INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Daniel Espinoza, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 2
8 de Abril, 2010

Problema 1

El nuevo programa de postgrado MPA de una prestigiosa universidad ha recibido n postulaciones excelentes para su primera generación y por capacidad no puede aceptar todas. Tiene el problema de seleccionar las hasta m postulaciones más adecuadas para el programa (m<n).

Como es de carácter público no puede solamente seleccionar para maximizar el beneficio económico del programa. Cada generación tiene que cumplir además con los siguientes criterios.

Por lo menos 40% de los aceptados tienen que pertenecer a cada sexo. El parámetro S_i indica el sexo del postulante i (i=1, …, n). S_i = 1 significa femenino y S_i = 0 significa masculino.

El programa busca tener impacto en regiones por lo que por lo menos 50% de los aceptados de cada generación deben venir de regiones. El parámetro R_i indica la proveniencia del postulante i (i=1, …, n). R_i = 1 significa regiones y R_i = 0 significa RM.

Es importante lograr alta exigencia académica por lo que el programa quiere aceptar alumnos que en promedio tengan un puntaje de por lo menos Pmin. P_i es el puntaje del postulante i (i=1, …, n).

El ingreso generado por cada generación debe superar en por lo menos 20% los costos asociados C (UM).

En un principio cada alumno aceptado tiene que pagar un arancel de A UM.

El programa ofrece hasta B becas para alumnos excelentes (B < n). Los criterios para otorgar estas becas son los siguientes.

Un postulante i con un puntaje P_i mayor que 750 paga sólo 50% del arancel si viene de la RM y paga sólo 25% del arancel si viene de regiones.

El objetivo es maximizar el ingreso generado por cada generación aceptada.

1. Plantee un modelo de Programación Lineal para resolver este problema.
2. ¿Son todas las restricciones mencionadas necesarias? Comente.
3. ¿Se está favoreciendo a alguien con la formulación actual?

Problema 2 (Examen recuperativo 2009/2)

El profesor de un curso de optimización, alias "El Lobo", ha prometido arrendar un bus para el próximo asado del curso, al cual serán invitados todos los alumnos del semestre junto al equipo docente. Pero El Lobo no sólo arrendará el bus, sino también ha prometido a los estudiantes que el bus pasará a buscarlos a un punto cercano a sus hogares. El Lobo cuenta con P posibles paraderos del bus y debe establecer cuales de estos paraderos visitará. Dado lo lejano del lugar del asado, un invitado no podrá llegar si el bus no pasa por su paradero. Si el bus decide parar en el paradero p una cantidad D_p de alumnos se subirá al bus y El Lobo quiere tener por lo menos una cantidad I de invitados (ya que sufre de depresión si ve que llegan menos).

Por otra parte, "La Feña", su jefa directa, exige que el bus pase por su paradero para poder asistir (suponga que el índice p=1 corresponde al paradero de La Feña) y exige una distribución relativamente equitativa de los paraderos a visitar. Para esto se ha dividido el territorio en 4 zonas t={norte, sur, este,oeste}, sabiendo que los paraderos de la zona t pertenecen al conjunto Z_t y se ha exigido que si en cada zona t se visita un número n de paraderos, en las otras zonas no puedan visitarse más del doble ni menos de un tercio de paraderos. Suponga que el bus parte en la casa de El Lobo (paradero p=0), luego visita los distintos paraderos seleccionados y finalmente se dirige hasta el punto del asado (paradero p=9). Suponga, por simplicidad, que una vez que llega al paradero 9, el bus regresa vacío a la casa de El Lobo (p=0).

Además, El Lobo cuenta con un monto de dinero DIN que es lo máximo que se puede gastar en gasolina para el bus. Se sabe que el bus gasta L litros de gasolina por kilómetro, que el precio de la gasolina es de GAS pesos por litro y que la distancia entre los paraderos p y q es d_{pq} kilómetros. Por otro lado, es sabido que los paraderos ubicados en la zona sur son considerados de mayor peligro, por lo que el conductor debe ir más rápido. Debido a ello, se gastará W litros adicionales de gasolina por cada kilómetro recorrido entre paraderos de esta zona.

