# Percentiles



- El percentil $p$ de una variable aleatoria $X$ es número más pequeño, que denominaremos $x_u$ que cumple:

$$p = P\{X \leq x_u\} = F(x_u)$$

- el percentil es, por tanto, el valor de la variable aleatoria para el cual la función de distribución acumulada toma el valor $p$.

# Distribuciones Discretas - Binomial



- Ensayo de Bernoulli: Es un experimento que puede arrojar 2 resultados posibles. A uno de los resultados se lo denomina arbitrariamente "éxito" y al otro "fracaso".

- El ensayo de Bernoulli lleva asociada una probabilidad (de éxito). Ej: tirar un dado, donde el éxito es sacar 5:

- P[éxito]=1/6;   P[fracaso]=1-1/6=5/6

- Un *proceso de Bernoulli* considera *n* ensayos de Bernoulli independientes

# Distribuciones Discretas – Binomial(2)



- La probabilidad de obtener k éxitos en un proceso de Bernoulli de *n* ensayos se distribuye Binomial(*n*,p):

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

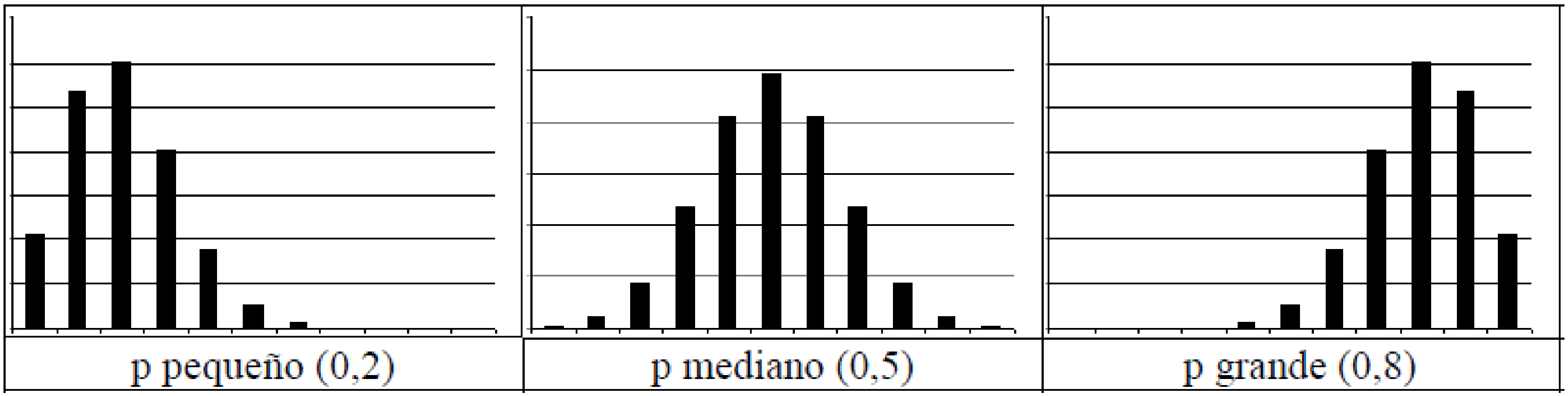
- Esto se cumple cuando $0 \leq k \leq n$. Para los valores restantes de *k* esta probabilidad es cero.

- Además se tiene E(X)=*np* y V(X)=*np(1-p)*

# Distribuciones Discretas – Binomial(3)



- Aspecto de la distribución binomial:




- Importante señalar que todos los valores entre 0 y n tienen probabilidad no nula, aunque la probabilidad de los valores cercanos a n será muy pequeña si p es chico, y la probabilidad de los valores cercanos al 0 será muy pequeña si p es grande.

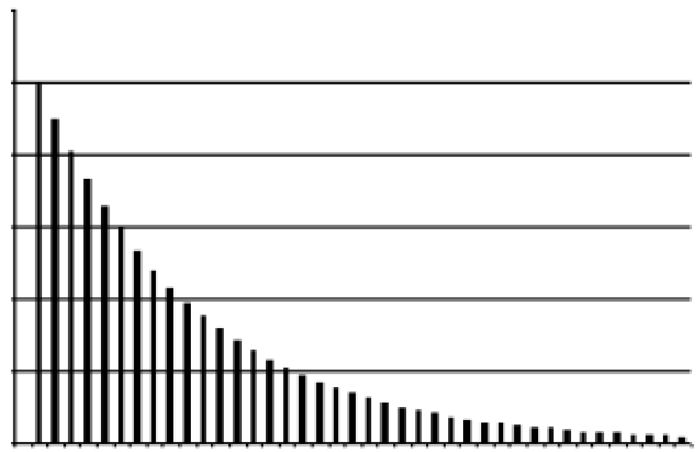
# Distribuciones Discretas – Geométrica



- La probabilidad de obtener el primer éxito en el intento número x se distribuye geométrica(p):

$$\mathbb{P}(X = x) = p \quad (1 - p)^{x-1}$$

- Además se tiene E(X)=*1/p* y V(X)=*(1-p)/p²*
- Aspecto:



# Distribuciones Discretas – Pascal



- "¿Cuál es la probabilidad de obtener el k-ésimo éxito en el intento número x?“
- **X** se distribuye **Pascal(k , p):**

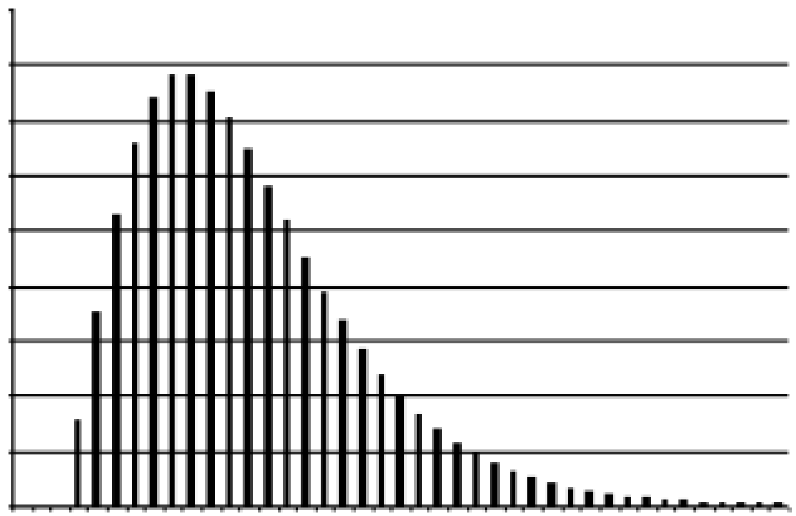
$$P(X=x)=\begin{cases}\binom{x-1}{k-1}p^k.(1-p)^{x-k} & x\geq k\\ 0 & \forall\, otro\ x\end{cases}$$

- Además se tiene E(X)=*k/p* y V(X)=k*(1-p)/p²*

# Distribuciones Discretas – Pascal(2)



- Aspecto



- Todos los valores menores que k tienen probabilidad nula. A partir de k, la probabilidad crece con mayor o menor velocidad dependiendo de p, y luego de llegar al valor más probable, decrece lenta y asintóticamente hacia el 0.

# Distribuciones Discretas – Poisson



- "¿Cuál es la probabilidad de obtener x eventos en un intervalo de tiempo?”
- La distribución de Poisson usa el parámetro $\mu = \lambda T$, donde T es la longitud del intervalo, y $\lambda$ es la cantidad esperada de eventos por unidad de tiempo, entonces $\mu$ resulta ser la media.
- **X:Poisson(μ)**

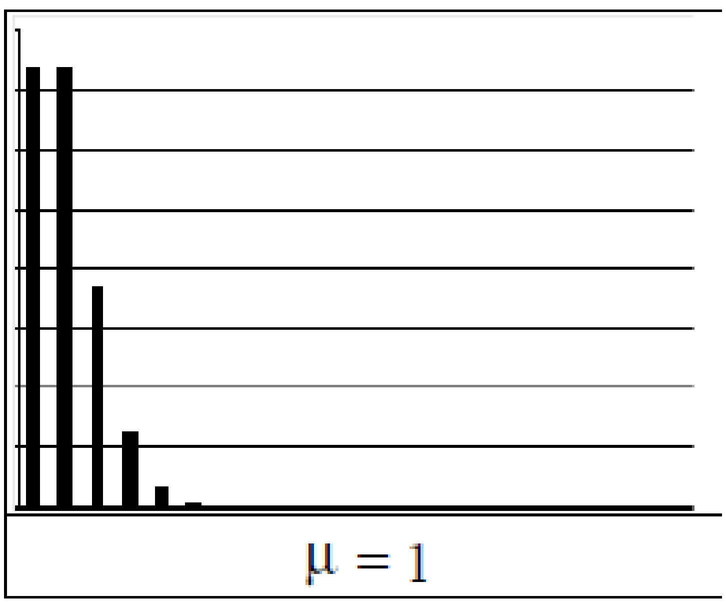
$$P(X=x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

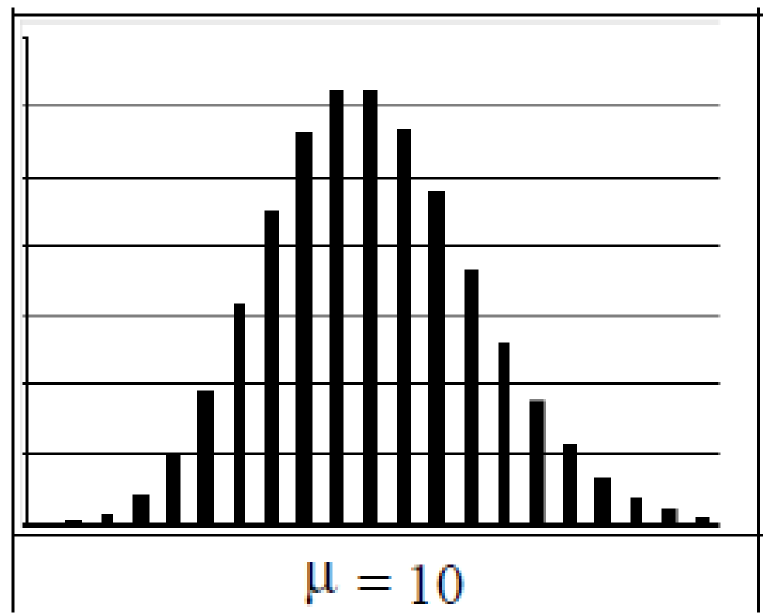
# Distribuciones Discretas – Poisson(2)



- La esperanza y varianza de una distribución de Poisson: $E(X)= \mu$ y $V(X)= \mu$

- Aspecto:



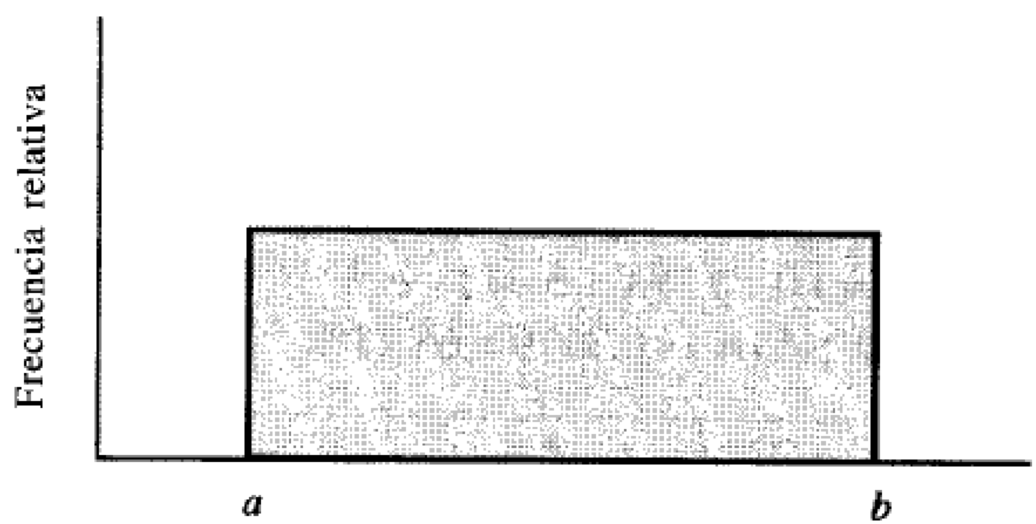



# Distribuciones Continuas– Uniforme



- En una distribución uniforme las probabilidades son las mismas para todos los posibles resultados

- Aspecto: Uniforme (a,b)



# Distribuciones Continuas– Uniforme(2)



- La media está a mitad de camino de los puntos extremos:

$$E(x) = \mu = \frac{a + b}{2}$$

- Varianza: $\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$

- Función de densidad: f $= \frac{1}{b - a}$

# Distribuciones Continuas– Exponencial



- Mientras que la distribución de Poisson describe las tasas de llegadas (personas, camiones, etc) dentro de un período de tiempo, la dist. Exponencial estima el lapso entre arribos

