AUXILIAR Nº 2

FISICA DE LA TIERRA. ELIAS LIRA

PROBLEMA 1: POTENCIAL GRAVITATORIO TERRESTRE.

El potencial gravitatorio descrito por la fórmula de McCullagh (1849) (potencial debido a un esferoide o elipsoide de revolución), es la aprox. a primer orden a la forma de la Tierra. Para una aprox más detallada se resuelve la ecuación diferencial de Laplace para el potencial gravitatorio.

$$\nabla^2 U = 0 \qquad (1).$$

Por simetría del problema, se utilizan coordenadas polares esféricas: $U = U(r,\theta,\varphi)$. , así

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \qquad (2)$$

Para solucionar la ecuación (2) se utiliza el método de separación de variables. Se asume una solución de la forma

$$U(r,\theta,\varphi) = R(r)\,P(\theta)\,Q(\varphi) \quad (3)$$

Introduciendo (3) en (2).

$$\frac{1}{r^2}PQ\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}RQ\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}RP\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{r^2}{RPQ}$$

$$\rightarrow \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{P\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Q\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -\frac{1}{P\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{Q\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = cte =$$

luego $$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) = C$$

Supongamos una solución de la forma $R = r^{\ell}$.

luego $$\frac{\partial R}{\partial r} = \ell\, r^{\ell-1}$$

$$\frac{1}{r^{\ell}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ell r^{\ell+1}\right) = c \rightarrow \frac{1}{\cancel{r^{\ell}}}\,\ell(\ell+1)\cancel{r^{\ell}} = c$$

$$c = \ell(\ell+1)$$

Si r^{ℓ} es solución, $r^{-(\ell+1)}$ también es solución ??

$$\ell \rightarrow -(\ell+1) \rightarrow c' = -(\ell+1)(-\ell-1+1) = \ell(\ell+1) = c$$

luego, la solución general para R.

$$\boxed{R(r) = A r^{\ell} + \frac{B}{r^{\ell+1}}}\ , \quad \ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ahora los términos esféricos:

$$-\frac{1}{P\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{Q\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = C = \ell(\ell+1) \quad /\ \mathrm{sen}^2\theta.$$

$$-\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{P}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = \ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2\theta.$$

$$-\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = \ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{P}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) = \mathrm{cte} = m^2.$$

entonces

$$-\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = m^2 \rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} + m^2 Q = 0.$$

↑ oscilador armónico.

Su solución es

$$\boxed{Q(\varphi) = C\cos(m\varphi) + D\,\mathrm{sen}(m\varphi)}\ , \quad m = 0, 1, 2, 3\ldots$$

luego:

$$\ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{P}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) = m^2$$

$$P\,\ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) - P m^2 = 0.$$

$$\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) + P\left[\ell(\ell+1)\,\mathrm{sen}^2\theta - m^2\right] = 0$$

↑ ecuación asociada de Legendre.

cambiando $z = \cos\theta$

$$(1-z^2)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2z\frac{\partial P}{\partial z} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]P = 0$$

↑ Ecuación de Legendre.

La solución de esta ecuación son los polinomios de Legendre, P_l.

$$\boxed{P_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}[(z^2-1)^l]}$$ Polinomios de Legendre

Existen otras soluciones a la ecuación de Legendre de orden l^4, pero estas divergen en $= \pm 1$ → no sirven para un potencial grav.

$$\boxed{P_l^m(z) = (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_l(z)}$$ $0 \leq m \leq l$.

Funciones asociadas de Legendre.

Se puede demostrar que $\{P_l^m, Q_m, R_l\}_{m=0}^{l}\,{}_{l=0}^{\infty}$ constituye una base ortonormal de funciones que satisfacen la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. La solución es:

$$\boxed{U(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\{A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\}\{C_l^m\cos(m\varphi) + D_l^m \operatorname{sen}(m\varphi)\}P_l^m(\cos\theta)}$$

- La dependencia en la variable "r" debe satisfacer el límite $0 \leq r \leq R_T$. En particular, si consideramos que "U" debe anularse en el ∞ (pues no existen densidades de masa para $r > R_T$).