Por último, El Lobo sabe que en el paradero p=3 viven sólo gente de un importante equipo de fútbol nacional, mientras que en el paradero p=7 vive sólo gente del equipo rival. Para evitarse problemas, se ha decidido que si se visita uno de estos paraderos primero, el otro debe visitarse al final (para minimizar el contacto entre estos alumnos y ahorrarse posibles problemas).

Se busca minimizar el costo de arriendo del bus el cual es directamente proporcional al número de personas que es capaz de transportar, por lo que en realidad busca minimizar la capacidad máxima de personas que puede llevar el bus, pero cumpliendo las restricciones expuestas anteriormente.

Ayude a El Lobo a resolver el problema anterior, modelando el problema como un problema de programación lineal entera.

Solución:

Problema 1:

1. Variables de decisión:

$$Xi = \begin{cases} 1 & \text{Si se acepta al alumno i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Yi = \begin{cases} 1 & \text{Si alumno i recibe beca} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Nota: si el alumno pone una variable 1 si tienen mas de 750 pts y cero sino, sólo tendrá el puntaje en la restricción de asignar las becas (h) si relaciona dicha variable con el puntaje mediante una restricción y dicha restricción está bien planteada.

Restricciones:

a. Relación entre variables:

$$Yi \leq Xi$$

b. Se aceptan a lo más m postulantes:

$$\sum_{i=1}^{n} Xi \leq m$$

c. Al menos 40% de los aceptados deben ser de cada sexo:

$$0{,}4 * \sum_{i=1}^{n} Xi \leq \sum_{i=1}^{n} Xi * Si \leq 0{,}6 * \sum_{i=1}^{n} Xi$$

d. 50% de los aceptados deben venir de regiones:

$$0{,}5 * \sum_{i=1}^{n} Xi \leq \sum_{i=1}^{n} Xi * Ri$$

e. Puntaje promedio de los alumnos debe ser al menos Pmin:

$$P_{\min} * \sum_{i=1}^{n} Xi \leq \sum_{i=1}^{n} Xi * Pi$$

f. Ingreso generado debe superar en al menos 20% los costos:

$$\sum_{i=1}^{n} Xi * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * Ri * 0{,}75 * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * (1 - Ri) * 0{,}5 * A \geq 1{,}2 * C$$

g. Máximo B becas:

$$\sum_{i=1}^{n} Yi \leq B$$

h. Criterio para otorgar becas:

$$(Xi - Yi) * Pi \leq 750$$

Explicación: Si el puntaje de un postulante i es Pi mayor que 750 (por ejemplo 800), esto obliga a que (Xi – Yi)=0 para que se cumpla la restricción, con lo cual Xi=Yi=0 ó Xi=Yi=1 (El caso Xi=0 e Yi=1 también es factible, ya que -800<750 cumple la restricción, pero éste se descarta por la restricción "a"), con lo que obligatoriamente debemos darle beca al postulante i si lo aceptamos.

En caso de que un Pi sea menor que 750 (por ejemplo 700), el término (Xi – Yi) puede valer tanto 0 como 1 para que se cumpla la restricción, con lo que se podría llegar a pensar que le estamos dando beca a los alumnos con puntaje inferior a 750 (caso Xi=Yi=1). Sin embargo hay que notar que al resolver el PPL, al estar maximizando el ingreso, el programa que lo resuelve tratará de asignar la menor cantidad de becas posibles, pues éstas reducen el ingreso. Si el programa tiene la opción de decidir entre darle beca a un individuo con puntaje inferior a 750 o no, decidirá no hacerlo pues esto le genera mayor ingreso. Por esta razón, no hay problema en que la restricción permita darle beca con un puntaje menor a 750 ya que, gracias a la función objetivo, esto no ocurrirá.

i. Naturaleza de las variables:

$$Xi, Yi \in \{0,1\}$$

Función objetivo: (1 pto)

$$\max\{ \sum_{i=1}^{n} Xi * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * Ri * 0{,}75 * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * (1 - Ri) * 0{,}5 * A$$

2. Se puede eliminar la restricción i: ingreso > 1,2 * costos, pues al maximizar el ingreso podemos ver si se da o no esta restricción.
También se puede eliminar la restricción a: relación entre variables, pues dar becas disminuye la función objetivo, lo que hace que no tenga sentido asignar becas a postulantes que no hayan sido aceptados.

