Expansión multipolar

- Suponga que se tiene una distribucion de carga
- $\rho(\vec{r})$. Luego:
-
-

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv'$$

- Expandiendo el denominador:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[-\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}[\;\;]^2 + \cdots\right\}$$

- Luego:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left\{\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2}\left[\frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right] + \cdots\right\}\rho(\mathbf{r}')\,dv'$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int_V \rho(\mathbf{r}')\,dv' + \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\int_V \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dv' + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}\int_V (3x_i' x_j' - \delta_{ij}r'^2)\rho(\mathbf{r}')\,dv'\right\}$$

- Si la carga total es cero, entonces el termino dipolar es independiente del sistema de coordenadas.
- El término cuadrupolar
-
$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}\int_V (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2)\rho(\mathbf{r}')\,dv'$$
-
- Puede ser escrito como $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}$
- Con:

$$Q_{ij} = \int_V (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2)\rho(\mathbf{r}')\,dv'$$

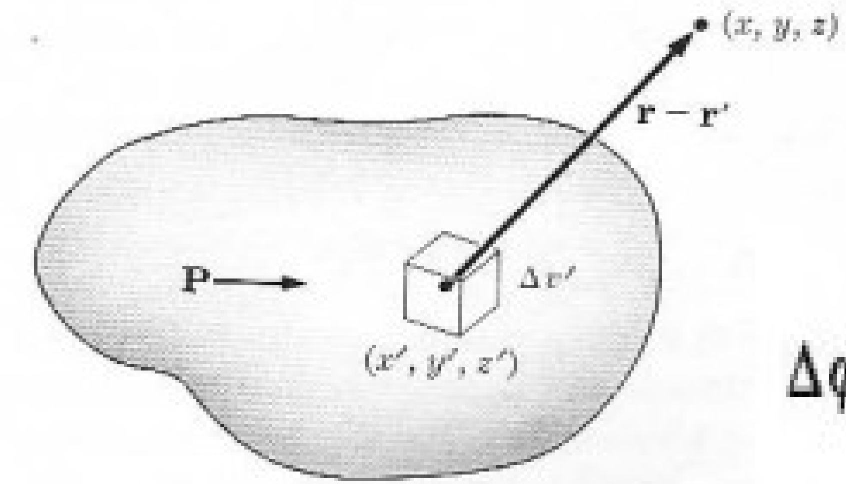
- Ejemplo: 4 cargas q, q, -q, -q ubicadas en los extremos de un cuadrado.

El campo electrostático en medios dieléctricos

- El momento dipolar de un volumen pequeño será:
- $$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta v} \mathbf{r}\, dq$$
-
- Se define la polarización **P** como:

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta v}$$

Campo fuera de un medio dieléctrico



- El potencial debido al elemento de volumen será:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\Delta\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\Delta v'}{4\pi\epsilon_0\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

Luego

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_0}\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

- Ahora:
- $$\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = +\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$
-
- Luego:
- $$\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$$
-

Usando

$$\nabla'\cdot(f\mathbf{F}) = f\nabla'\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla' f$$

- Queda:
- $$\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\cdot\mathbf{P}$$
-
- Finalmente, usando el teorema de la divergencia:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S_0}\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_0}\frac{(-\nabla'\cdot\mathbf{P})\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

- Se pueden luego definr las densidades de carga de polarización:
- $$\sigma_P \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n$$
- $$\rho_P \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}$$
-
- Luego:

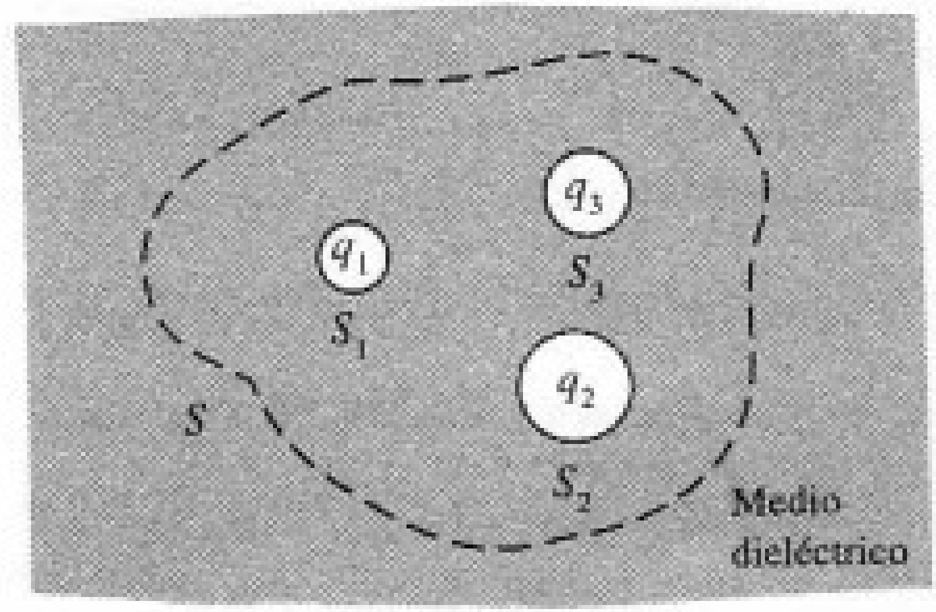
$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\oint_{S_0} \frac{\sigma_P \, da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_P \, dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Siempre debe cumplirse que la carga total de polarización:
- $$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla' \cdot \mathbf{P})\, dv' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da'$$
-
- Sea cero.
- El campo eléctrico luego será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{S_0} \sigma_P \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, da' + \int_{V_0} \rho_P \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dv'\right]$$