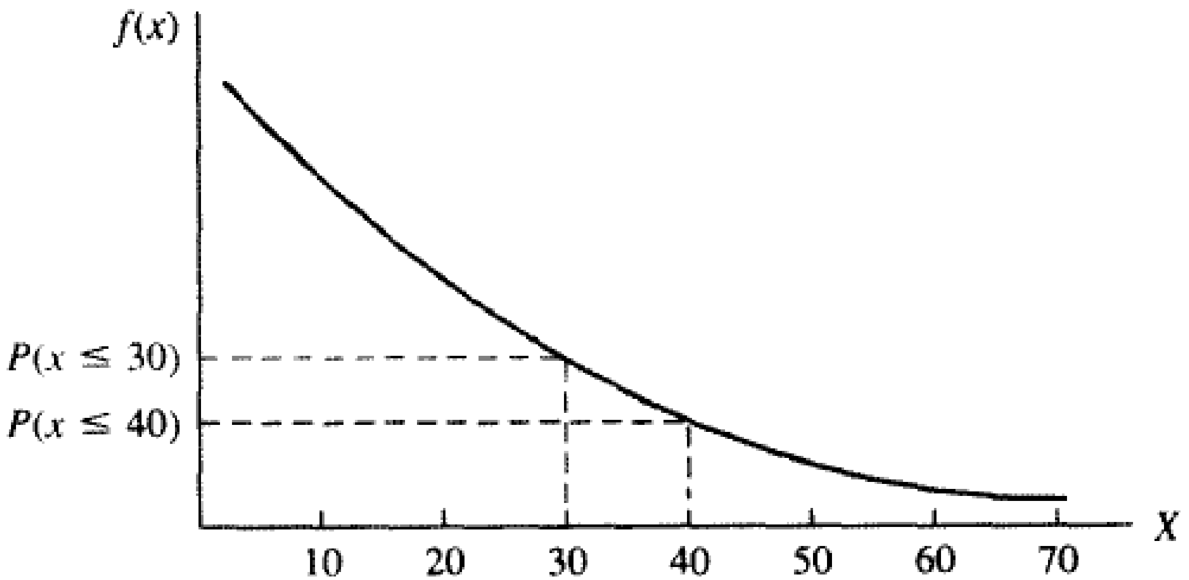
$$f(x) = \mu e^{-\mu x}$$

- La esperanza y varianza de una distribución Exponencial: E(X)= μ y V(X)= μ

# Distribuciones Continuas– Exponencial(2)



- Aspecto

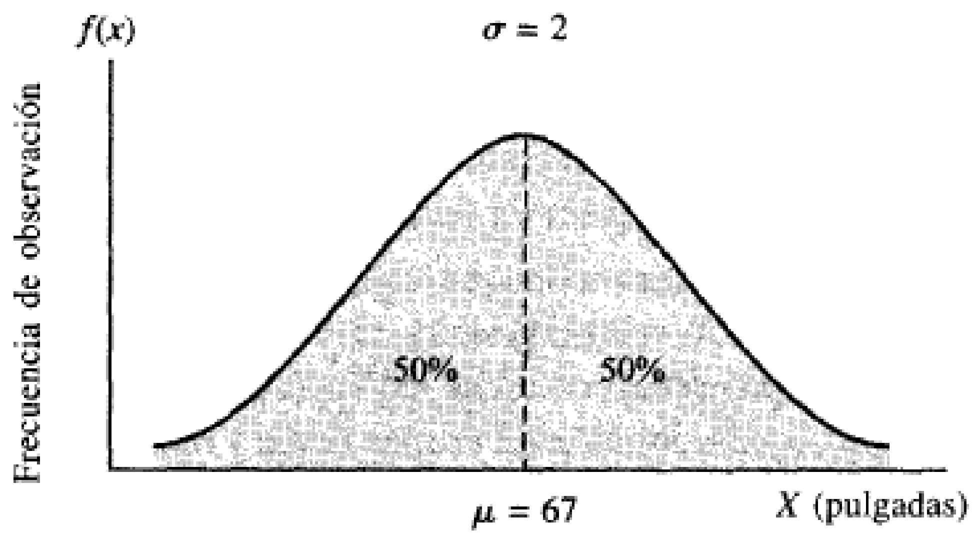


# Distribuciones Continuas– Normal



- Distribución simétrica y en forma de campana, asociada a la regla empírica.

- Aspecto N(μ,σ):



# Distribuciones Continuas– Normal(2)



- Normal tipificada o estándar: permite analizar las propiedades de la Normal sin depender de parámetros:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- El valor de Z se puede interpretar como el número de desviaciones estándar a las que una observación está por encima o por debajo de la media.

- Para obtener la probabilidad de un evento se debe ir a la tabla de la normal estándar.

# Distribuciones Continuas– Normal(3)



- Ej:

TelCom Satellite presta servicios de comunicación a los negocios del área metropolitana de Chicago. Los funcionarios de la compañía han aprendido que la transmisión satélite promedio es de 150 segundos, con una desviación estándar de 15 segundos. Los tiempos parecen estar distribuidos normalmente.

Para estimar de manera apropiada la demanda del cliente por sus servicios y establecer una estructura de tarifas que maximice las utilidades corporativas, TelCom debe determinar qué tan probable es que algunas llamadas se presenten. El director de servicios desea que usted proporcione estimados de la probabilidad de que una llamada dure:

*a.* Entre 125 y 150 segundos.