3. Nota: Lo que sigue tiene puntaje binario, es decir, todo o nada. El alumno puede tener máximo 1 punto, aún si contesta ambas alternativas planteadas.

Alternativa 1 (1 pto): Al maximizar el ingreso se favorece a los postulantes de menor puntaje, ya que se intentará dar la menor cantidad de becas posibles.
Fijense que el solver quiere dar la menor cantidad de becas posibles, ya que las becas disminuyen la utilidad en la función objetivo. Entonces, al resolver el problema asignará primero a las personas más cercanas al puntaje Pmin (de forma que en promedio el puntaje sea casi igual o igual a Pmin). Así, asignará una persona con puntaje sobre Pmin y luego suficientes personas con puntaje bajo Pmin para que se mantenga el promedio en Pmin. Luego se repite el proceso varias veces (asignar una persona con puntaje mayor a Pmin y suficientes personas con puntaje menor a Pmin para mantenerse cercano al puntaje Pmin, respetando la restricción "e"). Bajo este esquema podría incluso llegar a ocupar todos los cupos sin asignar ninguna beca, respetando todas las restricciones.

Alternativa 2 (0,5 pts): La restricción “h” obliga a que un alumno con más de 750 y que ha sido aceptado tenga beca. Por lo tanto, si se nos acaban las B becas, los alumnos restantes con más de 750 puntos no serán aceptados en la universidad. No se les da la posibilidad de pagar el arancel completo, simplemente se rechazan.

Problema 2:

Variables:

$X_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{Si el bus va del paradero p al paradero q} \\ 0 & \text{Sino.} \end{cases}$

Y = Capacidad máxima del bus

Restricciones:

1.- Naturaleza de las variables.

$$X_{pq}, \in \{0,1\} \qquad Y \in \mathrm{N}$$

2.- Respetar mínima cantidad de invitados.

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{P} X_{pq} D_p \geq I \qquad (p \neq q)$$

3.- Ir a buscar a la Feña.

$$\sum_{p=1}^{P} X_{p1} = 1 \qquad (p \neq q)$$

4.- Distribución equitativa.

$$\frac{1}{3} \cdot \sum_{p \in Zu} X_{pq} \leq \sum_{p \in Zt} X_{pr} \leq 2 \cdot \sum_{p \in Zu} X_{ps} \qquad \begin{array}{l} \forall q, r, s \in P \\ \forall t, u = \{norte, sur, este, oeste\}, t \neq u \end{array}$$

5.- Presupuesto.

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{P} X_{pq} \cdot L \cdot d_{pq} \cdot GAS + \sum_{p \in Zsur} \sum_{q=1}^{P} X_{pq} \cdot W \cdot d_{pq} \cdot GAS \leq DIN$$

Nota: Por simplicidad, suponemos que si un paradero está en la zona sur, se gastan los W litros adicionales solo para el tramo posterior a este paradero.

6.- Capacidad.

$$Y \geq \sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{P} X_{pq} \cdot D_p$$

7. Paraderos equipos de fútbol.

$$X_{3q} \leq X_{79} \ \forall q \neq 9$$
$$X_{7q} \leq X_{39} \ \forall q \neq 9$$

8. Si llego a un paradero, tengo que salir de el.

$$\sum_{p=1}^{P} X_{pq} = \sum_{r=1}^{P} X_{pr} \qquad \forall q \in P$$

9. "No hay subciclos".

$$\sum_{\substack{p \in S \\ \{0\} \notin S}} \sum_{\substack{q \in S \\ \{0\} \notin S}} X_{pq} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \text{ subconjunto de paraderos P tal que } 2 \leq |S| \leq P\text{-}2$$

Nota: Esta es la típica restricción del vendedor viajero donde no hay subciclos (o subtours). Sin embargo, en este caso tiene una salvedad (que no vimos en la auxiliar por razones de tiempo): Debemos excluir el índice 0, que representa el punto de partida del bus. Esto porque en este problema el óptimo es, en efecto, un subciclo, ya que NO es necesario pasar por todos los paraderos. De no excluir el cero, el programa encontraría, obligatoriamente, un óptimo donde el bus pasa por todos los paraderos posibles.

10. Condiciones iniciales.

$$\sum_{q=1}^{P} X_{0q} = 1 \ , \ \sum_{p=1}^{P} X_{p9} = 1 \ , \ X_{09} = 1$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl