Teorema de Gauss

Tomemos la expresión

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{s})(\mathbf{r}-\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} d^3\mathbf{s}$$

Sabemos que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{s})$$

Tomando la divergencia de la expresión inicial

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{s})\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})\ d^3\mathbf{s}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$$

1a ecuación de Maxwell
Forma diferencial

Integrando

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}\,\mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Usando el teorema de la divergencia

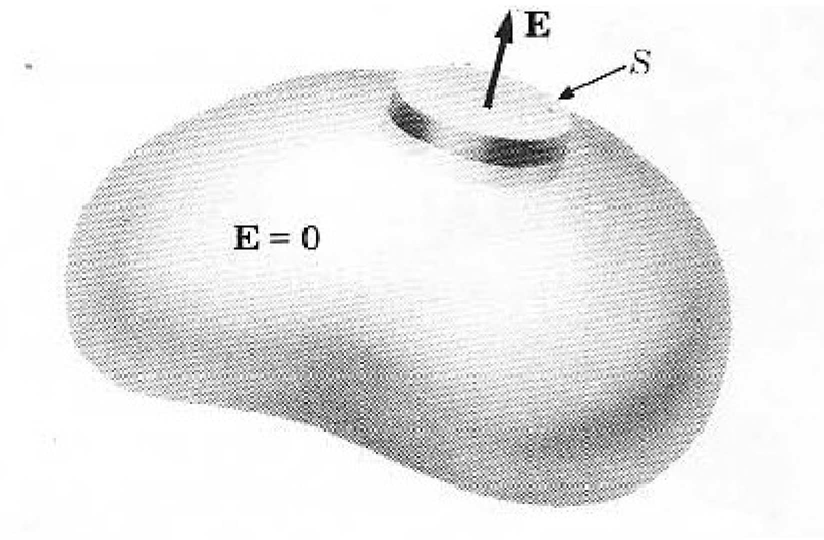
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