*b.* Menos de 125 segundos.

*c.* Entre 145 y 155 segundos.

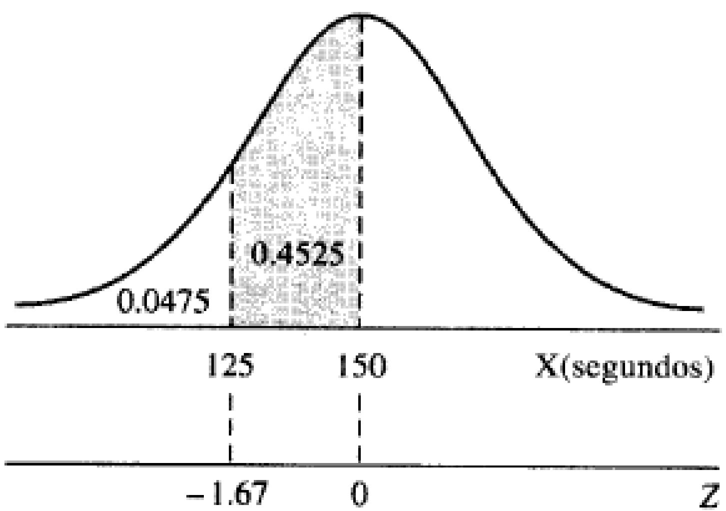
*d.* Entre 160 y 165 segundos.

# Distribuciones Continuas– Normal(4)



- a) 0.4525

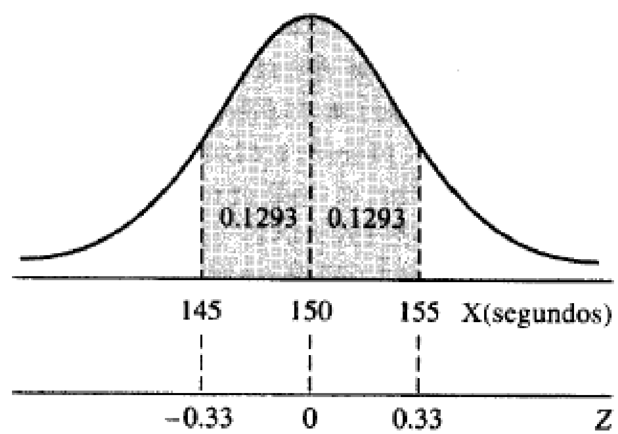
$$Z = \frac{125 - 150}{15} = -1.67$$




b)0.5-0.4525=0.0475

c) 0.2586

$$Z = \frac{145 - 150}{15} = -0.33$$



# Distribuciones Continuas– Normal(5)

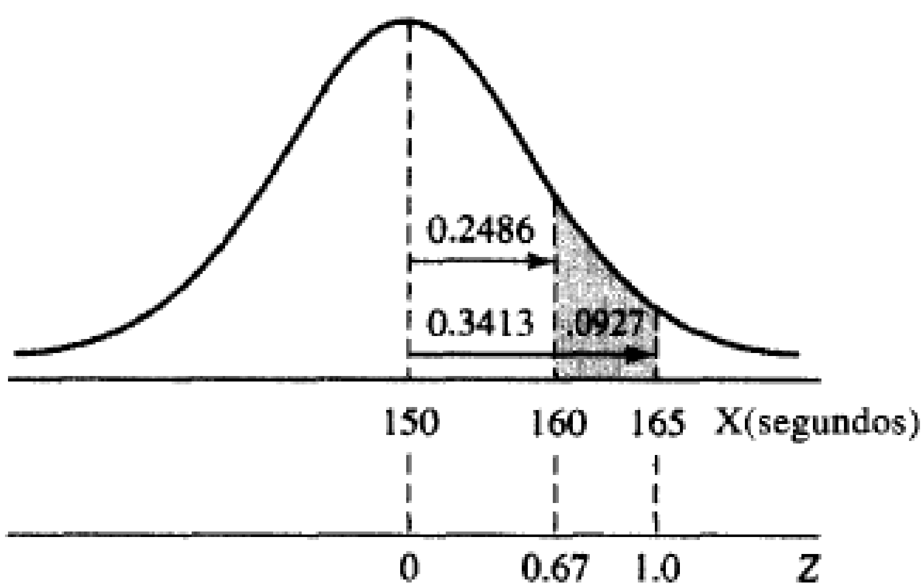


- d)

