo de programación binaria que permita determinar la cartera de inversión de modo de minimizar el costo total de contratación de los ejecutivos.

Solución

1. Variables de decisión.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si contrato al ejecutivo i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{Si realizo el proyecto j} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si asigno al ejecutivo i al proyecto j} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Restricciones.

a) Proyectos que no pueden ser realizados si el proyecto j es realizado.

$$z_k \leq 1 - z_j \qquad \forall k \in E_j \quad j = 1...M$$

b) Proyectos que deben realizarse si el proyecto j es realizado.

$$z_k \geq z_j \qquad \forall k \in I_j \quad j = 1...M$$

c) Proyectos que deben realizarse todos para poder realizar el proyecto j .

$$\sum_{k \in R_k} z_k \geq z_j \cdot |R_j| \qquad j = 1...M$$

d) Proyectos que alguno debe realizarse para poder realizar el proyecto j.

$$\sum_{k \in S_j} z_k \geq z_j \qquad j = 1...M$$

e) Cota inferior a la utilidad esperada de la cartera de inversión.

$$\sum_{j=1}^{M} u_j \cdot z_j \geq U$$

f) Cota superior al dinero invertido en los proyectos.

$$\sum_{j=1}^{M} p_j \cdot z_j \leq P$$

g) Asignar al menos a un ejecutivo competente a los proyectos realizados.

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} \cdot x_{ij} \geq z_j \qquad j = 1...M$$

h) No asignar a un ejecutivo que no he contratado.

$$x_{ij} \leq y_i \qquad i = 1...N, j = 1...M$$

i) Naturaleza de las variables.

$$y_i, z_j, x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1...N, j = 1...M$$

j) Satisfacer al menos k restricciones

$$\sum_{j \in W_l} p_j z_j \leq K_l + H(1 - h_l) \qquad \forall W_l : l = 1 \ldots m \qquad H \gg 1$$

$$\sum_{l=1}^{m} h_l \geq k \qquad h_l \in \{0,1\}$$

La restricción anterior, dice que para al menos k casos (cuando hl=1) estaría forzando a satisfacer la restricción original, y en los casos cuando hl=0 le estoy dando holgura mediante el H>>1 para que la restricción no esté acotada superiormente ya que la suma de PjZj podria no estar acotada, y en esos casos no satisfacer la restricción original. como hl=1 al menos k veces, satisfago al menos k restricciones.

$i)$ Naturaleza de las variables.

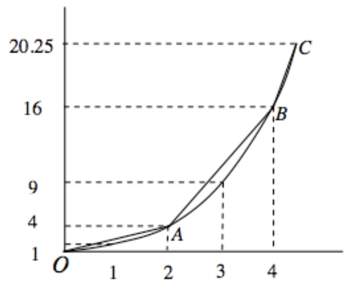
$$h_l \quad y_i, z_j, x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 1...N, j = 1...M \quad l := 1\ldots m$$

3. Función Objetivo.

$$\text{mín } CTC = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot y_i$$

Problema 3
Escribir el siguiente problema como un problema lineal por trozos (linealizado).

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 - 2x_1 - x_2 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & 2x_1 + x_2 \le 9 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$



Del problema sabemos que es x_1^2 la parte no lineal del problema, para ello, tomamos los puntos que aparecen en la figura, a saber:

points	O	A	B	C
x_1	0	2	4	4.5
y	0	4	16	20.25

Como tenemos 4 puntos, separaremos la función en 3 tramos (como la figura), y escribiremos el x_1 y el y como combinación convexa lineal de sus valores en la tabla.

$$x_1 = 0\lambda_O + 2\lambda_A + 4\lambda_B + 4.5\lambda_C, \quad (1)$$
$$y = 0\lambda_O + 4\lambda_A + 16\lambda_B + 20.25\lambda_C, \quad (2)$$
$$\lambda_O + \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1, \quad (3)$$

y el problema linealizado $x_1, x_2, \lambda_i, i = O, A, B, C \ge 0.$ queda como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y - 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 5, \\
& 2x_1 + x_2 \le 9, \\
& (1), (2), (3),
\end{aligned}
$$