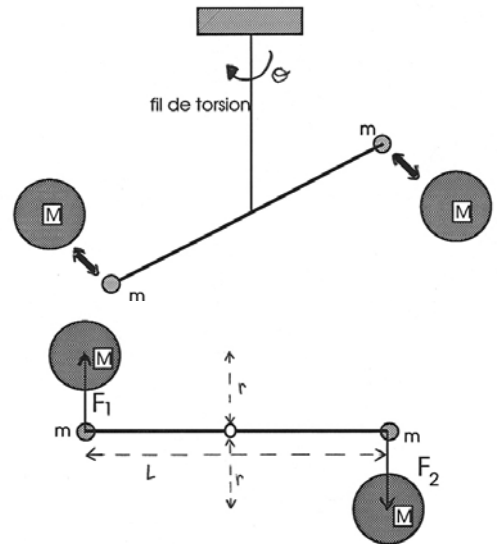


Guía de Ejercicios

Gravedad, Forma de la Tierra, Geoide, Isostasia y Flexura

- 1) En la experiencia de la figura, un cable de torsión vertical (de coeficiente de torsión C) sostiene en su centro una barra de longitud L que tiene en cada de sus extremidades una pequeña esfera de masa m . Por efecto de la cercanía de una esfera mayor de masa M se produce una fuerza de atracción gravitacional F entre las masas M y m (despreciando el efecto entre las masas mas lejanas), la cual genera una pequeña rotación θ del cable de torsión hasta el equilibrio.
- a) Demostrar que esta experiencia (desarrollada por H. Cavendish a fines del siglo XVIII) permite encontrar una expresión de donde se puede determinar la constante universal de gravitación G . Determine su valor numérico en sistema internacional (MKSA) considerando los parámetros siguientes : $C=5 \cdot 10^{-7}$ Nm/radian ; $\theta = 3,56$ milliradian ; $M=30$ kg ; $m=50$ gramos; $L=40$ cm; $r=15$ cm.

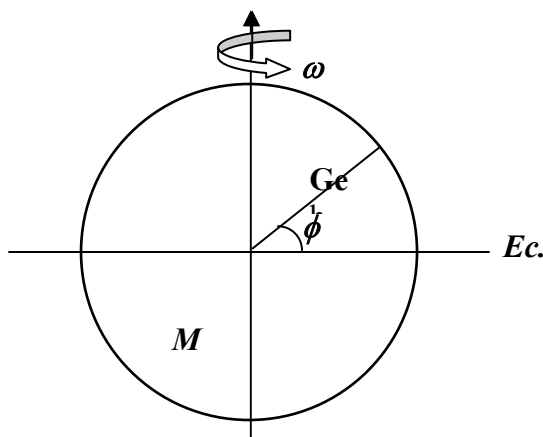


- b) Utilizando este valor de la constante G y suponiendo un valor de gravedad en la superficie de la tierra de $9,8 \text{ m.s}^{-2}$, determinar la masa y la densidad promedio de una Tierra esférica de radio $R=6371$ km.
- c) La expresión siguiente (en coordenadas esféricas) describe la masa M para una distribución de densidad $\rho(r)$ en una esfera de radio R :

$$M = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \rho(r) \cdot r^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot dr d\theta d\varphi$$

Suponiendo que la densidad superficial de la tierra es $\rho_0 = 3000 \text{ kg/m}^3$, y un modelo lineal $\rho(r)$ para la variación de la densidad con profundidad, determine el valor de la densidad ρ_1 en el centro de la Tierra. Comentar este resultado con respecto al valor promedio determinado en (b), y sus implicancias para la estructura interna de la Tierra.

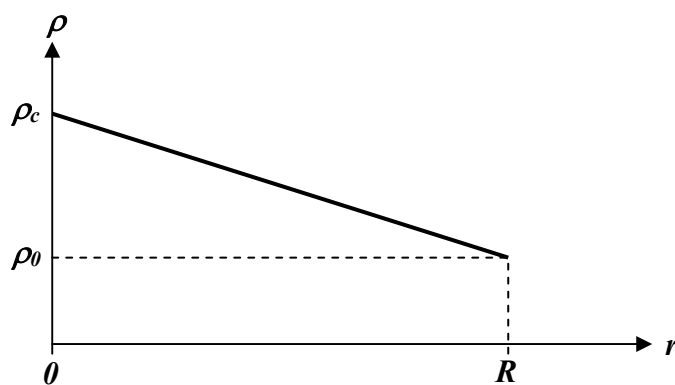
- 2) Considere un planeta de radio R y masa total M distribuida esféricamente, que gira en torno a un eje axial con velocidad angular ω . El planeta es rígido y no se deforma producto de la aceleración centrífuga, manteniendo su forma esférica a pesar de la rotación.



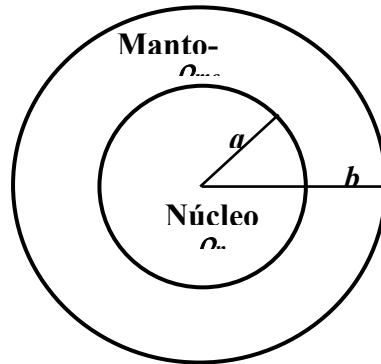
- Obtenga una expresión para la magnitud de la aceleración de gravedad g en la superficie de este planeta en función de la latitud ϕ . Exprese su resultado en términos de $g_0 = GM/R^2$, la aceleración de gravedad sin la influencia de la rotación, y $m = \omega^2 R/g_0$, la razón entre la aceleración centrífuga y la gravitacional en el ecuador.
- Asuma que $m \ll 1$ y encuentre una expresión aproximada para g en este caso. Considerando valores similares a los terrestres, $m = 0.00346$, $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$, encuentre la diferencia de g entre el ecuador y polos. Como se compara este valor con el que ocurre en la Tierra.
- Obtenga una expresión para ω tal que g en el ecuador sea nula. ¿Hacia donde apuntaría el vector de gravedad en función de la latitud en este caso? ¿Cuál sería este ω en el caso de parámetros similares a los terrestres: $R = 6371 \text{ km}$, $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$?

- 3) Considere una Tierra esférica de radio R y gravedad g_0 en su superficie.

- Obtenga expresiones para determinar su masa M y su densidad promedio ρ_p . Calcule M y ρ_p para $R = 6371 \text{ km}$, $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$, ($G = 6.6732 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$).
- Para la densidad $\rho(r)$ en el interior de la Tierra, considere un modelo de densidad lineal tal que en su centro $\rho(r=0) = \rho_c$, y en su superficie $\rho(r=R) = \rho_0$. Integre esta función de densidad y obtenga una expresión para la masa M de la Tierra en función de R , ρ_c y ρ_0 .



- c) Imponga la condición de que la masa M calculada en a) y b) debe ser la misma, y encuentre una expresión para ρ_c en función de ρ_0 y ρ_p . ¿Cual es el valor de ρ_c para $\rho_0 = 3 \text{ gr/cc}$?
- 4) Considere un modelo simple de la Tierra compuesto de 2 unidades fundamentales: Núcleo y Manto-Corteza, de densidades uniformes ρ_n y ρ_{mc} y radios a y b respectivamente.



- a) Asumiendo como conocidas la gravedad superficial $g_0 = g(r=b)$ y ρ_{mc} , estime la densidad del núcleo ρ_n . Datos: $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$, $b = 6371 \text{ km}$, $a = 3486 \text{ km}$, $\rho_{mc} = 4.5 \text{ gr/cc}$, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}$.
- b) Para este modelo de Tierra, obtenga una expresión general para su gravedad interna $g=g(r)$, $0 \leq r \leq b$. Grafique esquemáticamente su resultado.
- 5) Explicar de forma sintética y cualitativa :
- a) ¿Cuales son las principales causas de las variaciones de gravedad observadas en la superficie de la Tierra ?
- b) ¿Qué propiedades físicas debe tener un modelo matemático para explicar la forma de la Tierra y su campo gravitatorio ?
- c) ¿Como se define el « geoide » y que representa con respecto a este modelo ?
- 6) La fórmula de MacCullagh es una aproximación para el potencial gravitacional de una Tierra con simetría rotacional y de reflexión respecto al plano ecuatorial, y representa el paso siguiente respecto de la aproximación de una Tierra esféricamente simétrica:

$$U_g = -\frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3}(C - A)\left(\frac{3\sin^2\phi - 1}{2}\right)$$

G es la constante de gravitacional universal, M es la masa de la Tierra, r es distancia al centro de la Tierra (centro de masa), C y A son momentos de inercia alrededor de

los ejes de rotación y otro contenido en el plano ecuatorial respectivamente, y ϕ es latitud. Normalmente **C-A** se da en términos de la constante adimensional J_2 :

$$C - A = J_2 M a^2$$

donde **a** es el radio ecuatorial. La forma de referencia de la Tierra corresponde a una equipotencial del potencial total, gravitatorio mas rotacional, $U = U_g + U_{rot} = U_0$, donde

$$U_{rot} = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi$$

ω = velocidad angular de rotación de la Tierra.

- a) Imponga la condición de equipotencialidad $U = U_0$ en el ecuador ($\phi = 0, r = a$), y polos ($\phi = 90^\circ, r = b$) y obtenga una expresión que ligue J_2, m y f donde:

$$m = \frac{a^3 \omega^2}{GM} = \frac{Ac. _ Centrifuga _ Ecuador}{Ac. _ Gravitacional _ Ecuador}$$

$f = (a - b)/a$ = achatamiento.

- b) J_2, m y f son cantidades adimensionales pequeñas del orden de unas pocas milésimas. En primer orden en estas cantidades demuestre que:

$$J_2 = \frac{2f}{3} - \frac{m}{3}$$

- c) En primer orden en J_2, m y f , se demuestra que la forma de la Tierra (equipotencial) viene dada por:

$$r = a(1 - f \sin^2 \phi)$$

Demuestre que en primera aproximación esta expresión corresponde una elipse de semiejes mayor y menor **a, b** respectivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si se considera ahora que esta Tierra es homogénea, es decir de densidad constante ρ , se puede demostrar que:

$$C = \frac{8}{15} \pi \rho a^4 b$$

$$A = \frac{4}{15} \pi \rho a^2 b (a^2 + b^2)$$

Se tiene además que

$$M = \rho \frac{4\pi}{3} a^2 b$$

Bajo estas condiciones encuentre una expresión de primer orden para J_2 , y combínela con el resultado de **b)** para obtener f como función de ω . ¿Es razonable su resultado? Comente brevemente.

7) La forma de la Tierra se puede aproximar a una superficie equipotencial de gravedad, es decir, $U(r, \theta, \Phi) = U_0$ constante. Esta superficie equipotencial tiene distintos niveles de aproximación, y algunos se ajustan de mejor manera a la Tierra real.

a) Explique las distintas “Formas de la Tierra” vista en clases, en orden ascendente de aproximación, indicando:

- El Potencial Gravitatorio utilizado y su nivel de aproximación.
- La forma de la Tierra Resultante (radios, simetrías, etc).

b) En base a lo expuesto en la parte (a) defina los siguientes conceptos:

- geoide
- elipsoide de referencia
- anomalía del geoide
- superficie de la Tierra

¿Cómo se pueden relacionar estos cuatro conceptos?

Para responder concretamente, haga referencia a las siguientes expresiones vistas en clases:

$$U_g(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right]$$

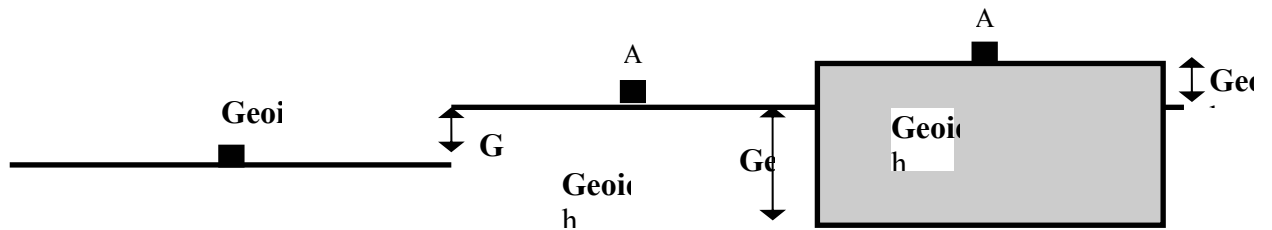
$$U_g = -\frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3} (C - A) \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right)$$

$$C - A = J_2 M a^2$$

$$U_{rot} = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

$$U_g(r, \theta, \phi) = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l [A_l^m \cos(m\phi) + B_l^m \sin(m\phi)] P_l^m(\cos \theta) \right]$$

8)

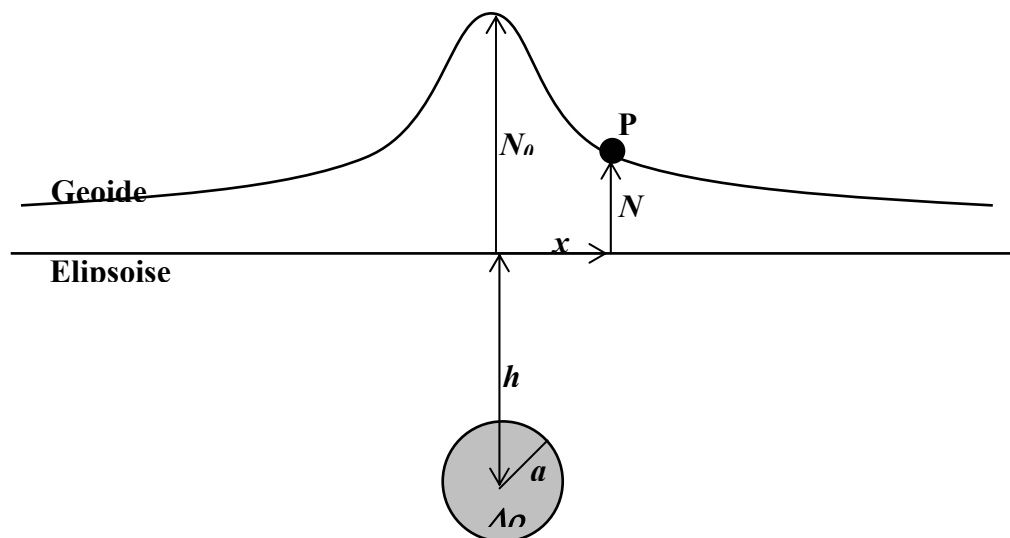


Considere la situación representada en la figura donde un bloque cortical de densidad ρ_1 está inserto en un medio de diferente densidad ρ_0 . Asumiendo que los puntos A, B y C están suficientemente alejados de los bordes verticales como para que el efecto de estos sea despreciable:

- Estime la diferencia de gravedad que esperaría encontrar en mediciones efectuadas en los puntos A, B y C.
 - ¿Qué condición se debe cumplir para que una vez hecha la corrección por altura o de aire libre, la diferencia entre las mediciones A y B sea nula? Interprete su resultado.
- 9) Considere una masa esférica de radio a , con su centro a profundidad h respecto al elipsoide de referencia, y con una densidad anómala $\Delta\rho$ con respecto a su medio circundante.
- Utilice la fórmula de Brun:

$$N = -\frac{U(P)}{g_0}$$

y plantee una expresión de donde es posible encontrar la ondulación geoidal $N = N(x)$ producida por esta masa. Recuerde que $U(P)$ es el potencial de la masa anómala sobre el geoid, y g_0 es la gravedad normal de referencia.

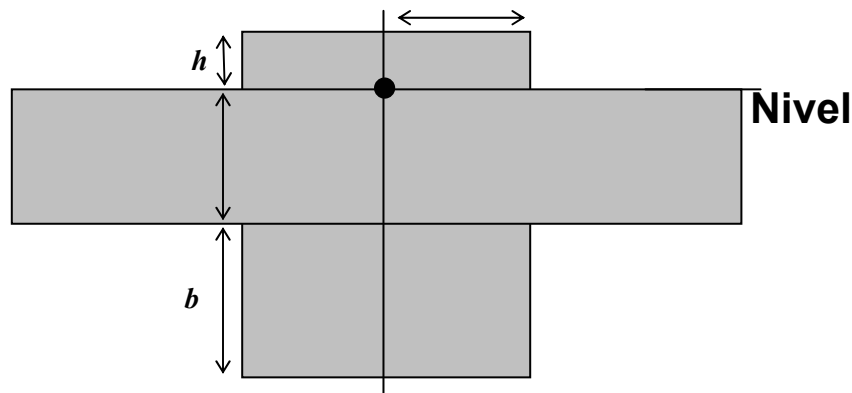


- b) Asuma que $N \ll h$ y encuentre explícitamente una expresión para $N = N(x)$.
- c) Para $\Delta\rho = 1 \text{ gr/cc}$, $a = 1 \text{ km}$, $h = 3 \text{ km}$ y $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$, encuentre $N_0 = N(x=0)$.
- d) Considere la expresión encontrada en b) y explique como podría estimar la profundidad de una cierta masa anómala (su centro de masa) en base a mediciones de la ondulación geoidal que ella genera.