$$Z = \frac{165 - 150}{15} = 1$$

Con $Z = 1$, el área es 0.3413. Para hallar el área entre 150 y 160,

$$Z = \frac{160 - 150}{15} = 0.67$$



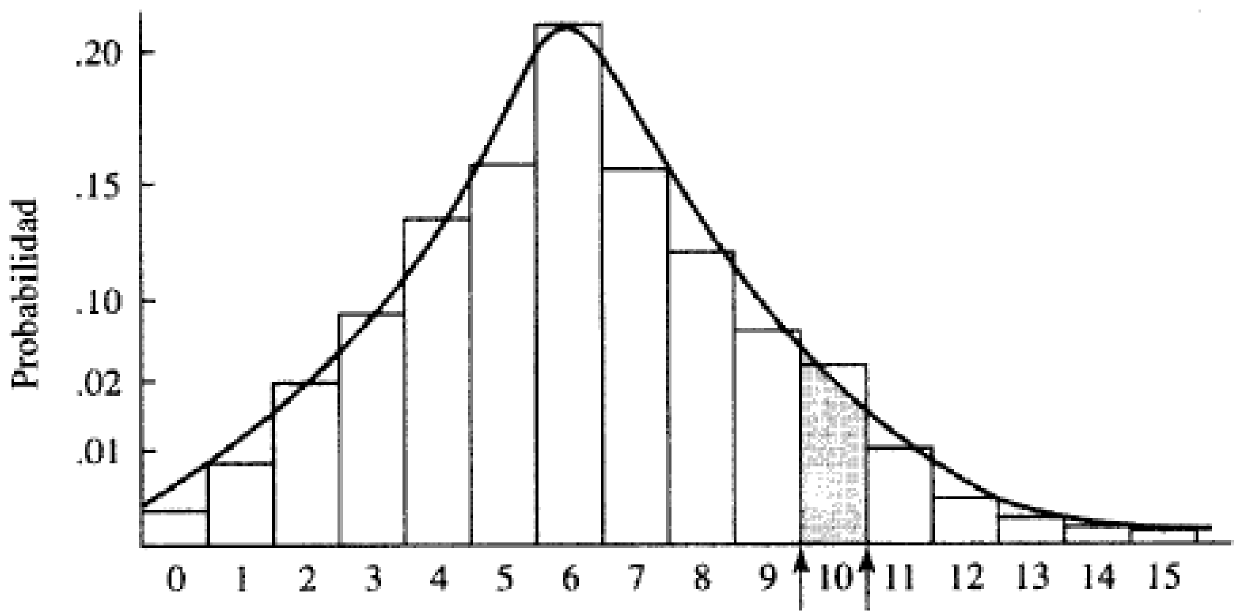

para un área de 0.2486. Por tanto,

$$P(160 \le X \le 165) = 0.3413 - 0.2486 = 0.0927.$$

# Distribuciones Continuas– Normal(6)



- si $n$ es suficientemente grande una dist. binomial puede aproximarse a una normal de parámetros $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$



# Distribuciones Continuas– Normal(7)



- Función de densidad (estandarizada):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

- Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\,\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

- FDA:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

## Distribuciones Continuas– chi-cuadrado



- La distribución $\chi^2$ con *k* grados de libertad se utiliza comúnmente para inferencia estadística, y representa la distribución de la suma de los cuadrados de k v.a. normales estándar independientes $X_1 \ldots X_k$.

$$Q = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \qquad Q \sim \chi^2(k).$$

