INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesor : Matteo Triossi
Auxiliar : Nicolás Riquelme
Sección : 2
Fecha : 28 de abril

Pauta CTP Nº 3
IN3202 –Microeconomía

P1. Considere una economía de intercambio con dos consumidores y dos bienes.

Las preferencias de cada agente están dadas por $\mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \ln(\mathrm{x}+1) + \ln(\mathrm{y}+1)$

a) Suponga que la dotación inicial es una unidad de cada bien para cada uno de los agentes. Calcule cuales son las asignaciones pareto eficientes en esta economía, y muestre que la dotación inicial es pareto eficiente. (2,5 pto.)
b) Plantee el problema que resuelve cada consumidor y calcule el equilibrio competitivo en esta economía. Como recomendación, calcule las demandas de cada uno de los bienes de los individuos, e imponga que la suma de las demandas (para cada uno de los bienes) tiene que ser igual a la cantidad existente en la economía. (2,5 pto.)
c) Pruebe que es posible encontrar un equilibrio competitivo para cualquier asignación de dotaciones inicial. Asuma que cada individuo recibe una dotación $e_{1,i}, e_{2,i}$ para cada bien y que $e_{1,1} + e_{1,2} = 2$, $e_{2,1} + e_{2,2} = 2$ (1 pto.)
d) (Bonus) Ocupando lo obtenido en la parte anterior, muestre que cualquier asignación pareto eficiente puede ser obtenida como un equilibrio competitivo para una asignación de dotaciones iniciales particular.
En particular, demostrar lo anterior es verificar el segundo teorema del bienestar para esta economía. (2 pto.)

Sol:

a) Dado que las funciones de utilidad son las mismas para los dos individuos, se tiene que las asignaciones pareto eficientes corresponden a la diagonal de la caja de edgeworth.
Como la cantidad total de cada uno de los bienes en la economía es la misma, serán todas las asignaciones tal que $x = y$. Luego, la dotación inicial es pareto eficiente.

b) Cada consumidor resolverá

$$max_{x_i,y_i} \ \ln(x_i+1) + \ln(y_i+1)$$

$$s.a. \ p_x x_i + p_y y_i = p_x + p_y$$

$$\frac{y_i + 1}{x_i + 1} = \frac{p_x}{p_y}$$

Ocupando la ecuación anterior junto con la restricción presupuestaria queda que

$y_i = \frac{p_x}{p_y} \qquad x_i = \frac{p_y}{p_x}$

Ocupando que

$x_1 + x_2 = 2,\ \ y_1 + y_2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad p_y = \ p_x \quad \Longrightarrow \ y_i = 1 \ \ , \ \ x_i = 1$

Luego el equilibrio competitivo que se alcanza es la misma dotación inicial que se tenía. Es decir, no existirá intercambio en esta economía.

c) Cada consumidor resolverá

$$max_{x_i, y_i} \ \ln(x_i + 1) + \ln\,(y_i + 1)$$

$$s.a.\ p_x x_i + p_y y_i = e_{1,i} p_x + e_{2,i} p_y$$

$$\frac{y_i + 1}{x_i + 1} = \frac{p_x}{p_y}$$

Ocupando la ecuación anterior junto con la restricción presupuestaria queda que

$y_i = \frac{p_y(e_{2,i} - 1) + p_x(e_{1,i} + 1)}{2p_y} \qquad x_i = \frac{p_x(e_{1,i} - 1) + p_y(e_{2,i} + 1)}{2p_x}$

Luego, como

$$x_1 + x_2 = 2,\ \ y_1 + y_2 = 2 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{p_x(e_{1,1} - 1) + p_y(e_{2,1} + 1)}{2p_x} + \frac{p_x(e_{1,2} - 1) + p_y(e_{2,2} + 1)}{2p_x} = 2$$

$$\frac{p_y(e_{2,1}-1)+p_x(e_{1,1}+1)}{2p_y}+\frac{p_y(e_{2,2}-1)+p_x(e_{1,2}+1)}{2p_y}=2$$

Desarrollando se llega a qué:

$$\Rightarrow p_y = \ p_x \ \Rightarrow \ y_i = \frac{e_{2,i}+e_{1,i}}{2} \qquad x_i = \frac{e_{1,i}+e_{2,i}}{2}$$

Donde se cumple que $x = y$ independiente de las dotaciones iniciales.

Que es el equilibrio competitivo en función de las dotaciones iniciales.

d) (Bonus)

De la parte a), sabemos que una asignación eficiente es tal que cumple con $x = y$

En particular, para un valor eficiente $x = y = \bar{x}$ fijo

Entregando dotaciones iniciales tal que $e_{1,1} + e_{2,1} = 2\bar{x}$, $e_{1,1} + e_{1,2} = 2$, $e_{2,1} + e_{2,2} = 2$

Se obtiene el equilibrio competitivo $x = y = \bar{x}$ dado.

