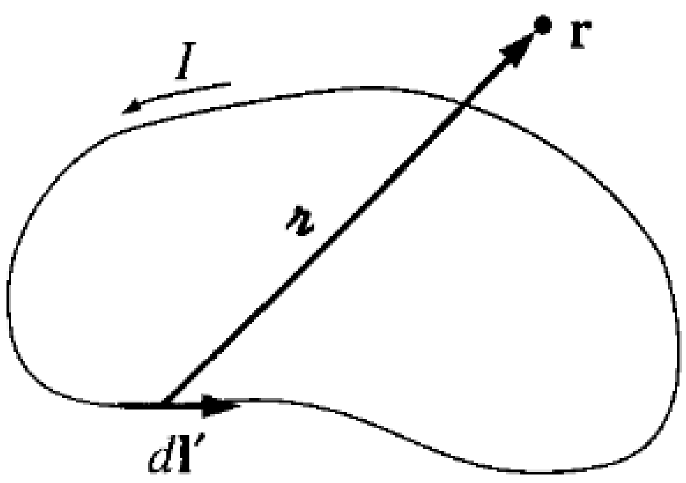
# Ley de Biot-Savart

- El campo magnético producido por una línea de corriente estacionaria está dado por:

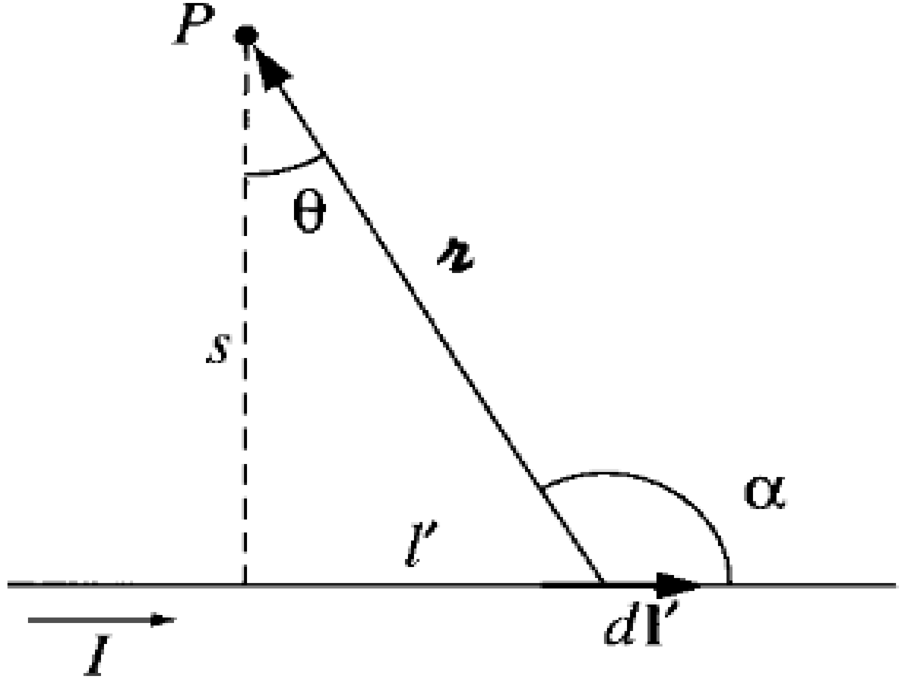
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\, dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}.$$




Con la permeabilidad magnética del vacío:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$$

- Ejemplo: encuentre el campo magnético producido por una corriente estacionaria en un alambre recto.




$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

- La fuerza por unidad de largo que sienten dos alambres rectos separados por una distancia d será:
- $$f = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$$
-
-
- Ejemlo: encuentre el campo magnético en el eje de una espira de corriente circular

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\cos\theta}{z^2}\right)2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

- Para densidades de corriente, la ley de Biot-Savart se vuelve:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \, da'$$

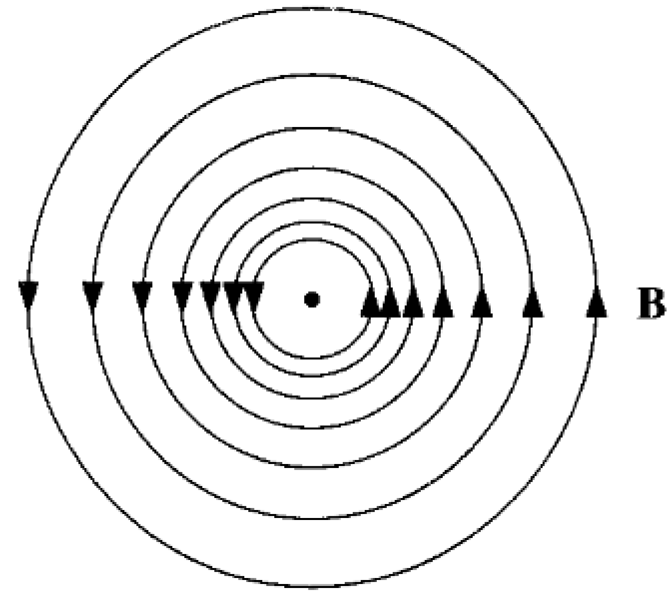
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \, dv'$$