10) Las ondulaciones del geoide se producen por la presencia de masas anómalas que deforman la equipotencial que lo define. La formula de Brun:

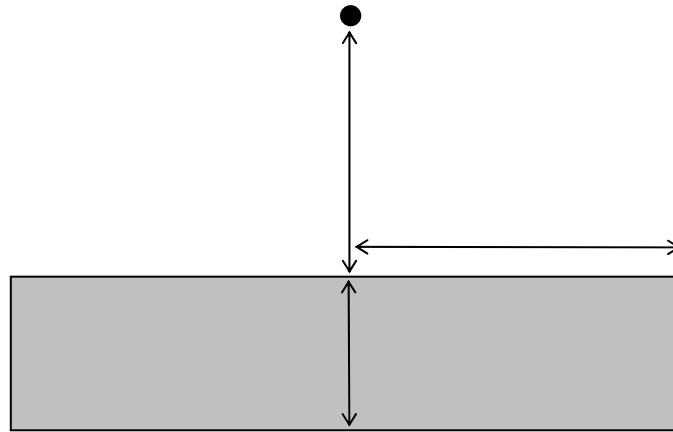
$$N = -\frac{U(P)}{g}$$

relaciona la altura N de las ondulaciones, con el potencial gravitacional U que producen las masas anómalas en el punto P del geoide; g es el valor de la gravedad en el elipsoide de referencia correspondiente. Considere una cadena montañosa de altura h sobre el nivel del mar (geoide) y base circular de radio R , que está sobre una corteza continental de espesor H ; la cadena montañosa posee una raíz de idéntica base circular y espesor b . Tanto las montañas, corteza y raíz tienen una densidad ρ_c , y se sitúan sobre un manto de densidad $\rho_m > \rho_c$.



- a) Utilizando la formula para el potencial gravitatorio sobre el eje de un cilindro dada más abajo, encuentre una expresión para $U(P)$ en el punto central de la base de la cadena montañosa esquematizada arriba. Por medio de la formula de Brun, encuentre entonces la ondulación N del geoide en este punto. ¿Cómo contribuyen las montañas y la raíz al valor de N ?

- b) ¿Cual es el espesor de la raíz (***b***) si se considera isostacia local? Especialice para este caso la expresión para ***N*** encontrada en a).
- c) Evalúe ***N*** para el altiplano considerando isostacia local (parte ***b***). Asuma ***h*** = 3.5 km, ***H*** = 33 km, ***g*** = 9.8 m/s², ***ρ_m*** = 3.3 gr/cc , ***ρ_e*** = 2.7 gr/cc, ***G*** = 6.67 x 10⁻¹¹ N m²/kg².



El potencial gravitatorio en el eje de un cilindro en el punto ***P*** situado a una distancia ***a*** de una de sus caras es:

$$U(P) = -\pi G \Delta \rho \times (2Rt + a^2 - (a+t)^2)$$

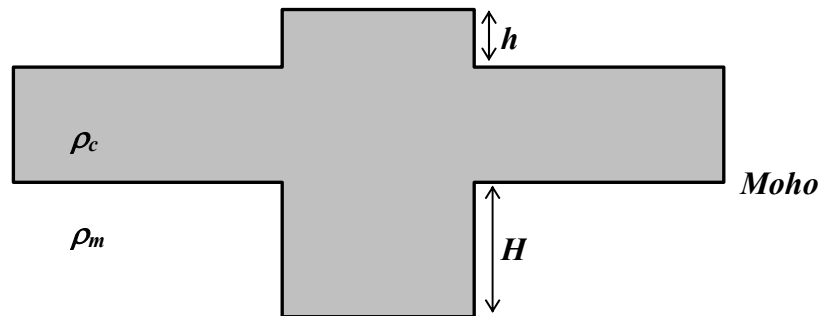
Esta fórmula es aproximada y asume que el radio ***R*** del cilindro es mucho mayor que la distancia ***a*** y su espesor ***t***.

