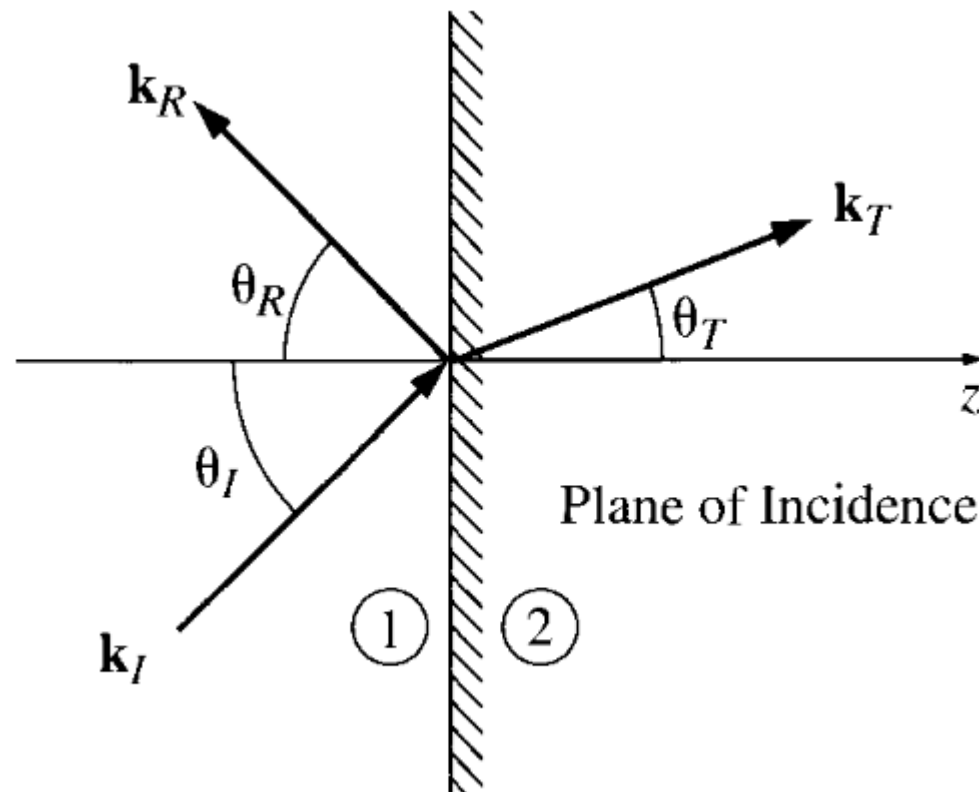


Reflección y transmisión a incidencia oblicua

- Sugongamos que una onda electromagnética incide sobre una superficie dieléctrica:



- Luego:

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_I \times \tilde{\mathbf{E}}_I)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_R \times \tilde{\mathbf{E}}_R)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\hat{\mathbf{k}}_T \times \tilde{\mathbf{E}}_T)$$

- Las frecuencias son iguales en los dos medios, luego:

- $$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega$$

- $$k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T$$

- En donde se ha usado el índice de refracción $n=c/v$.

- Ahora debemos usar las condiciones de borde:
- (i) $\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp$, (iii) $\mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel$,
-
- (ii) $B_1^\perp = B_2^\perp$, (iv) $\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel$
-
- Al aplicarlas, siempre obtendremos ecuaciones de la forma:

$$(\quad)e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + (\quad)e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = (\quad)e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \text{ en } z = 0$$

- Luego, para que la igualdad se mantenga para todo t y x , las exponenciales deben ser iguales. Luego, debe tenerse también:
- $\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} \quad \text{en } z = 0$
- O lo mismo:
- $x(k_I)_x + y(k_I)_y = x(k_R)_x + y(k_R)_y = x(k_T)_x + y(k_T)_y$
- Lo cual significa, al evaluar $x=0$ e $y=0$ por separado:

$$(k_I)_y = (k_R)_y = (k_T)_y$$

$$(k_I)_x = (k_R)_x = (k_T)_x$$

- Si hacemos que K_I se encuentre en el plano xz, luego K_R y K_T se encontrarán en el mismo plano. En ese caso K_{Iy} será cero.
- Luego, los vectores de onda incidentes, transmitidos y reflejados se encuentran en un mismo plano.
- La ecuación para las componentes x de K implica:

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T$$

- Esta ecuación implica que el ángulo de incidencia y reflexión son iguales:

- $$\theta_I = \theta_R$$

- Y además, la segunda igualdad:

- $$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}$$

- Ecuación conocida como la Ley de Snell

- Una vez eliminada la dependencia exponencial, las condiciones de borde

$$(i) \epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp, \quad (iii) \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel,$$

$$(ii) B_1^\perp = B_2^\perp, \quad (iv) \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel$$

- Toman la forma:

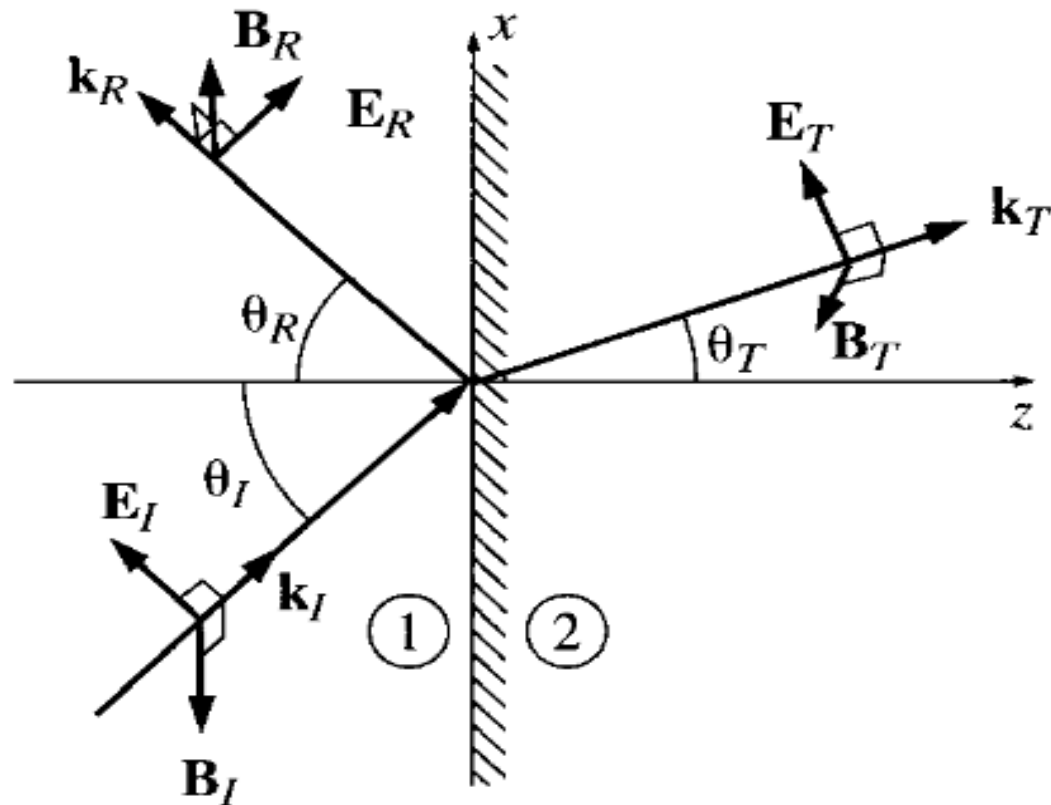
$$(i) \quad \epsilon_1 (\tilde{\mathbf{E}}_{0_I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0_R})_z = \epsilon_2 (\tilde{\mathbf{E}}_{0_T})_z$$

$$(ii) \quad (\tilde{\mathbf{B}}_{0_I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0_R})_z = (\tilde{\mathbf{B}}_{0_T})_z$$

$$(iii) \quad (\tilde{\mathbf{E}}_{0_I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0_R})_{x,y} = (\tilde{\mathbf{E}}_{0_T})_{x,y}$$

$$(iv) \quad \frac{1}{\mu_1} (\tilde{\mathbf{B}}_{0_I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0_R})_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} (\tilde{\mathbf{B}}_{0_T})_{x,y}$$

- Suponiendo que el campo eléctrico tiene orientación paralela al plano de incidencia, o sea, polarización paralela, tenemos la situación de la figura:



- Luego, las condiciones de borde son:

- $$\epsilon_1(-\tilde{E}_{0_I} \sin \theta_I + \tilde{E}_{0_R} \sin \theta_R) = \epsilon_2(-\tilde{E}_{0_T} \sin \theta_T)$$