P2. Suponga que existen dos agentes, que tienen una utilidad $\mathrm{u_i(x_i, z) = x_i + a_i\sqrt{z}}$ donde xi representa el consumo de un bien privado y z el nivel de provisión del bien público. Además $\mathrm{a_i}$ representa la importancia del bien público para el agente i. Para simplificar, asumamos que $\mathrm{a_1 = 1}$ y $\mathrm{a_2 = 2}$. Ambos agentes deciden simultáneamente cuanto consumir y las contribuciones al bien público. Además suponga que ambos individuos tienen un ingreso de w . Existe una empresa que para producir q unidades del bien público tiene un costo de $\mathrm{C(q) = q}$. El precio de bien x es 1.

Suponga que para la provisión del bien público se cobra un precio diferenciado a cada uno de los agentes $\mathrm{p_i}$

a) Resuelva el problema que resuelve cada individuo. Recuerde que cada individuo a priori tiene un nivel distinto de preferencia en la cantidad de z. En particular, calcule cuanto es el nivel optimo de z para cada uno de los individuos (1 pto.)
b) Plantee el problema que resuelve la firma que provee el bien público. Recuerde que los ingresos de la firma estarán dados por los ingresos debido al precio que se le cobra a cada individuo. (1 pto.)

c) Imponga que los niveles de bien público en la economía deben ser iguales. Esto es que decir $z_1 = z_2 = z_{firma}$ (demanda=oferta). Con esto encuentre cuales serán los precios cobrados a cada uno de los individuos y la cantidad de bien público en la economía. (1 pto)

d) Resuelva nuevamente el problema anterior pero en el caso en que el precio del bien público es igual para los dos individuos. Calcule este nuevo precio y la cantidad de bien público en la economía. (2 pto.)

e) Interprete los resultados comparando los 2 casos. (1 pto.)
En particular el caso con precios distintos recibe el nombre de equilibrio de Lindahl, que surgió como una buena solución para el financiamiento de bienes públicos. El problema surge por la imposibilidad de conocer las distintas funciones de utilidad en la economía, dado que los agentes nunca revelarán la verdad en cuanto a la valoración que tienen de un bien.

Sol:

a) Cada agente resolverá:

$$max_{x_i,z_i} \;\; x_i + a_i\sqrt{z}$$

$$s.a. \;\; x_i + p_i z_i \leq w_i$$

Con $z = z_1 + z_2$

$$\text{CPO:} \quad z = \frac{{a_i}^2}{4{p_i}^2}$$

b) La firma resolverá:

$$max_z \; \sum_{i=1}^{2} p_i \, z - z$$

$$\text{CPO:} \quad \sum_{i=1}^{2} p_i = 1$$

c) En equilibrio

$$\Rightarrow \frac{{a_1}^2}{4{p_1}^2} = \frac{{a_2}^2}{4{p_2}^2} \;\; \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

Ocupando la condición de la firma

$$\frac{a_1}{a_2} p_2 + p_2 = 1$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \quad , \qquad p_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{2}{3} \quad , \qquad p_1 = \frac{1}{3} \quad , \qquad z = \frac{9}{4}$$

d) Como solo se tiene un único precio, al tener la firma que provee el bien público costos de la forma $c(q) = q \;\; , p = c'(q) = 1$

$$max_{x_i, z_i} \;\; x_i + a_i\sqrt{z}$$
$$s.a. \;\; x_i + z_i \leq w_i$$

CPO: $\quad -1 + \frac{a_i}{2\sqrt{z_1+z_2}} = 0$

$$\frac{a_i}{2\sqrt{z_1 + z_2}} = 1$$

Como esta ultima ecuación se tiene para los dos individuos, no existen soluciones interiores para el problema. Luego, uno de los dos individuos tendrá soluciones esquina y no aportara para el bien público (le convendrá consumirse todo). Intuitivamente el que menos valora el bien público no aportara para este, y el otro individuo aportará todo.

$$z = z_2 = 1 \quad , \qquad z_1 = 0$$

Analíticamente, para el individuo 1 le es más conveniente gastar su ingreso en consumir el bien x que gastar en el bien público, dado que el otro individuo ya gasto para el bien público cierta cantidad. La utilidad marginal de consumir el bien x es mayor que del bien z cuando $z = 1$ por lo que el individuo 1 escoge $z_1 = 0$

e) Podemos ver en el caso de un precio que existirá un agente free rider, ya que no gastará para el bien público aprovechándose de que el otro individuo lo valora más. Por otro lado, vemos que con precios distintos cada individuo paga acorde a su valoración del bien público. Además, se puede notar que la provisión de bien público es menor en el caso con un solo precio debido al efecto de free rider de uno de los individuos.