FI41A
TAREA N°1. (Entregar el 13 de Abril de 2010).

Problema 1.

Considere una partícula de masa m que está vinculada al origen del sistema de coordenadas mediante un resorte ideal cuya constante restauradora es k , pero la partícula está constreñida a moverse en un cilindro de radio R situado con su eje a lo largo del eje z del sistema de coordenadas.

- (i) Escriba la Lagrangiana del sistema.
- (ii) Encuentre las ecuaciones de movimiento utilizando el formalismo de las ecuaciones de Lagrange.
- (iii) Efectúe una transformación canónica y construya la Hamiltoniana del sistema.
- (iv) Encuentre las ecuaciones de movimiento utilizando las ecuaciones de Hamilton, y compare con las leyes de Newton.

Problema 2.

Considere el funcional positivo definido $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x\psi(x) + \lambda\hbar \frac{\partial\psi(x)}{\partial x} \right|^2 dx \geq 0$

(a) Desarrolle e integre por partes este funcional, para llegar a la expresión

$$I(\lambda) = \langle x^2 \rangle - \lambda\hbar + \lambda^2 \langle p^2 \rangle \quad (1)$$

Donde $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)x^2\psi(x)dx$ representa el valor esperado de x^2 , y

$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\left(\frac{\hbar\partial}{i\partial x}\right)^2\psi(x)dx$ representa el valor esperado de p^2 .

Puesto que $I(\lambda) \geq 0$, se sigue que el discriminante D de (1) satisface

$D = \hbar^2 - 4\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \leq 0$, por tanto $\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$. Esto demuestra que si el paquete de ondas es tal que $\langle x \rangle = 0$ y $\langle p \rangle = 0$, entonces la dispersión mínima se obtiene para un paquete gaussiano.

Introducir definición de Δx y Δp .

- (b) Repita la demostración anterior para un paquete tal que $\langle x \rangle \neq 0$; $\langle p \rangle \neq 0$. Para ello reemplace en el razonamiento anterior, x por $x - \langle x \rangle$; p por $\frac{\hbar \partial}{i \partial x} - \langle p \rangle$. Con esto demuestra que la dispersión mínima se obtiene para un paquete gaussiano, aun si $\langle x \rangle \neq 0$; $\langle p \rangle \neq 0$.

Problema 3.

Considere un paquete cuya distribución $F(p)$ en espacio de momentum está dada por

$$F(p) = N \exp\left(-\frac{\alpha}{\hbar} p\right), \text{ donde } p \text{ es el módulo de } \mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}.$$

- (a) Encuentre la constante de normalización N .
 (b) Usando la Transformada de Fourier, demuestre que

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{(2\alpha)^{3/2}}{\pi} \frac{\alpha}{(r^2 + \alpha^2)^2}$$

- (c) Calcule Δx y Δp_x para este paquete, y evalúe el producto $\Delta x \Delta p_x$. ¿Cómo se compara este resultado, con el que se obtiene para un paquete Gaussiano?

Problema 4.

Considere un paquete de ondas $\Psi(x, t)$ que incide desde la izquierda ($x < 0$) sobre un pozo de potencial en 1-D localizado alrededor de $x = 0$,

$$\Psi_{\text{inc}}(x, t) = \int_0^{\infty} A(k) \exp[i(kx - \omega t)] dk \quad (1)$$

Considere que a una distancia grande $x < 0$ del origen, la intensidad de la onda incidente es A , y que para una distancia grande $x > 0$ del origen, la intensidad de la onda transmitida es

F. Suponga conocido el coeficiente de transmisión $T(k) = \left| \frac{F(k)}{A(k)} \right|^2$, tal que $F(k) = \sqrt{|T(k)|} \exp[-i \varphi_T(k)]$, donde el efecto del pozo de potencial sobre el paquete incidente se representa mediante el número real $|T(k)|$ y la fase (real) $\varphi_T(k)$ correspondiente a cada onda plana incidente $A(k)$. Entonces, el paquete de ondas transmitido, se puede escribir como

$$\Psi_{\text{trans}}(x, t) = \int_0^{\infty} A(k) \sqrt{T(k)} \exp[i(kx - \omega t - \varphi_T(k))] dk \quad (2)$$