- $$\tilde{E}_{0_I} \cos \theta_I + \tilde{E}_{0_R} \cos \theta_R = \tilde{E}_{0_T} \cos \theta_T$$

- $$\frac{1}{\mu_1 v_1}(\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0_T}$$

- La ultima ecuación se puede escribir:

$$\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R} = \beta \tilde{E}_{0_T} \quad \text{con} \quad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

- Y la segunda:

$$\tilde{E}_{0_I} + \tilde{E}_{0_R} = \alpha \tilde{E}_{0_T}$$

- Con

$$\alpha \equiv \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}$$

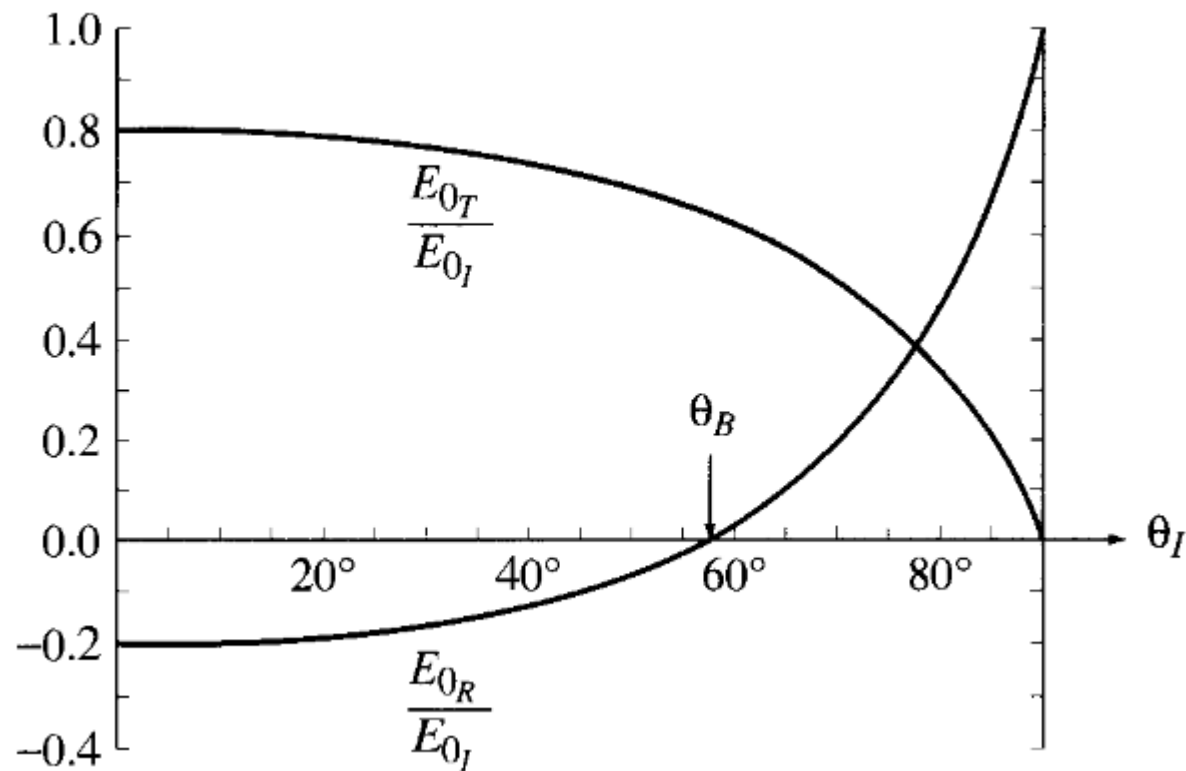
- Finalmente, se puede despejar las Ecuaciones de Fresnell

$$\tilde{E}_{0_R} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0_I}$$

- Las amplitudes transmitidas y reflejadas dependen del ángulo de incidencia pues:
- $$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2) \sin \theta_I]^2}}{\cos \theta_I}$$
- Existe un ángulo de incidencia θ_B llamado el ángulo de Brewster para el cual la onda reflejada se anula, o sea, cuando $\alpha=\beta$, luego

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2}$$

- U aproximadamente: $\tan \theta_B \cong \frac{n_2}{n_1}$



Coeficientes de transmisión y reflexión para distintos ángulos de incidencia y para $n_1=1$ y $n_2=1.5$.