- 11) Considere la formación de una cuenca sedimentaria sobre corteza oceánica. Suponga compensación isostática que se logra por desplazamiento de material mantélico de densidad ***ρ_m***. Muestre que el espesor de sedimentos ***s***, esta relacionado con la profundidad de agua ***d*** por:

$$s = \frac{(\rho_m - \rho_w)}{(\rho_m - \rho_s)} (D - d)$$

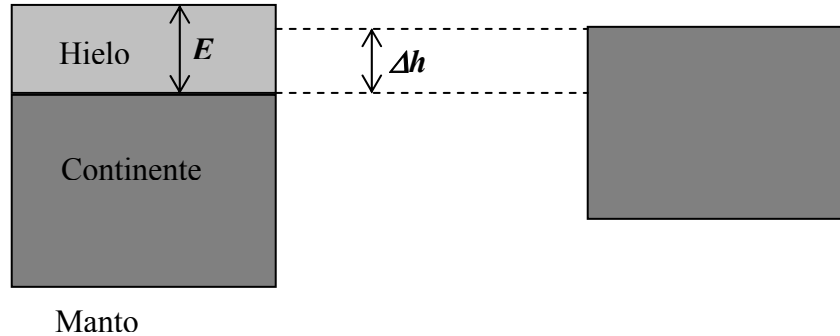
Donde ***D*** es la profundidad oceánica inicial libre de sedimentos. ¿Cuál es el máximo espesor de sedimentos posible si ***ρ_s*** = 2.5 gr/cc, ***ρ_m*** = 3.3 gr/cc y ***D*** = 5 km?

- 12) Considere una región montañosa donde en un cierto tiempo ($t=0$) se detiene el proceso tectónico que da origen a las montañas, y que a partir de ese momento la evolución de la zona queda controlada por el proceso de erosión que actúa sobre la superficie. Considerando que en cada instante posterior el sistema evoluciona manteniendo un equilibrio isostático entre la topografía h y su raíz H :
- Encuentre una expresión para la variación temporal $h = h(t)$, para una erosión que actúa a razón constante r (espesor de material erosionado/unidad de tiempo). Considere para ello una altura inicial h_0 , y densidades ρ_c y ρ_m para la corteza y manto respectivamente.
 - Encuentre una expresión para el tiempo T que demora este proceso erosivo en hacer desaparecer la topografía ($h=0$). Calcule T para $h_0 = 3$ km, $\rho_c = 2.7$ gr/cc , $\rho_m = 3.3$ gr/cc, y $r = 2$ mm/año.
 - ¿Cuál es el nivel de exhumación del material que en cada momento se encuentra en la superficie en función de la topografía h ?, es decir, ¿Cuanto se ha “desenterrado” éste material desde su posición en $t = 0$?.
 - Encuentre $h = h(t)$ si la razón de erosión r es proporcional a la altura h , tal que es r_0 para $h = h_0$ y cero para $h = 0$: $r = r_0 (h / h_0)$.

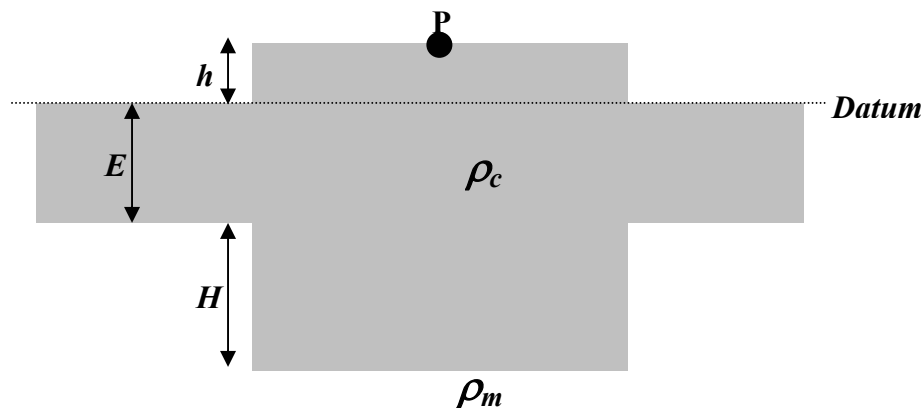


- 13) Considere una región que soporta una carga glaciaria de espesor E y que se encuentra en equilibrio isostático local a través del desarrollo de una raíz cortical. Debido al calentamiento global, y en un periodo de tiempo que podemos considerar despreciable, el hielo se derrite, y la región evoluciona hacia un nuevo equilibrio isostático (Debido al acomodo viscoso del manto superior, este ajuste puede tomar varios miles de años).

