GF750: Guía Experimental. Colapso de un cilindro sujeto a gravedad y rotación.

21 de abril de 2010

1. Introducción

En este experimento haremos uso de la mesa rotatoria (con capacidad de girar en el rango de $\sim$ 3 a $\sim$ 30 rpm) para estudiar el ajuste a geostrofía de un fluido relativamente más denso que el agua (agua con sal) o salmuera. La mesa rotatoria simula la rotación terrestre, mientras que la cámara que gira solidaria a la mesa permite apreciar los movimientos desde el sistema de referencia no-inercial, es decir observar el viento tal como si se tratara de mediciones atmosféricas u oceanográficas hechas desde la tierra. El tanque tiene un diámetro de 40 cm y una altura de 20 cm.

2. Ley de Margules

2.1. Forma General

Uno puede desarrollar una teoría simple para relacionar el efecto de la rotación en la formación de un frente en fluidos de distinta densidad. Para este desarrollo uno supone que el fluido satisface tanto un balance hidrostático como un balance geostrófico. Durante la experiencia uno podrá verificar a posteriori si acaso la geostrofía es una aproximación razonable en este caso.

En la figura 2.1 se muestra un fluido frío o denso, identificado por la densidad ρ_c y un fluido cálido o más liviano identificado por una densidad ρ_w.

Uno puede escribir una ecuación para el cambio de presión en el circuito de la figura. Dado que el circuito comienza y termina en el mismo punto, el cambio de presión en el circuito infinitesimal en el borde de los dos fluidos es cero. El cambio total de presión tendra dos componentes,

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz. \tag{1}$$

Usando la ecuación hidrostática,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{2}$$

A lo largo del circuito de la figura el cambio de presión desde el punto A al punto B haciendo el recorrido a través del fluido cálido es

$$p_B = p_A - \rho_w g dz + \frac{\partial p}{\partial y}dy|_w \tag{3}$$

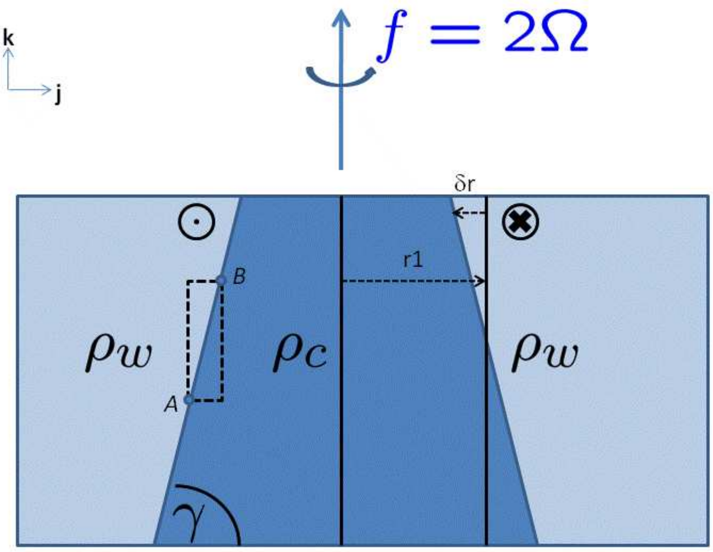

Figura 1: Esquema del experimento una vez que se ha alcanzado equilibrio geostrófico

y desde el punto A al punto B a través del fluido frío,

$$p_B = p_A - \rho_c g dz + \frac{\partial p}{\partial y} dy|_c \tag{4}$$

Combinando ambas ecuaciones uno obtiene,

$$-\rho_w g dz + \frac{\partial p}{\partial y}|_{\rho_w} dy + \rho_c g dz - \frac{\partial p}{\partial y}|_{\rho_c} dy = 0 \tag{5}$$