Así, la componente creciente en R debe anularse.

$$r^l \longrightarrow 0 \longleftrightarrow A_l = 0 \quad \forall l \geq 0$$

Además para $l=0, m=0$ → existe un término $A_0 C_0^0 P_0^0(\cos\theta)$

Pero $P_0^0(z) = 1 \Rightarrow$ es cte → no interesa $\Leftrightarrow A_0 = C_0^0 = 0$

- Notar por otro lado que si el origen de coordenadas está en el centro de masa del sistema, $B_1 = 0$, i.e. no existe dependencia en r^{-2}. Así:

$$\boxed{U(r,\theta,\varphi) = -\frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^{l}(A_l^m\cos(m\varphi) + B_l^m \operatorname{sen}(m\varphi))P_l^m(\cos\theta)\right]}$$

• Si además existe simetría de rotación ($m=0$)

$$\boxed{U(r,\theta) = -\frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)\right]}$$ ✓ Tarea *

Evaluando numéricamente hasta $l=4$ se obtiene la forma de "Pera" de la Tierra.

Problema 2: en la deducción de la fórmula de McCullagh se usó el siguiente resultado.

$$I_{op} = l^2 A + m^2 B + n^2 C$$

$\hat{r}_p = (l, m, n)$ vector dirección

A, B, C = momentos de inercia principales (c/r a $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$).

$$I_{op} \equiv \int_V \rho \|\bar{r} \times \hat{r}_p\|^2 dV$$

Pero $\bar{r} \times \hat{r}_p = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ l & m & n \end{vmatrix} = (yn - mz, zl - xn, xm - yl)$

$$\|\bar{r} \times \hat{r}_p\|^2 = y^2n^2 + z^2m^2 + z^2l^2 + x^2n^2 + x^2m^2 + y^2l^2 - 2(nmyz + lnxz + mlxy)$$

$$= l^2(y^2+z^2) + m^2(x^2+z^2) + n^2(x^2+y^2) - 2(\%)$$

Dado que x, y, z son los ejes pples, la matriz de inercia es diagonal $\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$, ello implica que cualquier combinación $x_i x_j$ con $i \neq j$ satisface $-\int_V \rho x_i x_j dV = 0$

luego

$$I_{ij} = \int \rho(\bar{r})(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) = 0$$

luego $\% = 0$, entonces $I_{op} = l^2 \underbrace{\int_V \rho(y^2+z^2)dV}_{=A} + m^2 \underbrace{\int_V \rho(x^2+z^2)dV}_{=B} + m^2 \underbrace{\int_V \rho(x^2+y^2)dV}_{=C}$

luego $\boxed{I_{op} = l^2 A + m^2 B + n^2 C}$

Problem 3:

Fórmula de Mc-Cullagh: $U_g \approx -\frac{GM}{r} + \frac{G J_2 M a^2 (3\sin^3\phi - 1)}{2r^3}$

y la forma de la tierra $U_g + U_{rot} = U_0$, con $U_{rot} = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\phi$

Divido esta última ec. por GM/a

$$U_0 / \frac{GM}{a} = -\frac{a}{r} + \frac{J_2 a^3 (3\sin^3\phi - 1)}{2r^3} - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^2}{GM/a} r^2 \cos^2\phi$$

Definiendo $m = \frac{\omega^2 a^2}{GM/a}$ y $r_* \equiv r/a$, entonces

$$(1) \quad = cte = -\frac{1}{r_*} + \frac{J_2}{2r_*^3}(3\sin^2\phi - 1) - \frac{1}{2} m r_*^2 \cos^2\phi$$

Pero en $\phi = 0 \to r = a \iff r_* = 1$

$\phi = \pm\pi/2 \to r = b \iff r_* = 1 - f$, con $f \equiv \frac{a-b}{a}$

luego $cte = -1 + -\frac{J_2}{2} - \frac{m}{2} = -(1-f)^{-1} + J_2(1-f)^{-3}$ (2)

Pero $f << 1$, por lo tanto $(1 \pm f)^\alpha \approx 1 \pm \alpha f$

entonces $-(1-f)^{-1} \approx -1 - f$

$J_2(1-f)^{-3} \approx J_2(1+3f) \approx J_2 \quad (J_2, f << 1)$.

