Energía electrostática

- El trabajo realizado por una fuerza cuando una carga q es movida desde la posicion A a la B es:
-
$$\text{Trabajo} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = q\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$
-
-
$$= -q\int_A^B \nabla\varphi\cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B - \varphi_A)$$
-
- Ahora, sabemos de mecánica que:

$$Trabajo = \Delta K = -\Delta U$$

- Luego:

$$W = q(\varphi_B - \varphi_A)$$

Energía potencial de un sistema de cargas puntuales

- La energia potencial se mide con respecto a la coniguracion en que todas las cargas se encuentran infinitamente separadas. Luego:
-
-

$$U = \sum_{j=1}^{m} W_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right)$$

- Expresión que puede ser reescrita, en donde la ' significa que la suma es para i≠j:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m}{}' \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}$$

- Ahora, si definimos:
- $$\varphi_j = \sum_{k=1}^{m}{}' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}$$
-
- Entonces:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} q_j \varphi_j$$

- Del mismo modo, en el caso de distribuciones arbitrarias de carga:
-
- $$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\,dv + \frac{1}{2}\int_S \sigma(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,da$$
- En donde:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

- Ahora, en los conductores el potencial es constante, de modo que a integral de superficie puede escribirse para ellos:
-

$$\frac{1}{2}\int_{\text{conductor } j} \sigma\varphi\, da = \frac{1}{2} Q_j \varphi_j$$

-
- Donde Qj es la carga del j-esimo conductor. Luego, separando la integral de superficie en la parte para conductores y dieléctricos S':

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dv + \frac{1}{2}\int_{S'} \sigma\varphi\, da + \frac{1}{2}\sum_j Q_j \varphi_j$$

Densidad de energia

- Usando el hecho de que:
- $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ Y $\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$
- Se tiene:
- $$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv$$
- En donde la integral es en todo el espacio. Luego se puede definir la siguiente densidad de energía:

$$u = \tfrac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

Condensadores

- Dos conductores que pueden almacenar cargas opuestas e iguales (±Q) con una dierencia de potencial entre sí que es independiente de que los demas conductores del sistema tengan carga o no conforman un condensador.
-
- Lo anteriro implica que uno de los conductores envuelve al otro.

- En general, si los conductores 1 y 2 forman un condensador, donde Q es la carga en 1, y -Q la carga en 2, podemos escribir:
-

$$\varphi_1 = p_{11}Q - p_{12}Q + \varphi_x$$

$$\varphi_2 = p_{12}Q - p_{22}Q + \varphi_x$$

-
- Donde φ_x es el potencial producido por otras cargas en el sistema. Luego:

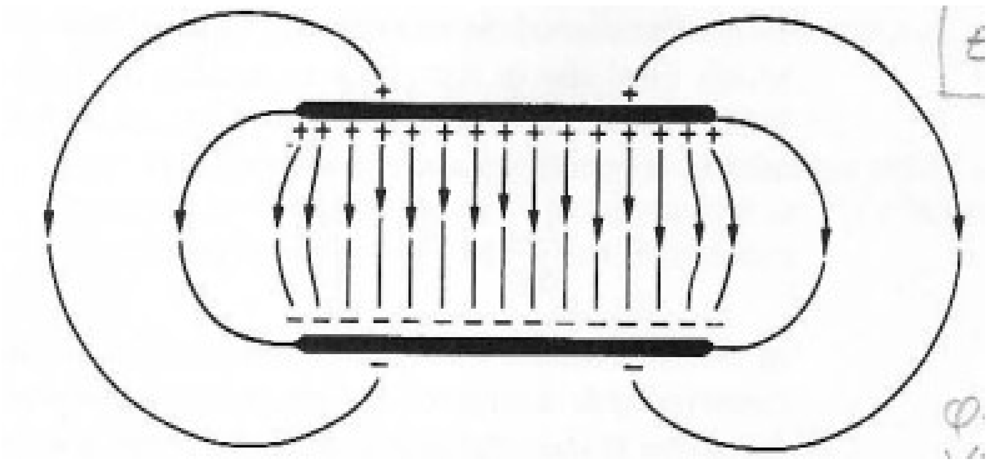
$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q$$

$$Q = C\,\Delta\varphi$$

- Usando la definicion anterior dada para la energia en conductores, se tiene que la energia almacenada en un condensador es:

$$U = \frac{1}{2} Q \, \Delta\varphi = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

- Ejemplo: condensador de placas paralelas:



Usando la ley de Gauss, se puede encontrar el campo eléctrico en las placas.

$$E = \frac{1}{\epsilon}\sigma = \frac{Q}{\epsilon A}$$

$$\Delta\varphi = Ed.$$

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon A}{d}$$