Ley de Gauss en un dieléctrico

- Supongamos una carga Q=q1+q2+q3 en un dieléctrico



$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{1}{\epsilon_0}(Q + Q_P)$$

Donde

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,da + \int_V (-\nabla\cdot\mathbf{P})\,dv$$

- Usando el teorema de la divergencia para la segunda integral, se anulan las contribuciones de las superficies s1, s2 y s3 con la primera integral
- $$Q_P = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da$$
- Luego:

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}\, da = Q$$

- Se define luego el desplazamiento:
- $$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$
- Y se obtiene la ley de Gauss:
- $$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = Q$$
-
- Nuevamente, se puede obtener en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

1a ecuación constitutiva

- Si P y E tiene la misma dirección:
- $$\mathbf{P} = \chi(E)\mathbf{E}$$
-
- Donde X es la susceptibilidad dieléctria. Luego:
- $$\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E)$$
- Luego:

$$\mathbf{D} = \epsilon(E)\mathbf{E}$$
$$\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E)$$

Donde ε es denominado la permitividad del material

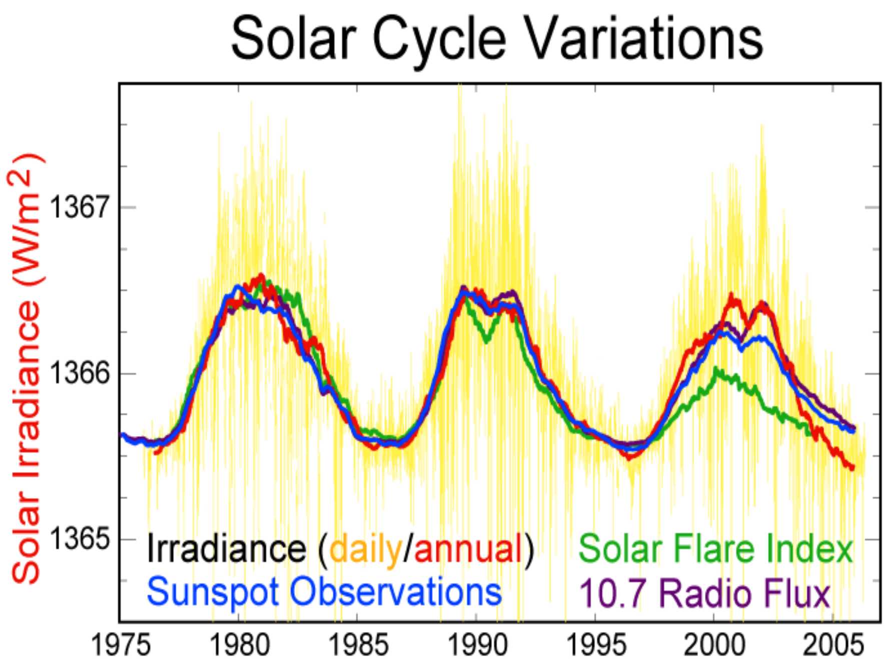
- Se define tambien la constante dieléctrica K como:

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}$$

Material	Constante dieléctrica K	Rigidez dieléctrica $E_{máx}$ (V/m)
Óxido de Aluminio	4.5	6×10^6
Vidrio*	5–10	9×10^6
Nylon	3.5	19×10^6
Polietileno	2.3	18×10^6
Cuarzo (SiO_2)	4.3	
Cloruro de sodio	6.1	
Azufre	4.0	
Madera*	2.5–8.0	
Alcohol etílico (0ºC)	28.4	
Benceno (0ºC)	2.3	
Agua (destilada, 0ºC)	87.8	
Agua (destilada, 20ºC)	80.1	
Aire (1 atm)	1.00059	3×10^6
Aire (100 atm)	1.0548	
CO_2 (1 atm)	1.000985	

Miscelaneo: tormenta solar

- Radio: 1.392×106 km
- Masa: 1.9891×1030 kg = 332,900 × tierra
- Ciclos de 11 años



24-27 oct 2002

- Explicacion: colapso de lineas de campo magnético