Si suponemos que se satisface la geostrofía entonces podemos reemplazar los gradientes de presión en la dirección y (cruzando el frente),

$$-fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{6}$$

donde en este caso f es igual a 2Ω, Ω la rotación de la mesa. Reemplazando en las ecuaciones anteriores y denotando las velocidades al interior del fluido denso y el fluido liviano como u_c y u_w respectivamente, se obtiene

$$(\rho_c - \rho_w) g dz = f(\rho_w u_w - \rho_c u_c) dy \tag{7}$$

Reemplazando $dz/dy = \tan\gamma$, uno obtiene una fórmula para la pendiente del frente

$$\tan\gamma = \frac{f(\rho_w u_w - \rho_c u_c)}{g(\rho_c - \rho_w)} \tag{8}$$

Es usual hacer la aproximación de $\rho_w u_w \sim \rho_c u_w$ y escribir la gravedad reducida $g' = g\Delta\rho/\rho_c$, y por lo tanto la ecuación para el ángulo queda expresada como,

$$\tan \gamma = \frac{f(u_w - u_c)}{g'} \tag{9}$$

2.2. Ley de Margules en la Atmósfera Real

En el caso de la atmósfera real uno puede reemplazar densidades por temperatura haciendo uso de la ley de los gases ideales. $\bar{T}$ es una temperatura representativa, que para efectos prácticos puede ser la temperatura promedio a ambos lados del frente uno puede escribir

$$\tan \gamma = \frac{f\bar{T}(u_w - u_c)}{g(T_w - T_c)}, \tag{10}$$

donde T_w y T_c son las temperaturas a ambos lados del frente. En la Figura 2.2 observamos una sección vertical que es característica del "frente polar.º de las zonas del planeta en donde el aire frío de origen polar está en contacto con aire más cálido de latitudes medias y bajas. Haciendo un análisis de escala considerando que los datos de la figura son magnitudes típicas para las diferencias de temperatura y viento cruzando el frente, la pendiente en un frente real puede ser estimada como,

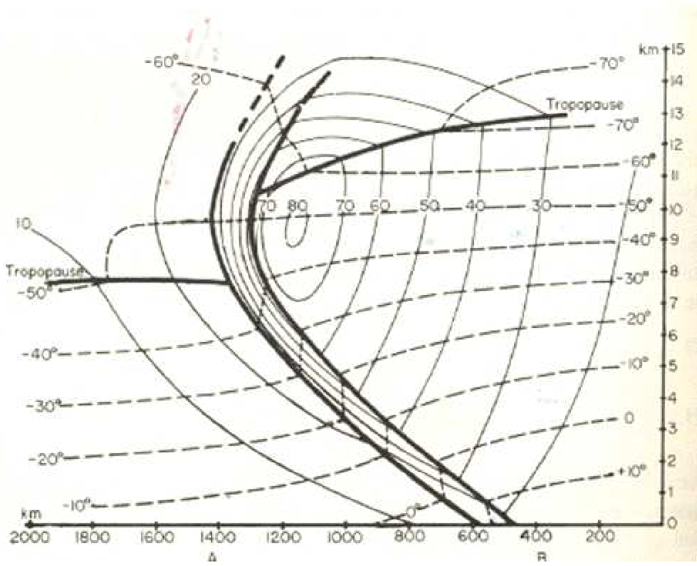

Figura 2: Corte vertical del frente polar observado en el hemisferio Norte. Pálmen and Newton (1969)

$$\tan \gamma \sim \frac{(10^{-4}s)(300K)(25ms^{-1})}{(10m/s^2)(10K)} \sim \frac{1}{130}, \tag{11}$$

Coincide bastante bien con el valor estimado de la pendiente directamente de la figura. Nótese la analogía entre el frente polar y lo que será observado durante el experimento.

