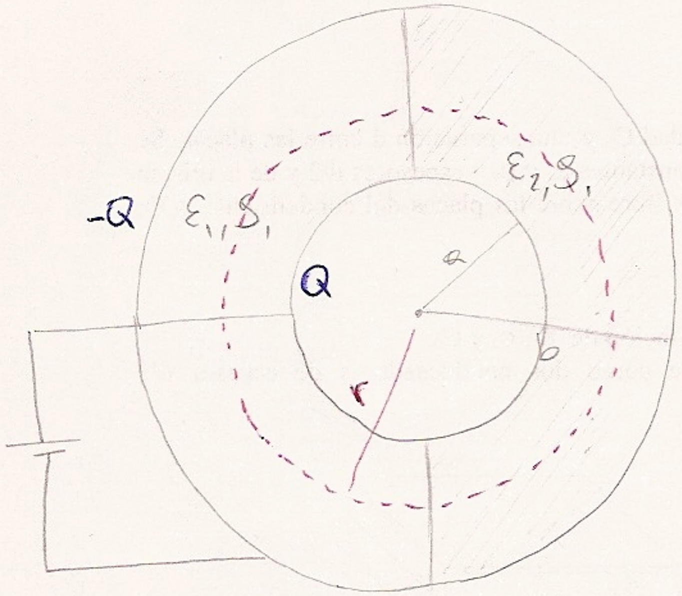
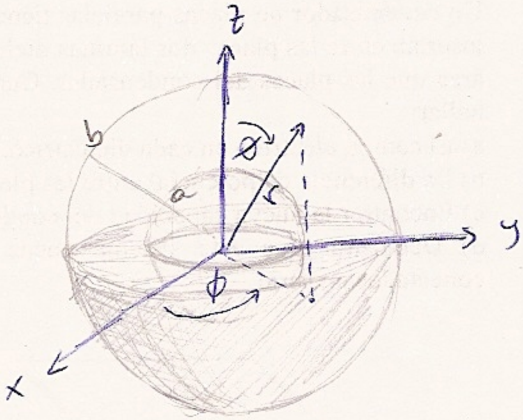
Pauta P3C2 FI2002-4





a) Se calculará el campo mediante la ley de Gauss. Como volumen de integración se considera una esfera de radio r. Si $r<a$ ó $r>b$ se concluye que el campo es cero, pues la carga encerrada es cero.

Por simetría, $\vec{D} = D(r,\theta)\,\hat{r}$ (utilizando el S.R. de la figura)

Luego, para $r \in (a,b)$

$$\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q \iff Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(r,\theta)\cancel{\hat{r}} \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta\, d\phi\, \cancel{\hat{r}}$$

Se tienen 2 regiones según el material, luego se asume:

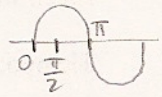
$$\vec{D}(r,\theta) = \begin{cases} D_1(r)\,\hat{r} & \text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ D_2(r)\,\hat{r} & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Luego

$$Q = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} D_1(r)\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} D_2(r)\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta \right] d\phi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1) = 1 \underset{\uparrow}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

por simetría



$$\Rightarrow \quad Q = \int_0^{2\pi} \left[D_1(r)\, r^2 + D_2(r)\, r^2 \right] d\phi$$

$$Q = 2\pi r^2 \left(D_1(r) + D_2(r) \right)$$

$$Q = 2\pi r^2 \left(\varepsilon_1 E_1(r) + \varepsilon_2 E_2(r) \right)$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1(r)\, \hat{r} & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ E_2(r)\, \hat{r} & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Se observa que $\vec{E}$ debe ir en la dirección radial, lo que, en la interfaz corresponde a la componente tangencial. Por condición de borde entonces:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1(r) = E_2(r) = E(r).$$

Luego,

$$Q = 2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E(r) \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, r^2}\, \hat{r}$$

Se observa que entre los cascarones se tiene el mismo campo eléctrico $\vec{E}$, independiente del material.

Por otro lado, como $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, se tiene:

$$\vec{D}(r, \theta) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, r^2}\, \hat{r} & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \\[2ex] \dfrac{Q}{2\pi \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, r^2}\, \hat{r} & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

b) $$|\Delta V| = \int \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = \int_a^b E(r)\,\cancel{\hat{r}}\cdot dr\,\cancel{\hat{r}}$$

$$= \int_a^b \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,r^2}\,dr = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \underbrace{\int_a^b r^{-2}\,dr}_{-r^{-1}\big|_a^b = -\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$$

$$|\Delta V| = \frac{Q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \frac{Q(b-a)}{2\pi ab(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

c) Como $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ en un medio óhmico (como es el caso), luego

$$\vec{J}(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,r^2}\,\hat{r} & \text{si } \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{\sigma_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,r^2}\,\hat{r} & \text{si } \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \end{cases}$$

Por otro lado,

$$I = \iint \vec{J}\cdot\vec{dS} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} J(r,\theta)\,\cancel{\hat{r}}\cdot r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi\,\cancel{\hat{r}}$$

$$I = \cancel{2\pi}\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_1 Q}{\cancel{2\pi}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cancel{r^2}}\,\cancel{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sigma_2 Q}{\cancel{2\pi}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cancel{r^2}}\,\cancel{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\right]$$

$$I = \frac{\sigma_1 Q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \frac{\sigma_2 Q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$I = \frac{(\sigma_1+\sigma_2)Q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

//

d)

$$R=\frac{|\Delta V|}{I}=\frac{\dfrac{\cancel{Q}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{2\pi\,\cancel{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}}{\dfrac{(\rho_1+\rho_2)\,\cancel{Q}}{\cancel{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{2\pi(\rho_1+\rho_2)}=\frac{b-a}{2\pi ab(\rho_1+\rho_2)}$$

$$I=\frac{|\Delta V|}{R}=\frac{2\pi(\rho_1+\rho_2)\,|\Delta V|}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{2\pi ab\,(\rho_1+\rho_2)}{b-a}\,|\Delta V|$$