Departamento de Ingeniería Industrial
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

IN3401: Estadística para la Economía y Gestión
Profesores: Marcelo Henríquez, Sebastián Maldonado
Auxiliares: José Miguel Carrasco, Gabriel Espejo

Pauta Auxiliar 1
7 de Abril de 2010

Solución P1:

$$\begin{aligned} P\binom{\text{Dos alumnos cumplan}}{\text{año el mismo dia}} &= 1 - P\binom{\text{Todos los alumnos cumplan}}{\text{año dias distintos}} \\ &= 1 - \frac{365}{365}\cdot\left(\frac{365-1}{365}\right)\cdot\left(\frac{365-2}{365}\right)\dots\left(\frac{365-n+1}{365}\right) \\ &= 1-\left(\frac{365!}{365^n(365-n)!}\right) \end{aligned}$$

Solución P2:

a) $\mathrm{P(B_1) = P(B_2)} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{b+n}}$

b) Ocupando probabilidades totales se tiene que:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|B_1)\cdot P(B_1) + P(B_2|\overline{B_1})\cdot P(\overline{B_1}) \\ &= \left(\frac{b+c}{b+c+n}\right)\left(\frac{b}{b+n}\right) + \left(\frac{b}{b+c+n}\right)\left(\frac{n}{b+n}\right) \\ &= \left(\frac{b+c+n}{b+c+n}\right)\left(\frac{b}{b+n}\right) \\ &= \left(\frac{b}{b+n}\right) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(\text{Urna tenga } r+c \text{ bolitas blancas}|B_2) &= \frac{P(B_2|\text{Urna tenga } r+c \text{ bolitas blancas})\cdot P(B_2)}{P(\text{Urna tenga } r+c \text{ bolitas blancas})} \\ &= \frac{\left(\frac{b+c}{b+c+n}\right)\left(\frac{b}{b+n}\right)}{\left(\frac{b}{b+n}\right)} \\ &= \left(\frac{b+c}{b+c+n}\right) \end{aligned}$$

Solución P3:

Existen 4 opciones para que la inversión genere valor durante el segundo día.

a) Se escoge el portafolio 1 durante el primer día, el portafolio aumenta su valor durante el primer día, y aumenta de valor durante el segundo día.
b) Se escoge el portafolio 1 durante el primer día, el portafolio disminuye su valor durante el primer día, y el portafolio 2 aumenta su valor durante el segundo día.
c) Se escoge el portafolio 2 durante el primer día, el portafolio aumenta su valor durante el primer día, y luego aumenta de valor el segundo día.
d) Se escoge el portafolio 2 durante el primer día, el portafolio disminuye su valor durante el primer día y el portafolio 1 aumenta su valor durante el segundo día.

Entonces la probabilidad de generar ganancias el segundo día, es igual a la suma de las probabilidades de ocurrencia de cada uno de los cuatro eventos anteriores.

$$\begin{aligned} P(Aumentar\ de\ valor\ el\ segundo\ dia) &= P(1)+P(2)+P(3)+P(4) \\ &= \frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}(1-p)q+\frac{1}{2}(1-q)p+\frac{1}{2}q^2 \\ &= \frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{1}{2}(p+q) \end{aligned}$$

Solución P4:

a) $P(enfermo|test\ positivo) = p(test\ positivo|estoy\ enfermo)\cdot\frac{P(test\ positivo)}{P(estar\ enfermo)}$

La probabilidad de estar enfermo es de 0.001 (uno de cada mil chilenos). La probabilidad de que el test salga positivo dado que se está enfermo es de 0.998. La probabilidad de que el test entregue positivo se calcula con probabilidades totales.

$$\begin{aligned} P(postitivo) &= P(positivo|estar\ enfermo)\cdot P(estar\ enfermo) \\ &\quad + P(positivo|estar\ sano)\cdot P(estar\ sano) \\ &= 0.998\cdot 0.001+(1-0.998)\cdot(1-0.001) \\ &= 0.002996 \end{aligned}$$

Con esto, $P(enfermo|test\ positivo) = 0.998\cdot\frac{0.002996}{0.001} = 0.33311$

b) Existen tres costos que hay que considerar en esta iniciativa.

1. El primer costo es el de realizar el examen $C_1 = 16.000.000\cdot 10 = 160.000.000$
2. El segundo costo a considerar es el de entregarle el tratamiento preventivo a todos aquellos que fueron diagnosticados como positivos por el test.
   La probabilidad de que el test resulte positivo es de 0.002996, por lo que en una población de 16 millones de habitantes, se tiene que el número esperado de resultados positivos es de 47936 casos, lo que tiene un costo de $C_2 = 47936000$

3. El tercer costo a considerar es el de aquellos enfermos que no fueron detectados por el test, vale decir, que están enfermos Y que el test resultó negativo. La probabilidad de que esto ocurra es:

$$\begin{aligned} P(Enfermo\ y\ Negativo) &= P(Negativo|Enfermo) \cdot P(Enfermo) \\ &= (1-0.998) \cdot 0.001 \end{aligned}$$

   Esto es, 2×10^{-6}.