1a ecuación de Maxwell
Forma integral

Ejemplo: alambre infinito, superficie metálica, esfera cargada uniformemente

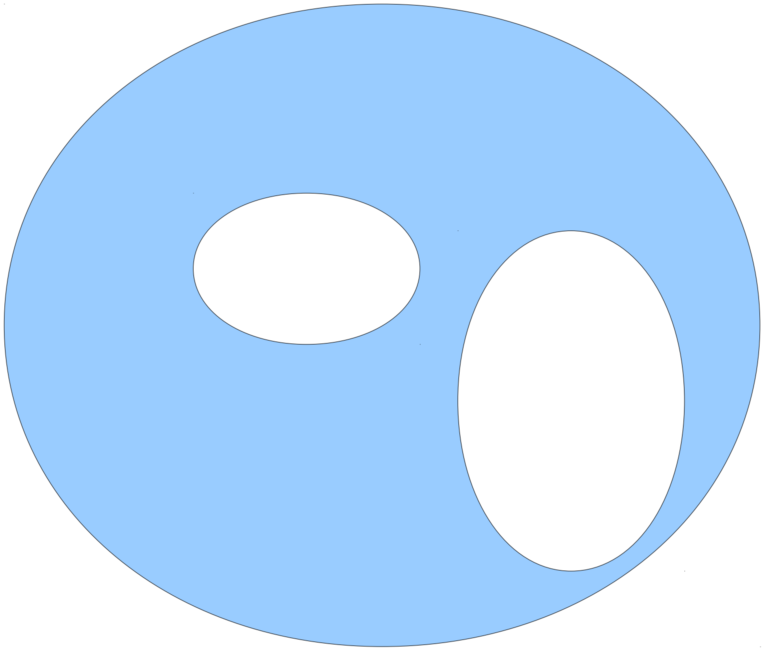
Carga superficial de un conductor

- Aplicando la ley de Gauss, en la superficie de un conductor:
-

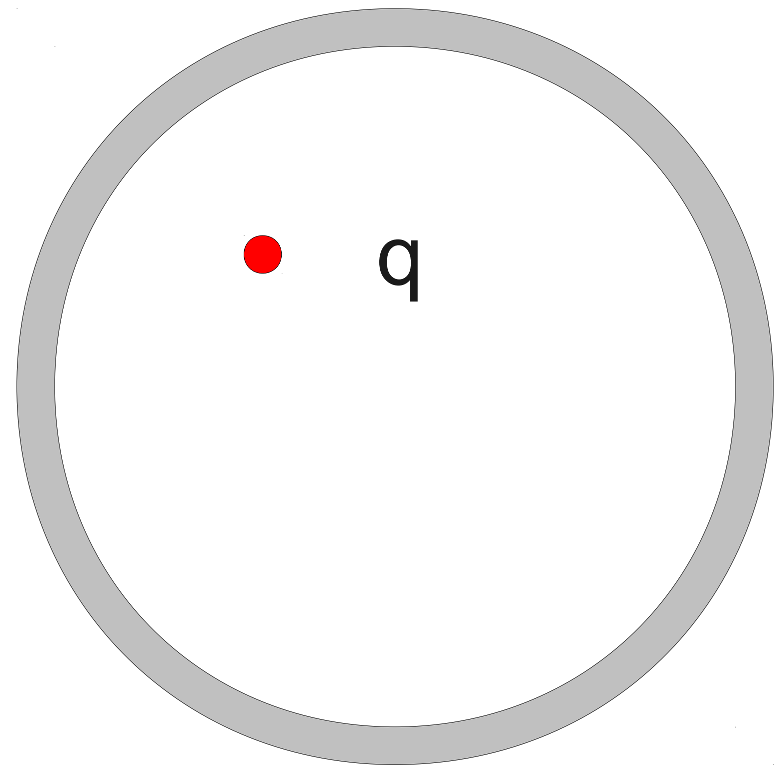


$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- Aplicación: conductor con un hueco.

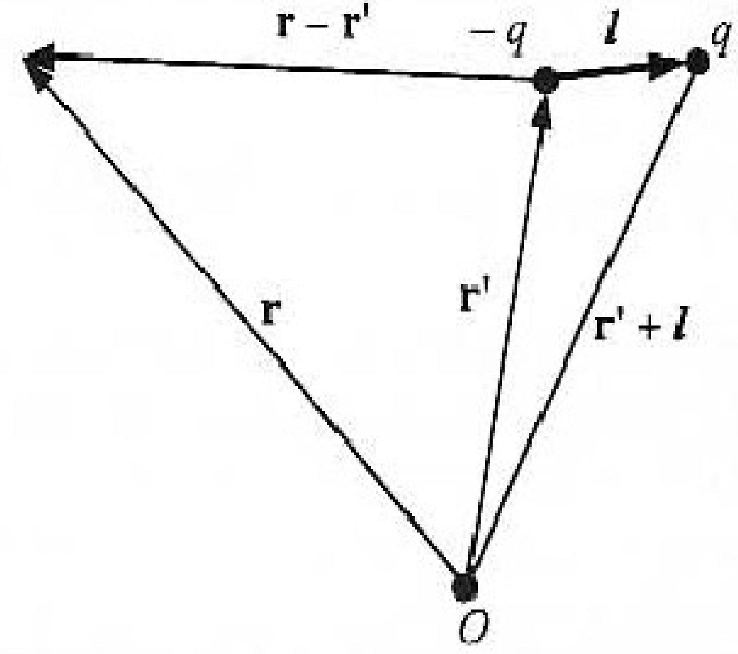


- Esfera conductora neutra con una carga puntual en su interior
- Se induce una carga no uniforme en la superficie interna
- Se induce una carga uniforme en el exterior



Dipolo eléctrico

- Dos cargas de igual magnitud y signo opuesto separadas por una distancia l.



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\boldsymbol{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\boldsymbol{l}|^3} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right\}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\boldsymbol{l}|^{-3} = [(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 - 2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^2]^{-3/2}$$

$$= |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-3}\left[1 - \frac{2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \frac{\boldsymbol{l}^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\right]^{-3/2}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\boldsymbol{l}|^{-3} = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-3}\left\{1 + \frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \cdots\right\}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{\boldsymbol{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \cdots\right\}$$

- Luego, en el limite en que l tiende a cero, la expresion anterior es exacta. Tamando constante el producto:
- $$\mathbf{p} = q\boldsymbol{l}$$
-
- El cual llamaremos el momento dipolar eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right\}$$

- En función del potencial eléctrico:
-
- $$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \boldsymbol{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right]$$
- Aproximando:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Energía de un dipolo en un campo eléctrico externo

- Suponga que el campo externo está descrito por el potencial $\varphi_{ext}(\mathbf{r})$. Luego la energá del dipolo será:
- $$U = -q\varphi_{ext}(\mathbf{r}) + q\varphi_{ext}(\mathbf{r} + \boldsymbol{l})$$
- Ahora:
- $$\varphi_{ext}(\mathbf{r} + \boldsymbol{l}) = \varphi_{ext}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{l} \cdot \nabla\varphi_{ext}$$
- luego:

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r})$$