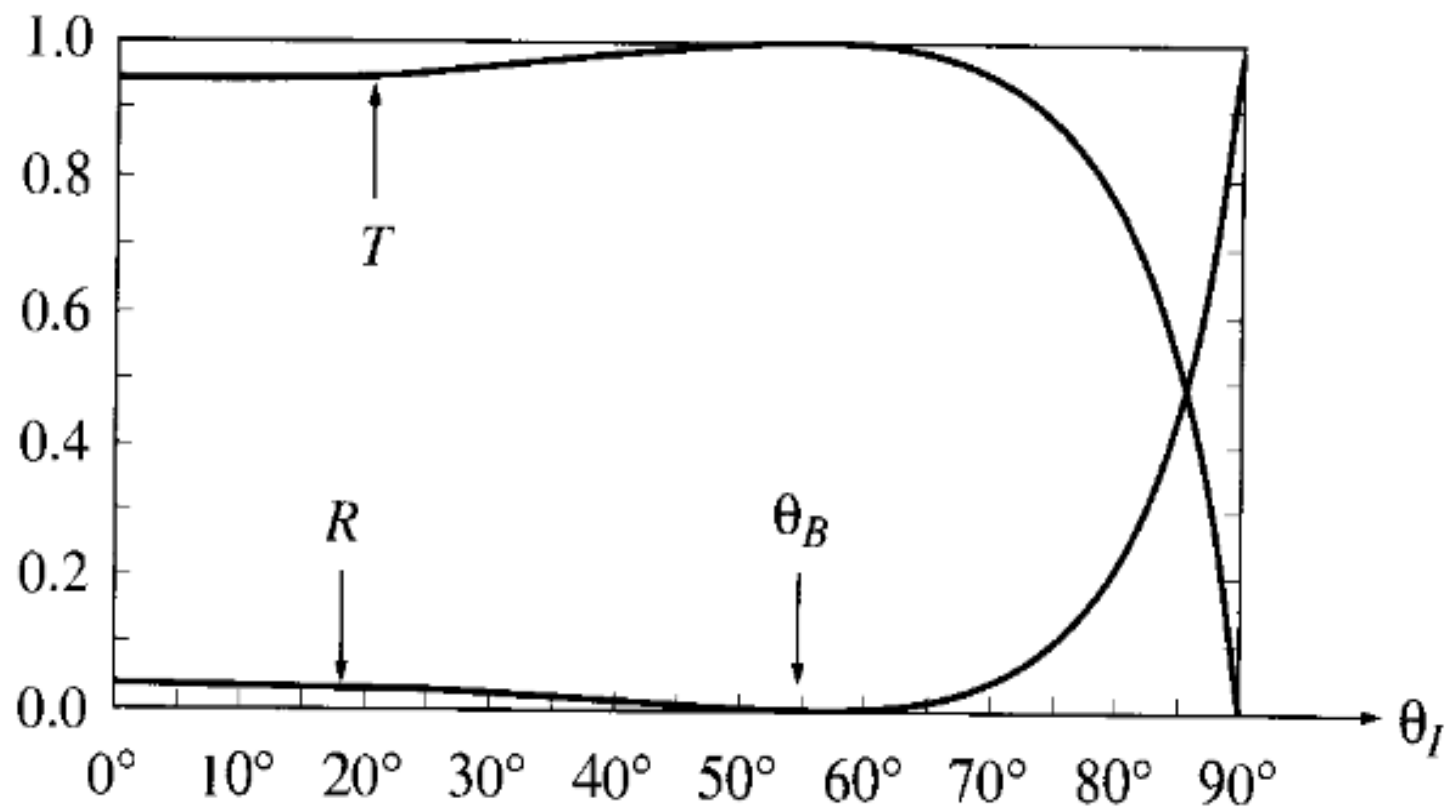
- Se definen la transmitancia y la reflectancia como la relación entre la intensidades de la luz transmitida y reflejada con la incidente:

- $$I_I = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0I}^2 \cos \theta_I \quad I_R = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0R}^2 \cos \theta_R$$

- $$I_T = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_{0T}^2 \cos \theta_T$$

- Luego:
$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right)^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \alpha \beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2$$



Transmitancia y reflectancia para distintos ángulos de incidencia y para $n_1=1$ y $n_2=1.5$.

Vemos que $R+T=1$, lo cual es fácilmente comprobable de las formulas.