# Divergencia y rotor de **B**

- Suponga una corriente que sale del plano:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\, dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \oint dl = \mu_0 I$$

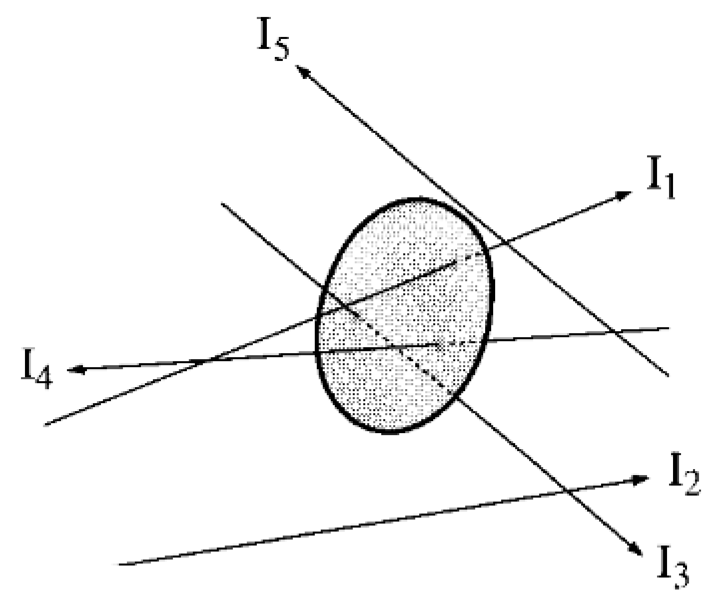
Este resultado puede ser facilmente demostrado para una trayectoria circular concentrica al alambre



- En caso de haber varios alambres:
-

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

-




- Ahora:

$$I_{\text{enc}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

-
-
- Luego:

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

- En forma rigurosa
- $$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} d\tau'$$
- $$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (x - x')\,\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\,\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\,\hat{\mathbf{z}},$$
- $$d\tau' = dx'\,dy'\,dz'.$$
-
- La divergencia será:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \right) d\tau'$$

- Usando el hecho de que:
-
- $$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$
-
- $$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right) = \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left(\nabla \times \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right)$$
- Luego

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Ahora, para el rotor:
- $$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \right) d\tau'$$
- 
- Usando:
- $$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \right) = \mathbf{J} \left( \nabla \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}$$

- Recordando:
- 
- $$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\imath})$$
- Para el segundo término:
- $$-(\mathbf{J}\cdot\nabla)\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} = (\mathbf{J}\cdot\nabla')\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}$$
- Considerando solo la componente x de r, y usando:
- $$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$$

- Queda:
-
$$(\mathbf{J}\cdot\nabla')\left(\frac{x-x'}{r^3}\right)=\nabla'\cdot\left[\frac{(x-x')}{r^3}\mathbf{J}\right]-\left(\frac{x-x'}{r^3}\right)(\nabla'\cdot\mathbf{J})$$
-
- Usando el hecho de que para corrientes estacionarias la divergencia de J es cero:
-
$$\left[-(\mathbf{J}\cdot\nabla)\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right]_x=\nabla'\cdot\left[\frac{(x-x')}{r^3}\mathbf{J}\right]$$
-

- Luego, usando el teorema de la divergencia:
- 
- $$\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{\mathscr{r}^3} \mathbf{J} \right] d\tau' = \oint_{\mathcal{S}} \frac{(x - x')}{\mathscr{r}^3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}'$$
- 
- Tomando una superficie lo suficientemente grande, se tiene que contiene toda la corriente, por lo que J=0 en la frontera. Luego, este término no contribuye al rotor.
- 

- Finalmente:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') 4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, d\tau' = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

- Ecuación conocida como la Ley de Ampère

$$\boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}.}$$

- Para el signo de la corriente, tenendo en cuenta el loop, se debe usar la regla de la mano derecha.

- Ejemplo: usando la ley de ampere, encuentre el campo magnatico a una distancia s de una alambre.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = B2\pi s = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}.$$