INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesor: Matteo Triossi
Coordinador: Maria Jose Lambert
Auxiliar: Nicolás Riquelme

Curso: IN3202-2 Microeconomía
Semestre: Otoño 2010

Auxiliar 3

P1 Considere la siguiente función de producción:

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}.$$

(i) Asuma que se está en el largo plazo y que por lo tanto ambos factores son variables. Encuentre la demanda condicionada por el factor x2

Respuesta:

El problema del productor es:

$$\min_{\{x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^n\}} \quad w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2,$$
$$sujeto\ a \quad y = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}.$$

De las condiciones de primer orden del lagrangeano se obtiene que:

$$\frac{Pmg_1}{w_1} = \frac{Pmg_2}{w_2}$$
$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta}}{w_1} = \frac{\beta x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1}}{w_2},$$

De donde se obtiene

$$x_1 = x_2 \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w_2}{w_1}.$$

.
Reemplazando en la función de producción se obtiene finalmente la demanda condicionada por x2:

$$x_2^{LP} = y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

(ii) Asuma que se está en el corto plazo y que el factor productivo x1 es un factor fijo, Encuentre la demanda condicionada de x2.

Respuesta:

Dado que no se puede alterar la cantidad utilizada del factor x1 y que sólo hay 2 factores productivos, existe una cantidad única de x2 que permite producir un nivel de producción y. De este modo, la demanda condicionada de corto plazo de x2 será:

$$x_2^{CP} = \left(\frac{y}{\bar{x}_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad \forall \quad w_1, w_2.$$

(iii) Calcule la elasticidad precio de la demanda del factor x2 de corto plazo y de largo plazo.

Respuesta:

La elasticidad precio de la demanda condicionada por el factor x2 en el largo plazo es:

$$\epsilon_{x_2, w_2}^{LP} = \frac{\partial x_2^{LP}}{\partial w_2} \frac{w_2}{x_2^{LP}}.$$

Calculando a partir de la ecuación (1) se obtiene que:

$$\epsilon_{x_2, w_2}^{LP} = \frac{-\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Mientras que la elasticidad de corto plazo es:

$$\epsilon_{x_2, w_2}^{CP} = 0.$$

(iv) Explique por qué la demanda de largo plazo es más elástica que la demanda de corto plazo.

Respuesta:

La demanda de corto plazo asume que no se puede alterar la cantidad del factor x1, de modo que existe una sola cantidad del factor x2 que permite producir una cierta cantidad y. En cambio, en el largo plazo el factor x1 se puede alterar, permitiendo la sustitución de factores en caso que el factor x2 se haga relativamente más caro.

P2 Considere la función de producción Cobb- Douglas

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}.$$

Muestre que la tasa marginal de sustitución técnica es

$$MRTS = \frac{\propto x_2}{\beta x_1}$$

Respuesta:

La tasa marginal de sustitución técnica se define como $MRTS = \frac{\frac{df}{dx_1}}{\frac{df}{dx_2}} = \frac{Pmg1}{Pmg2}$

Gráficamente, corresponde a la pendiente de la tangente a la isocuanta en un punto.

Para el caso en que la función de producción es una Cobb Douglas, se tiene lo mismo que en ejercicio anterior:

$$\frac{Pmg_1}{w_1} = \frac{Pmg_2}{w_2}$$
$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta}}{w_1} = \frac{\beta x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1}}{w_2},$$

$$\frac{Pmg1}{Pmg2} = \frac{\propto x_2}{\beta x_1}$$

P3 Sea f(.) una función de producción cualquiera Muestre que existen retornos constantes a escala si y solo si f(.) es homogénea de grado 1.

Respuesta:

De la misma definición, se obtiene que son totalmente equivalentes.

$$f(\propto k, \propto l) = \propto f(k, l)$$

P4 Una firma presenta una función de producción de la forma $F = AK^{\propto}L^{\beta}$ Comente sobre los retornos a escala.

Respuesta:

Escribir C(q) = wL + rK

El problema de minimización es

Min wL+rK
s.a. A Kα Lβ = q

(En estricto rigor es un >=, pero es intuitivo que la restricción se cumplirá con igualdad si es que se minimizan los costos)

$L = wL+rK + \lambda(q- A\ K\alpha\ L\beta)$
$dL/dL = 0 \Rightarrow w = \lambda A\beta L\beta\text{-}1\ K\alpha$ (1)
$dL/dK = 0 \Rightarrow r = \lambda A\alpha L\beta K\alpha\text{-}1$ (2)
(1)/(2) $\Rightarrow w/r = \beta K/(\alpha L)$
Luego, tenemos la relación de optimalidad:
$K/L = \alpha w/(\beta r)$ (*)

Notar que está relación de optimalidad es equivalente a pedir que
$(dq/dL)/(dq/dK) = w/r$, es decir

PMGL/PMGK = w/r, donde PMGL y PMGK son las productividades marginales del trabajo y el capital respectivamente.

Después de desarrollar las ecuaciones se llega a

$$c = cte * q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Lo importante de la expresión anterior es que permite concluir que la forma de la curva depende de la suma $(\alpha+\beta)$. Así, para valores de $(\alpha+\beta)>1$, se tendrá una función de costos cóncava, lo que es reflejo de que la función de producción presenta retornos crecientes a escala (Esto es, para $a>1$ $f(aK+aL)>af(K,L)$).