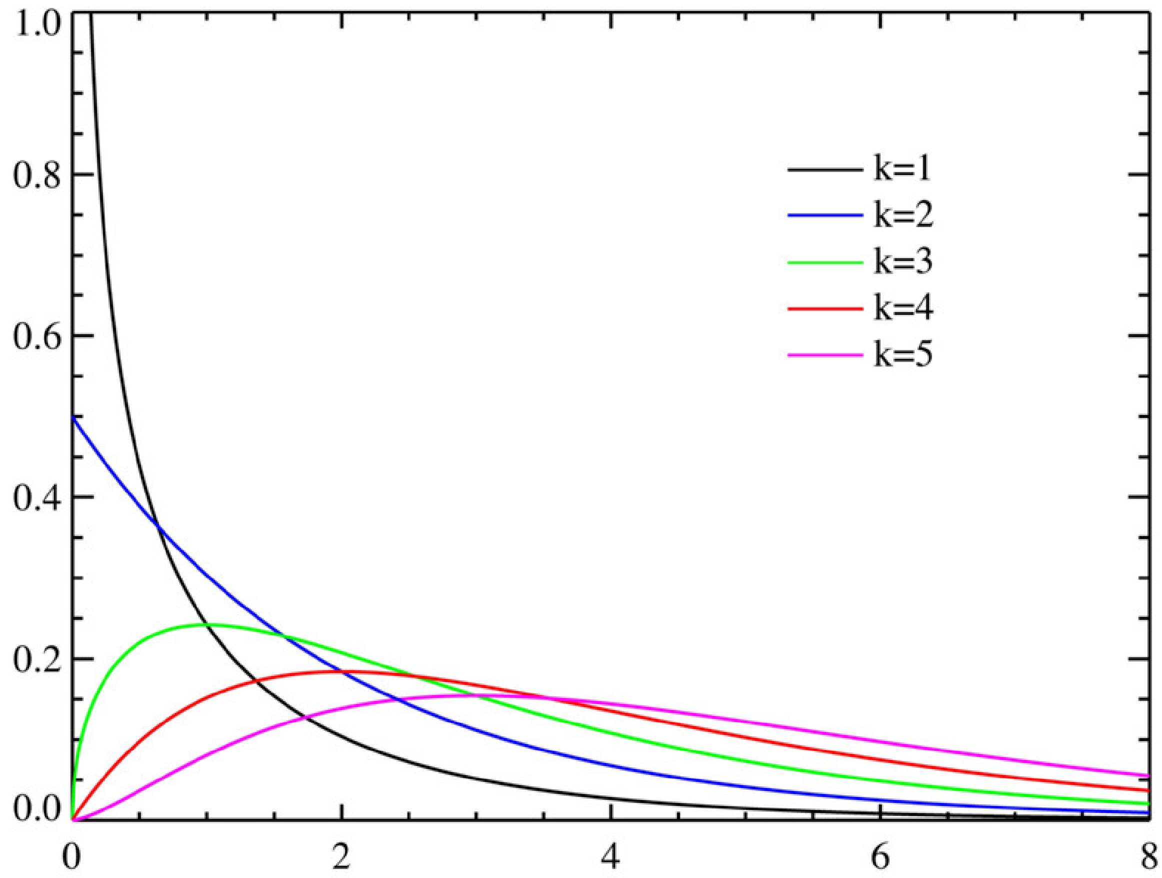
- Función de densidad ($\Gamma$=función Gamma):

$$f(x;\,k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}\, x^{k/2-1} e^{-x/2}\, \mathbf{1}_{\{x\geq 0\}},$$

# Distribuciones Continuas– chi-cuadrado(2)



- Aspecto:



# Distribuciones Continuas– F-Fisher



- Derivada de la distribución $\chi^2$, también se utiliza frecuentemente en la estadística inferencial. También conocida como F de Snedecor.

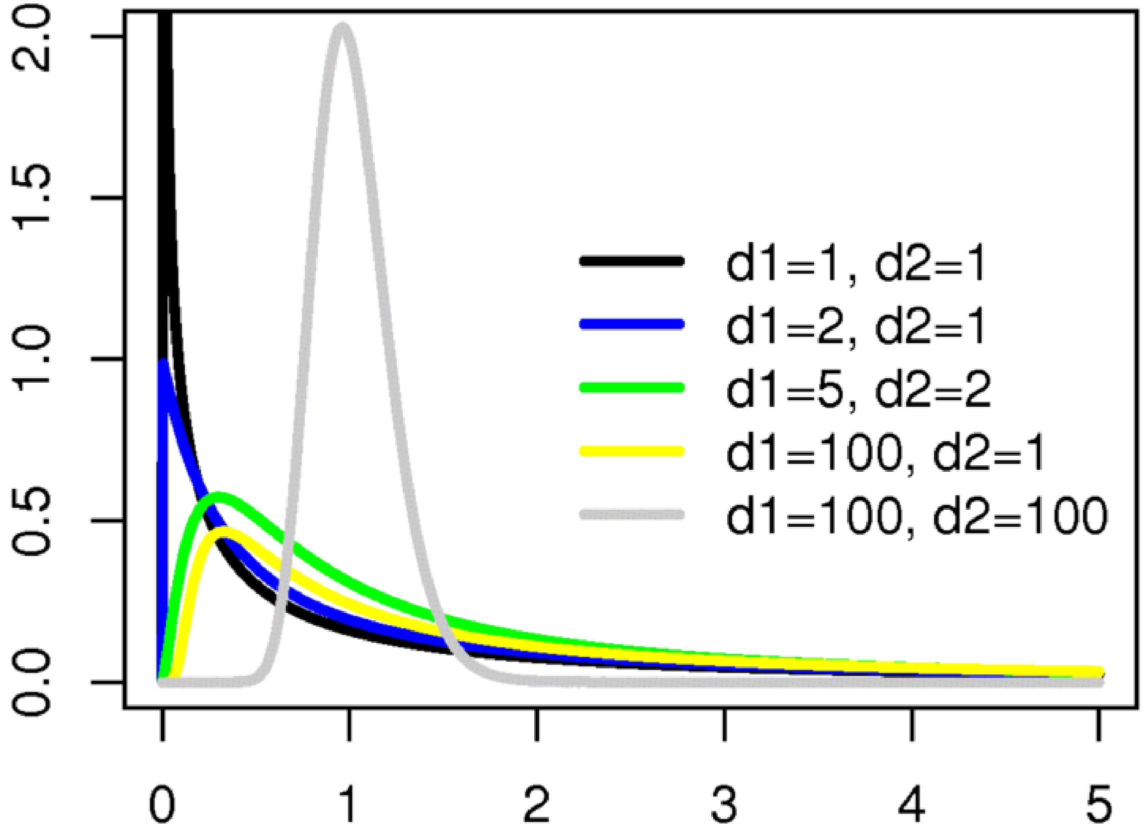
- La distribución nace del cociente de dos variables $U_1$ y $U_2$ independientes distribuidas $\chi^2$ con $d_1$ y $d_2$ grados de libertad respectivamente:

