

Energia en campos magneticos

- La fem inducida en una inductancia dificulta el paso de la corriente, luego el trabajo hecho por unidad de tiempo para mover cargas en contra de esta fem será:

- $$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt}$$

- Luego, el trabajo hecho al partir con corriente nula hasta obtener una corriente I será:

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

- Ahora, $\Phi = LI$, y recordando

- $$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

- $$LI = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

- Luego:

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

- Y:

- $$W = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl$$

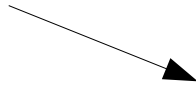
- O también en función de \mathbf{J}

- $$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dV$$

- Que puede ser escrita:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV$$

Para demostrar esta identidad usar tensor de levi-civita



- Ahora: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
 - Y $\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
 - Luego: $W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 dV - \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dV \right]$
 -
 - $= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_V B^2 dV - \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \right],$
 -
 - La segunda integral se anula al integrar en todo el espacio. Luego:
- $$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{Todo espacio}} B^2 dV$$

- Luego podremos comparar:

$$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \int (V\rho) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$$

- De donde proviene la energía magnética, si el campo magnético nunca hace trabajo?
- Rspta: del campo eléctrico inducido al crear el campo magnético.

- Un cable coaxial largo transporta una corriente I en la superficie del cilindro interior de radio a , la cual regresa por el manto cilindro externo de radio b . Encuentre la energía magnética almacenada en el cable en una sección de largo L .

Ecuaciones de Maxwell hasta ahora

- Hemos derivado las siguientes ecuaciones hasta ahora:

I) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ Ley de Gauss

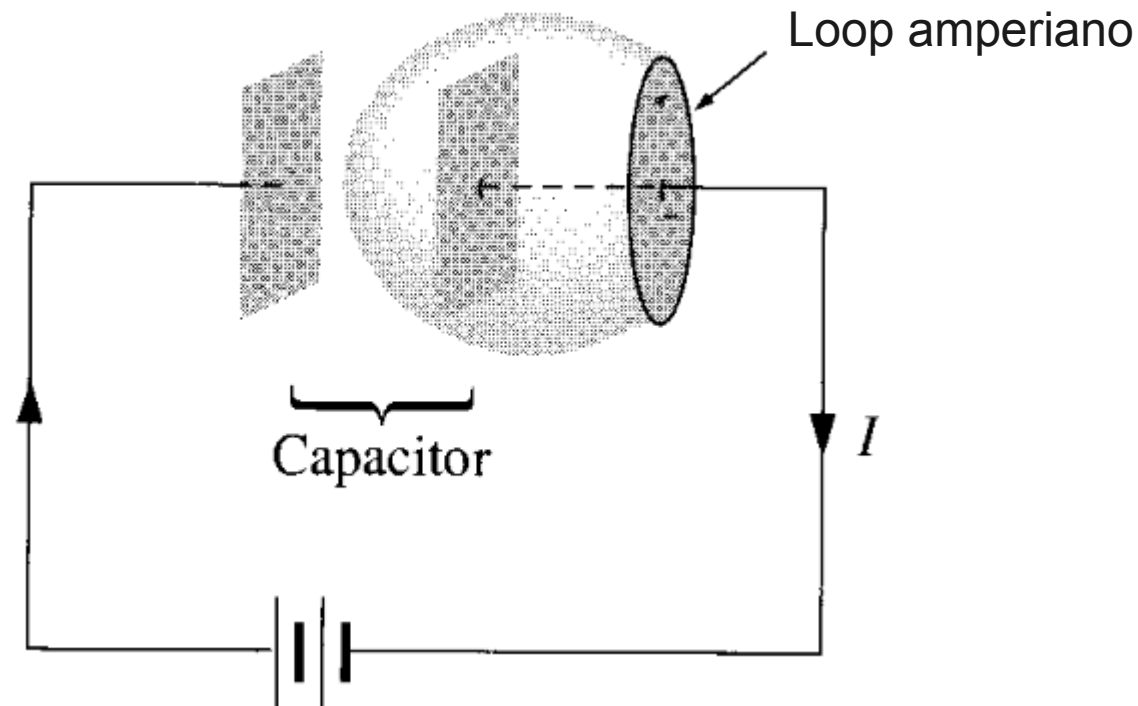
II) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

III) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ Ley de Faraday

IV) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ Ley de Ampere

- Vemos que si aplicamos el operador divergencia a la ecuación IV), tenemos una inconsistencia:
- $$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{J})$$
- El lado izquierdo de la ecuación es siempre cero, pero el lado derecho solo es cero para corrientes estáticas
-

- El problema se puede observar en el siguiente ejemplo. Un condensador se encuentra cargandose, de modo que hay una corriente circulando por el conductor que lo conecta a la batería. Luego, al alicar la ley de ampere en una superficie que intersecte el alambre conductor, existirá corriente. Pero al tomar una superficie que pase entre las placas del condensador, no habrá corriente.



Cómo arreglar la ley de Ampere

- Ya vimos que teníamos problemas con:

- $$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{J})$$

- Ahora, usando la ecuación de continuidad y la ley de Gauss:

- $$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

- Luego, si sumamos a la ley de Ampere el termino:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Vemos que se elimina el problema al aplicar al la divergencia.
- Vemos, que un campo eléctrico que cambia, induce un campo magnético.
- El término:
- $$\mathbf{J}_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
- Se denomina corriente de desplazamiento, aunque no sea una corriente real.

- Finalmente, las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Agregando la ley de fuerza:
- $$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$
-
- Se completa la formulación de la electrodinámica clásica.