- a) Siendo ρ_h y ρ_m las densidades para el hielo y manto respectivamente, encuentre una expresión para determinar la variación Δh que experimenta la cota de la superficie continental una vez que el nuevo equilibrio isostático es alcanzado.
- b) Encuentre Δh para $E = 1$ km, $\rho_h = 0.92$ gr/cc, y $\rho_m = 3.3$ gr/cc.



- 14) Considere una cadena montañosa de altura h que se sitúa sobre un continente de espesor E , y que desarrolla una raíz de espesor H . La densidad tanto de la cadena montañosa como del continente y la raíz es ρ_c , y la densidad del manto subyacente es ρ_m .
- a) Asuma equilibrio isostático en la región y calcule el espesor H de la raíz.
- b) Asuma ahora que parte del peso de la cadena montañosa está soportado elásticamente por la placa continental, y que producto de ello la raíz de las montañas es solo un porcentaje p de la raíz isostática H . En estas circunstancias, encuentre expresiones para las anomalías de Aire libre y de Bouguer simple, para mediciones gravimétricas llevadas a cabo en el punto central P de la cadena montañosa. Considere para ello que P está suficientemente alejado de los bordes de las estructuras, y que por lo tanto éstos tienen un efecto despreciable sobre las anomalías.
- c) Grafique las anomalías de Aire libre y de Bouguer simple en función de p , para el caso donde $\rho_c = 2.7$ gr/cc, $\rho_m = 3.3$ gr/cc, $h = 4$ km, y $E = 35$ km. Considere una variación para p entre 0 y 100%, es decir considere casos entre un soporte elástico rígido total sin flexura, y un soporte puramente isostático respectivamente.



- 15) Considere la ecuación flexural 2-D, que describe la deflexión de la litosfera oceánica por cargas topográficas $H(x)$:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + g(\rho_m - \rho_c)w = g\rho_c H$$

Encuentre una solución en el caso de una rigidez flexural $D \rightarrow 0$. ¿A que situación corresponde esta solución?

- 16) La deflexión elástica de la litósfera oceánica debido a la carga producida por una cadena de islas volcánicas puede ser modelada de manera aproximada, asumiendo una carga puntual q en $x = 0$ y sin esfuerzos horizontales ($P = 0$). En estas condiciones la flexura $w(x)$ de la litósfera elástica cumple con la ecuación ($x \neq 0$):

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \Delta\rho g w = 0 \quad (1)$$

Donde:

D = Rigidez flexural = $Eh^3/12(1-\nu^2)$

$\Delta\rho$ = Diferencia de densidad entre el manto y material de relleno (agua).

$w = w(x)$ = Deformación de la litósfera elástica.

La solución apropiada de (1) en este caso es:

$$w(x) = w_0 e^{-x/\alpha} [\cos(x/\alpha) + \sin(x/\alpha)]$$

Donde:

w_0 = Amplitud máxima de la deformación o flexión en $x=0$.

α = Parámetro Flexural = $[4D/\Delta\rho g]^{1/4}$

- Demuestre que la ecuación (2) es solución de la ecuación diferencial (1).
- Haga un gráfico w/w_0 v/s x/α , y encuentre los valores máximo y mínimo de la función.
- En el archipiélago de Hawaii, en un perfil transversal a la cadena de islas volcánicas, se produce un bulbo periférico (batimetría positiva) a una distancia de 250 km del centro de la cadena de islas. Considere esta distancia como el valor de x donde se alcanza el máximo de la función $w(x)$. Calcule el **parámetro flexural α** y el **espesor elástico h** para litósfera deformada por la carga producida por el archipiélago de Hawaii (50%).

Datos: $E = 70$ Gpa; $\nu = 0.25$; $\rho_m = 3.3$ gr/cc