$$\frac{U_1/d_1}{U_2/d_2} \sim F(d_1,d_2)$$

# Distribuciones Continuas– F-Fisher(2)



- Aspecto



# Distribuciones Continuas– t-Student



- Similar a la distribución normal (simétrica, forma de campana), se suele utilizar en muestras pequeñas.

- Se caracteriza por una varianza mayor a la normal y dependiente de los grados de libertad (el número de observaciones de la muesta).

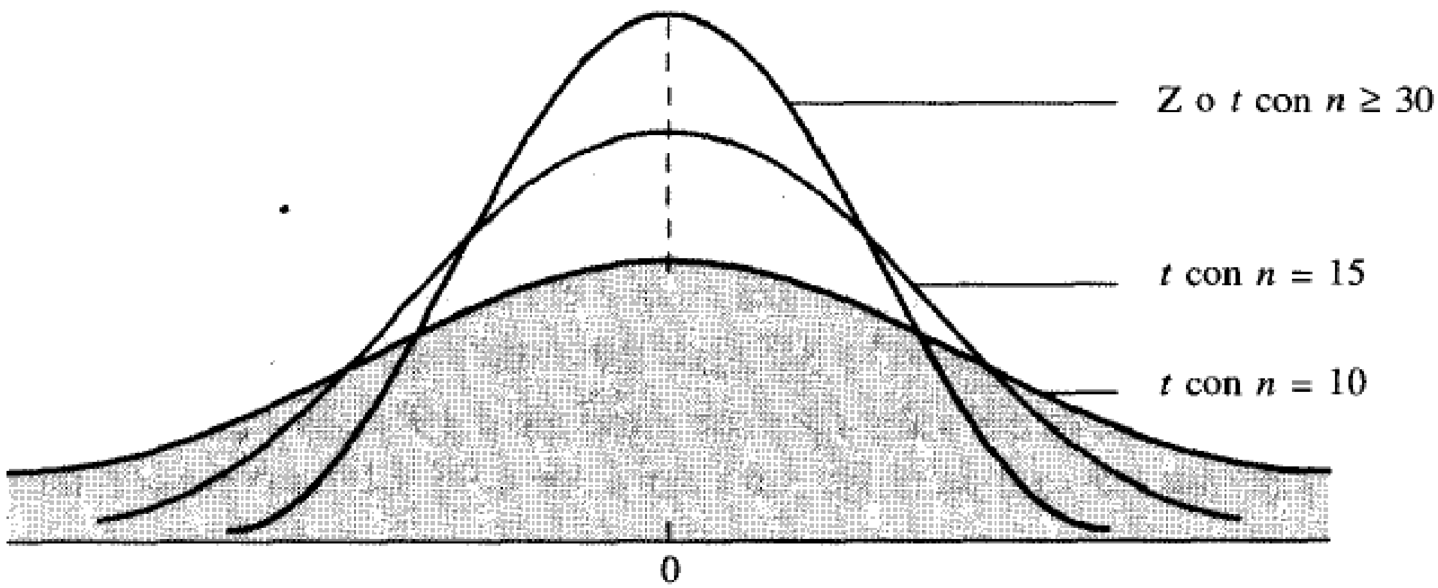
- La distribución t proviene del ratio: (V ~ $\chi^2$ con $\nu$ g.l)

$$\frac{Z}{\sqrt{V/\nu}} = Z\sqrt{\nu/V}$$

# Distribuciones Continuas– t-Student



- La distribución t tiende a Z cuando *n* aumenta:




- Varianza: $\dfrac{\nu}{\nu - 2}$ for $\nu > 2$