   Con esto, el costo del tratamiento a los no detectados es de $C_3 = 2 \times 10^{-6} \cdot 16.000.000 \cdot 1.000.000 = 32000000$

El costo total de la iniciativa es $C_1 + C_2 + C_3 = 671.360.000$

c) En este caso también existen tres fuentes de costos:

1. El costo de realizar los exámenes a toda la población, más el segundo examen a aquellos que el primer examen arrojó como positivos $C_1 = (16.000.000 + 47.936) \cdot 10 = 160.047.930$
2. El costo de entregar tratamiento a aquellos cuyos dos exámenes fueron positivos Primero calculamos

$$\begin{aligned} P(Positivo, Positivo) &= P(Positivo, Positivo|Enfermo) \cdot P(enfermo) \\ &+ P(Positivo, Positivo|Sano) \cdot P(sano) \\ &= (0.998)^2 \cdot 0.001 + (0.002)^2 * 0.999 \\ &= 0.001 \end{aligned}$$

   Este tratamiento tiene un costo total de $C_2 = 0.001 \cdot 16.000.000 \cdot 10.000$, vale decir, 160.000.000
3. El costo de entregar tratamiento a aquellos enfermos que no fueron detectados por los exámenes. En este caso tenemos dos posibilidades
   (1) Que el examen haya salido negativo la primera vez Y que esté enfermo $P(Negativo, Enfermo) = 2 \times 10^{-6}$.
   (2) Que el examen haya salido positivo la primera vez Y negativo la segunda vez Y que esté enfermo

$$\begin{aligned} &P(Positivo, Negativo, Enfermo) \\ &\quad = P(Positivo|Enfermo)P(Negativo|Enfermo)P(Enfermo) \\ &\quad = 0.002 \cdot 0.998 \cdot 0.001 = 0.000001996 \end{aligned}$$

   Con esto se tiene que el tercer costo asociado es de

$$C_3 = (2 \times 10^{-6} + 0.000001996) \cdot 1.000.000 = 63.936.000$$

Así el costo de esta iniciativa es de $C_1 + C_2 + C_3 = 384.415.360$

Solución P5:

a) $\frac{42}{83}$

b) $\frac{58}{83}$

c) $\frac{10}{83}$

d) $P(B \vee NE) = P(B) + P(NE) - P(B \wedge NE) = \frac{58}{83} + \frac{41}{83} - \frac{26}{83} = \frac{53}{83}$

e) $\frac{32}{42}$

f) $\frac{32}{58}$

Solución P6

a) Para la acción $i = A, B$ se tiene (Asumiendo que la acción se transa 30 días en el mes):

$$\begin{aligned} r_m^i &= 30\, r_d^i \\ \sigma_m^i &= \sqrt{30}\, \sigma_d^i \end{aligned}$$

b) La media del retorno del portafolio es de $r_d^p = \frac{1}{2} r_m^A + \frac{1}{2} r_m^B$

La varianza del retorno del portafolio es de

$$Var(r_d^p) = \alpha^2 Var\left(r_d^A\right) + (1-\alpha)^2 Var\left(r_d^B\right) + 2 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot Cov(r_d^A, r_d^B)$$

Con α el porcentaje del portafolio invertido en la acción A.

Se sabe por otra parte que el coeficiente de correlación cumple la relación

$$\rho = \frac{Cov(r_d^A, r_d^B)}{\sqrt{Var(r_d^A) Var(r_d^B)}}$$

Con esto se tiene que la varianza del portafolio es de $\mathrm{Var}(\mathrm{r_d^p}) = 0.00007385$ con lo que la desviación estándar es de $\sigma_\mathrm{d}^\mathrm{P} = 0.859\%$

c) Queremos encontrar el valor de α que minimiza la varianza diaria $Var(r_d^p)$.

Simplemente derivamos la expresión $\alpha^2 Var\left(r_d^A\right) + (1-\alpha)^2 Var\left(r_d^B\right) + 2 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot Cov\left(r_d^A, r_d^B\right)$ con respecto a α e igualamos a 0, obteniendo

$$\alpha = \frac{Var\left(r_d^A\right) - Cov\left(r_d^A, r_d^B\right)}{Var(r_d^A) + Var(r_d^B) - 2Cov(r_d^A, r_d^B)}$$

Reemplazando los valores se obtiene que el porcentaje a invertir en la acción A es de 80.77%.