3. Conservación de Momentum Angular y Radio de deformación de Rossby

Al inicio del experimento, el fluido se encontrará en rotación sólida y por lo tanto en ausencia de torques externos, el momentum angular de una columna de fluido se conserva. Si consideramos que las desviaciones δr son pequeñas respecto de la posición inicial del frente (r_1), entonces uno puede escribir,

$$\Omega r_1^2 = \Omega(r_1 + \delta r)^2 + u(r_1 + \delta r) \tag{12}$$

de donde,

$$u \approx -2\Omega\delta r \tag{13}$$

En el caso de la parte superior del cono formado, δr es negativo, y por tanto esperamos un flujo ciclónico como se aprecia en la figura. Si uno supone un valor para la escala vertical de variación de la densidad, H, entonces $\tan\gamma = H/|\delta r|$ y usando la ley de Margules, suponiendo $u_w >> u_c$, uno puede encontrar una expresión para la escala de variación de la longitud en la horizontal

$$(\delta r)^2 \sim \frac{g'H}{f^2} \tag{14}$$

La frecuencia de Brunt-Vaisala para este sistema puede ser escrita como, $N^2 = \frac{g}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z} \sim \frac{g'}{H}$ y por lo tanto

$$|\delta r| \sim \frac{NH}{f} \tag{15}$$

$|\delta r|$ es el radio de deformación de Rossby.

4. Descripción del Experimento

El experimento de hoy se trata de observar el colapso de un cono de fluido más denso (agua salada) puesto al interior de un fluido menos denso (agua dulce) sujeto a rotación.

Con la mesa rotatoria detenida, se debe sellar el cilindro metálico interior (que será llenado con agua salada) por su borde inferior con vaselina y situarlo al centro del tanque de acrílico. Una vez que el cilindro es asentado sobre el tanque, se debe poner más vaselina en el exterior del borde inferior del cilindro para así evitar que entre agua desde el exterior del cilindro. Luego se procede a llenar el tanque con agua hasta una altura de unos 10 cms y siempre por debajo del borde superior del cilindro. En otro recipiente, se puede preparar una solución salina con una concentración de unos 1040 g/l. Luego se llena el cilindro con la solución salina hasta el borde del nivel de agua fuera del cilindro. Una vez hecho esto se puede colorear el agua salada al interior del cilindro con permanganato o colorante de comida.

Se procede a girar la mesa unas 18 rpm. Durante unos diez minutos esperamos hasta que haya concluido el 'spin-up' y el fluido se encuentre en rotación sólida. Ud. puede verificar la rotación sólida lanzando papel picado al tanque y observando si existe velocidad relativa a través de la cámara. Una vez que se alcanza la rotación sólida retiraremos el cilindro (ya sea manualmente o por control remoto) de manera muy cuidadosa (este paso es muy importante y requiere práctica), y observaremos el colapso del cilindro de agua más densa y la formación de un cono y de una o más superficies frontales. Haciendo uso de la teoría anterior, ud. puede interpretar los resultados del experiemento,

Se les pide:

- Observe el frente que se forma entre el agua más densa y menos densa. Fotografiando el frente desde una posición lateral, recupere imágenes que le permitan caracterizar el colapso del frente así como, una vez que se ha estabilizado, le permitan estimar el ángulo γ en el frente.
- Con una jeringa extraiga cuidadosamente agua desde el cono denso y mida la densidad usando el refractómetro y repita la medición fuera del cono.
- Usando papel picado (challa) u otro trazador, desde la imagen de video en el sistema de referencia no-inercial estime la velocidad en el vórtice de circulación ciclónica (en el mismo sentido de rotación de la mesa). Lanzando permanganato intente estimar la velocidad al interior del cono.
- Compruebe la validez de la ley de Margules para este sistema. En particular, que tan buena era nuestra suposición respecto de la geostrofía?
- Estime el radio de deformación de Rossby a partir de las fotografías del cono y de la teoría.
- Reduciendo el voltaje al motor de la mesa rotatoria Ud. puede generar un nuevo transiente y ajuste al equilibrio geostrófico a unas 12 rpm. Registre sus observaciones, e intente estimar γ, densidades y velocidades para este nuevo equilibrio.
- Comente sobre el efecto de la fricción en el experimento, en particular como espera Ud. que se manifieste la circulación secundaria inducida por la fricción en el sistema? Puede testear su hipótesis?