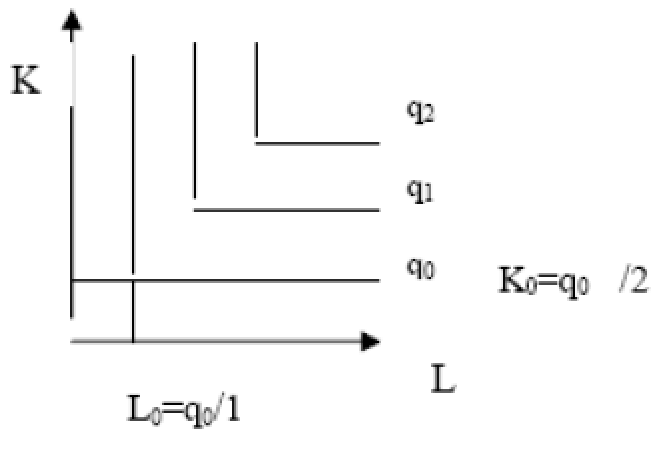
Por el contrario, si $(\alpha+\beta)<1$ la función de costos será convexa, reflejo de tecnología con retornos decrecientes a escala (Para $a>1$, $f(aK+aL)<af(K,L)$).

Por último, si $\alpha+\beta=1$ se tienen costos lineales, costos medios constantes y retornos constantes a escala.

P5 Una empresa observa que independiente de la cantidad que produzca y de los que varíen los precios de los insumos, siempre minimiza los costos comprando la mitad de unidades de capital que de trabajo. Trace el mapa de isocuantas de la empresa.

Respuesta:

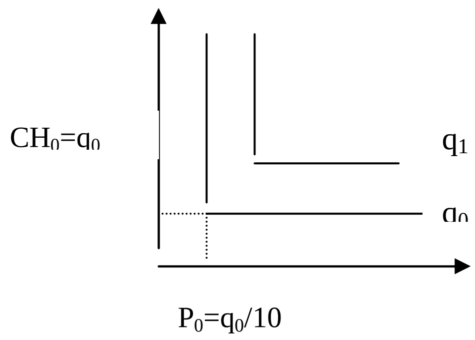
Dado que la empres a trabaja con proporciones fijas, corresponde a una función de producción de Leontieff, con la siguiente proporción de insumos $K/L=1/2$, y la función de producción es de la forma $q=\min(2k,l)$. El mapa de las isocuantas correspondiente es el siguiente.



P6 Suponga que la función de producción de un microbús es de proporciones fijas y que todos tienen la misma tecnología. Para cada viaje se requieren los siguientes insumos:

1 hora de chofer a $1.000 la hora.
10 litros de petróleo a $130 el litro.

a) Grafique la función de producción. ¿Cuál es la función de costo total? Determine los costos marginales y costos medios.



C(q)=1*1000*q + 10*130*q => C(q)=2300*q
CMg(q)=Cme(q)=2300=constante. Donde q es la cantidad de viajes.

P7 Una firma observa que siempre puede reducir un 2% de su empleo total aumentando un 3% su dotación de capital y mantener su producción constante. La firma tiene diez trabajadores y 20 unidades de capital. Si los pagos al capital y al trabajo son de r=4 y w=1 respectivamente. ¿Está la firma maximizando su utilidad? Justifique su respuesta. ¿Qué aconsejaría Ud. a la firma?

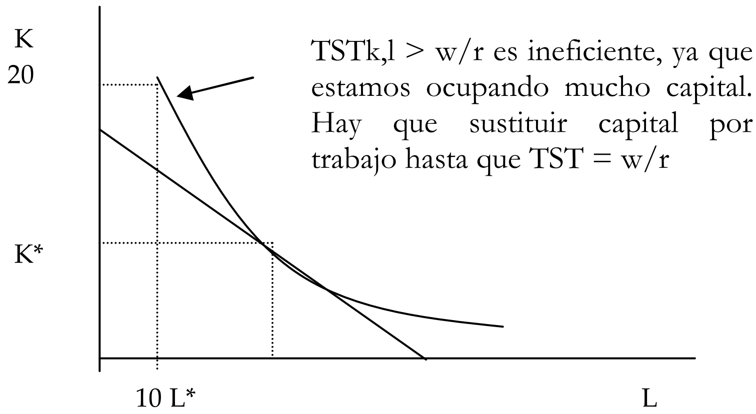
Respuesta:

TST = - dK/dL (pendiente de la isocuanta)
Del enunciado:

(dK/K)/(dL/L) = - 3/2
Luego dK/dL = -3/2 K/L
Evaluando en el punto en el que está situada la firma:
dK/dL = -3

Luego TST = 3

En el óptimo, esto debiera ser igual a la razón del precio de los insumos w/r, pero dado que w/r=0.25 entonces, la firma no está maximizando utilidades. ¿Qué debe hacer? Del gráfico vemos, que la firma está en un punto donde la pendiente de la isocuanta es mayor a la pendiente de la isocosto, luego, la firma debe sustituir capital por trabajo.



Podemos calcular L* y K* de la manera siguiente:

$$\frac{dK}{K} = \frac{-3}{2}\frac{dL}{L}$$

$$\ln K = \frac{-3}{2}\ln L + Cte$$

Calculamos Cte evaluando en el punto (10,20)

$$\text{Cte} = \ln(20) + \frac{3}{2}\ln(10) = 6{,}45$$

Con esto, la ecuación que describe a la isocuanta es :

$$\text{K} = \text{L}^{-3/2} \cdot e^{Cte}$$

$$\text{K} = \text{L}^{-3/2} \cdot e^{Cte} = \text{L}^{-3/2} \cdot C$$

Con C = 632,5

Ahora imponemos la condición de optimalidad

$$-\frac{\text{dK}}{\text{dL}} = \frac{w}{r} \Rightarrow C\frac{-3}{2}L^{-5/2} = 1/4$$

$$L^{-5/2} = \left(\frac{1}{6C}\right) \Rightarrow L = \left(\frac{1}{6C}\right)^{-2/5}$$

Reemplazando los valores se obtiene

$$\text{L*} \approx 27$$

$$K^* \approx 5$$