Así $J_2\left(1 + \frac{1}{2}\right) \approx f - \frac{m}{2} \Rightarrow \boxed{J_2 \approx \frac{2f - m}{3}}$

Retomemos (2)

$$C_0 \equiv -cte = 1 + \frac{J_2}{2} + \frac{m}{2}$$

Tomo (1) y la multiplico por r_*.

$$(3). \quad C_0 r_* - 1 + \frac{J_2}{2}(3\sin^2\phi - 1) r_*^{-2} - \frac{m}{2}\cos^2\phi\, r_*^3 = 0$$

Queremos ver si $r_*(\phi)$ correspondiente a una elipse se aproxima a una solución de (3).

Ec. de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

pero $x = r\cos\phi$ reemplazando
$y = r\,\text{sen}\phi$

$$\frac{r^2\cos^2\phi}{a^2} + \frac{r^2\,\text{sen}^2\phi}{b^2} = 1$$

$$\frac{r^2\cos^2\phi}{a^2} + \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}\,\text{sen}^2\phi = 1$$

$$\Rightarrow \quad r_*^2\cos^2\phi + r_*^2\,\text{sen}^2\phi\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1$$ también

corresponde a la ec. de una elipse.

$$r_*^2\left[\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 1$$

$$r_*^2\left[1 - \text{sen}^2\phi + \text{sen}^2\phi\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 1.$$

$$r_*^2\left[1 - \text{sen}^2\phi\left(1 - (a/b)^2\right)\right] = 1$$

$$(4) \quad r_* = \left[1 + \left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1\right)\text{sen}^2\phi\right]^{-1/2}$$

Por otro lado, la excentricidad se define como

$$e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad \text{o sea} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 = (1-e^2)^{-1} - 1$$

utilizando la aprox. binomial. $\approx e^2$

sea $\varepsilon \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1$, entonces (4) (usando nuevamente la aprox. binomial)

$$r_* \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}\,\text{sen}^2\phi$$

$$r_*^{-2} \approx 1 + \varepsilon\,\text{sen}^2\phi$$

$$r_*^{+3} \approx 1 - \frac{3}{2}\varepsilon\,\text{sen}^2\phi$$

reemplazando en (3).

$$\Rightarrow C_0\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\text{sen}^2\phi\right) - 1 + \frac{J_2}{2}(3\,\text{sen}^2\phi - 1)(1 + \varepsilon\,\text{sen}^2\phi)$$

$$-\frac{m}{2}\underbrace{\cos^2\phi}_{(1-\text{sen}^2\phi)}\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\text{sen}^2\phi\right) = 0$$

$$\rightarrow C_0 - \left(1 + \frac{J_2}{2} + \frac{m}{2}\right) + \text{sen}^2\phi\left(-\overset{\approx -\varepsilon/2}{C_0\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{3}{2}J_2 - \overset{\approx 0}{\frac{J_2}{2}\varepsilon} + \frac{m}{2} + \overset{\approx 0}{\frac{3}{2}m\varepsilon}\right) +$$

$$\text{sen}^4\phi\left(\underset{\approx 0}{\frac{3}{2}\varepsilon J_2} - \underset{\approx 0}{\frac{3}{4}m\varepsilon}\right) \approx \frac{\text{sen}^2\phi}{2}(3J_2 + m - \varepsilon) \quad (5)$$

pero $\varepsilon \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \approx e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - (1-f)^2$

$\Rightarrow \varepsilon \approx 2f$

$\Rightarrow$ retomando (5),

$$\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\left(3J_2 + m - 2f\right) \approx 0$$