- (a) Calcule la velocidad de grupos del paquete transmitido, empleando el método utilizado en clases. En particular, demuestre que la ecuación de movimiento que describe la evolución temporal del paquete de ondas transmitido, es

$$x - v_G \left[t + \hbar \left(\frac{\partial \varphi_T}{\partial E} \right)_{E_0} \right] = 0, \text{ donde se supone que la Transformada de Fourier del}$$

paquete incidente, tiene un máximo en $k = k_0$, y $E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$

- (b) Defina $\tau_0 = -\hbar \left(\frac{\partial \varphi_T}{\partial E} \right)_{E_0}$. Calcule el tiempo Δt que se demora el paquete

transmitido en atravesar la región $-a/2 < x < a/2$ donde se encuentra localizado el pozo de potencial. Deduzca entonces, que $\Delta t = \Delta t_{\text{CLAS}} \left(1 + \frac{\tau}{\Delta t_{\text{CLAS}}} \right)$, donde $\Delta t_{\text{CLAS}} =$

a/v_G , el tiempo clásico que demoraría el paquete de ondas transmitido en atravesar la región $-a/2 < x < a/2$ en ausencia de un pozo de potencial.

El resultado neto, es que el efecto del pozo de potencial se puede representar por el tiempo de retardo τ , que corresponde al tiempo de retardo de Wigner, o tiempo de localización del paquete de ondas en la región del pozo de potencial, como resultado de interferencia constructiva entre la onda que rebota en la pared derecha del pozo de potencial y la onda incidente.

Problema 5.

Considere una pelota de fútbol de masa $m = 0.5 \text{ Kg}$ que se mueve con velocidad $v_0 = 60 \text{ Km/h}$, caracterizada por un diámetro $D = 30 \text{ cm}$. La pelota se mueve en el espacio vacío.

- Utilice un paquete de ondas Gaussiano $\psi(x, 0)$ para representar esta pelota en el espacio de coordenadas, suponiendo que en $t = 0$ la pelota se encuentra en el origen del sistema de coordenadas, desplazándose en la dirección $+x$. Encuentre la transformada de Fourier $F(k)$.
- Utilizando $F(k)$, construya el paquete $\psi(x, t)$ para $t > 0$. Demuestre que se trata de un paquete Gaussiano, tal que el "diámetro" de la pelota $D(t)$ aumenta con el tiempo, como consecuencia de que la energía cinética de la pelota depende cuadráticamente del vector de onda k . Encuentre el tiempo Δt requerido para que la pelota aumente al doble su diámetro $D(\Delta t) = 2 D(0)$.

Problema 6

Considere una onda plana de amplitud A con vector de onda k_0 que incide desde la izquierda ($x < 0$) sobre la barrera de potencial definida por $V(x) = 0$ para $x < 0$, $V(x) = V_0 > 0$ para $x > 0$. Suponga que la onda plana incidente da origen a una onda plana reflejada de amplitud B , y a una onda plana transmitida ($E > V_0$) de amplitud C con vector de onda k . Sea $\varphi_1(x)$ la solución de la ecuación de Schrödinger válida para $x < 0$, y $\varphi_2(x)$ la solución de la ecuación de Schrödinger válida para $x > 0$.

Un estudiante de Física Contemporánea resuelve el problema, imponiendo la condición $\varphi_1(0) = \alpha \varphi_2(0)$, y $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_{x=0} = \beta \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)_{x=0}$ en vez de utilizar el procedimiento usual donde $\alpha = \beta = 1$. Para resolver el problema correctamente, este estudiante se da cuenta de que es necesario imponer la continuidad del vector corriente, $J_1(x) = J_2(x)$, donde

$$J_1(x) = \frac{\hbar}{m} \left[\text{Im} \left(\varphi_1 * \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right] \quad \text{y} \quad J_2(x) = \frac{\hbar}{m} \left[\text{Im} \left(\varphi_2 * \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right]$$

- Si siguiendo el argumento presentado en clases, imponga la continuidad $J_1(x) = J_2(x)$, y encuentre una relación entre α y β . En el caso $\alpha = \pi$, ¿Cuánto vale β ?

- (a) Encuentre el coeficiente de reflexión $R = BB^*/(AA^*)$, en términos de α y β .
Encuentre el coeficiente de Transmisión $T = k(CC^*)/(k_0AA^*)$ en términos de α y β
- (c) ¿Se satisface la relación $R + T = 1$ (válida cuando $\alpha = \beta = 1$) en el caso $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$?