

- Ej; encuentre el potencial magnético vectorial de una esfera de radio R con una carga superficial uniforme σ que gira con velocidad angular uniforme ω .

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{r} da'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), & \text{dentro} \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), & \text{fuera} \end{cases}$$

- O lo mismo:

-

-

-

-

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\phi}, & (r \leq R), \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi}, & (r \geq R). \end{cases}$$

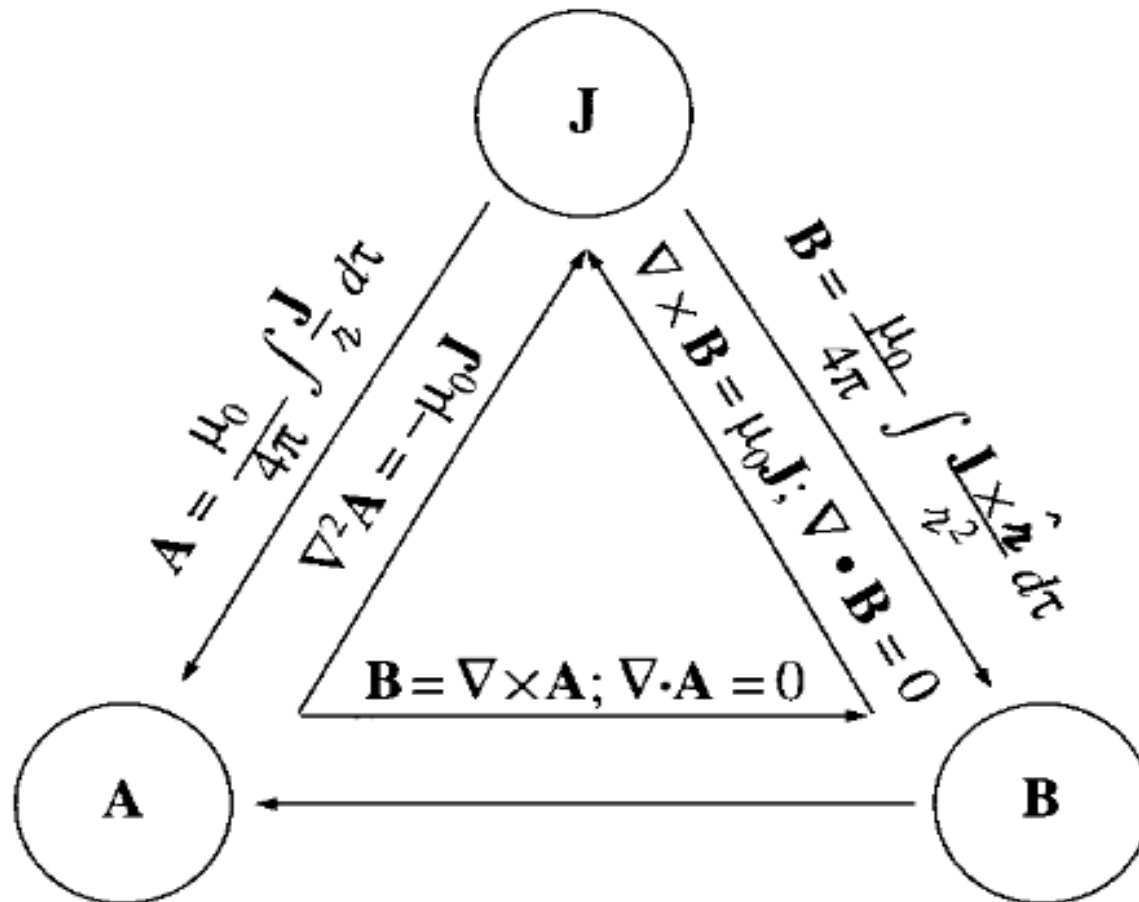
- El campo magnético dentro de la esfera es:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta}) = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \hat{\mathbf{z}} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega$$

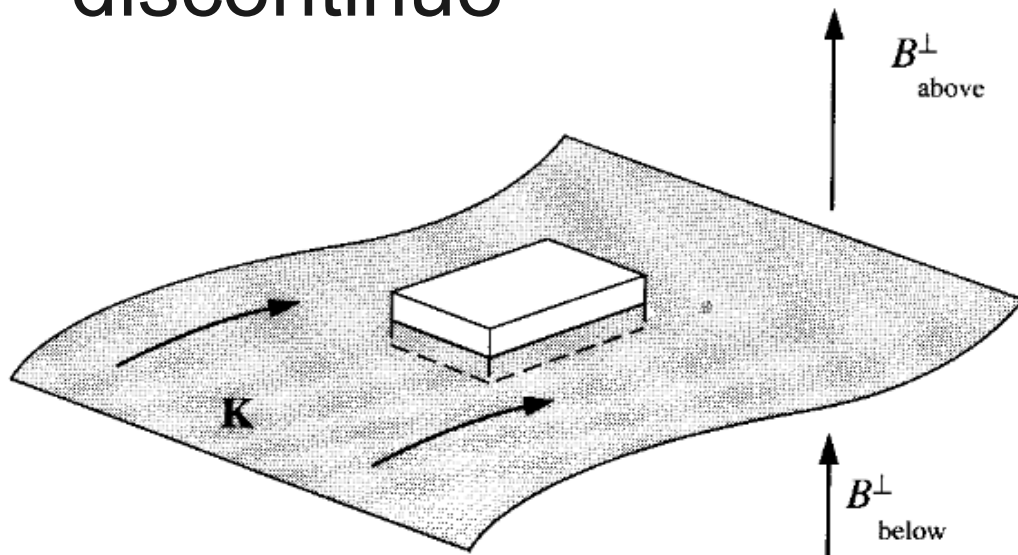
El cual es uniforme

Condiciones de borde

- Las ecuaciones fundamentales que se han analizado son:



- Para una densidad superficial de corriente, \mathbf{B} es discontinuo

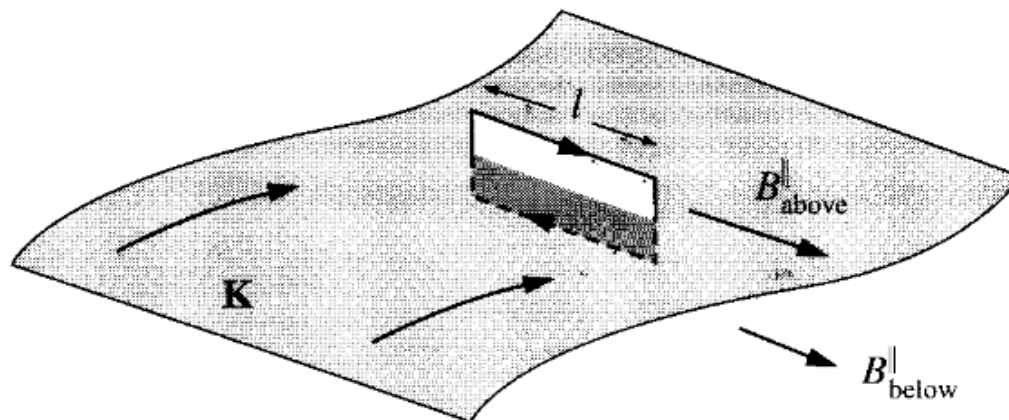


$$B_{\text{above}}^{\perp} = B_{\text{below}}^{\perp}$$

$$B_{\text{above}}^{\parallel} - B_{\text{below}}^{\parallel} = \mu_0 K$$

La componente de \mathbf{B} paralela a la corriente es continua. Combinando:

$$\mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}})$$



- El potencial vectorial es continuo, o sea:

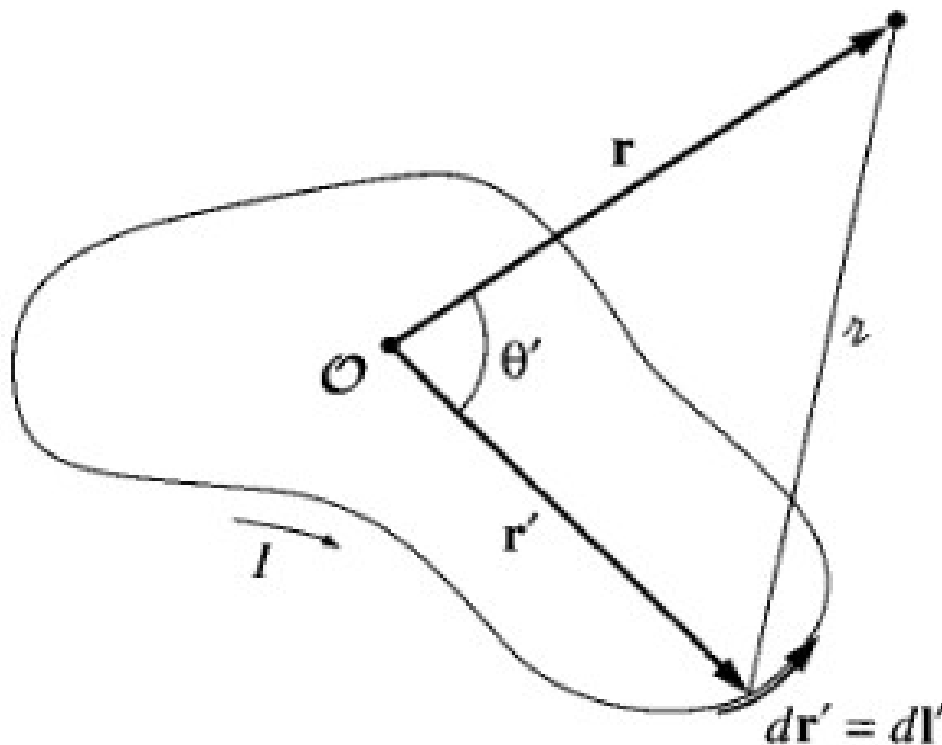
- $$\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}}$$

- Su derivada sin embargo es discontinua, debido a la discontinuidad del campo magnético:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K}$$

Expansion multipolar de A

- Al igual que en el caso electrostático el potencial puede ser expandido en potencias de r .



$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}}{z} d\mathbf{l}'$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta'}}$$

donde

$$\cos \theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$$

- Luego, usando el resultado obtenido para la expansion multipolar eléctrica:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\mathbf{l}' + \dots \right]$$

- La primera integral se anula, pues integra directamente $d\mathbf{l}'$ en el camino cerrado. Significa que en magnetismo no hay monopolos o cargas magnéticas puntuales aisladas. Lo mismo está implicado en el hecho de que la divergencia de \mathbf{B} es nula.
- El segundo término es el dominante y es usualmente no nulo, correspondiendo al término dipolar:

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}'$$

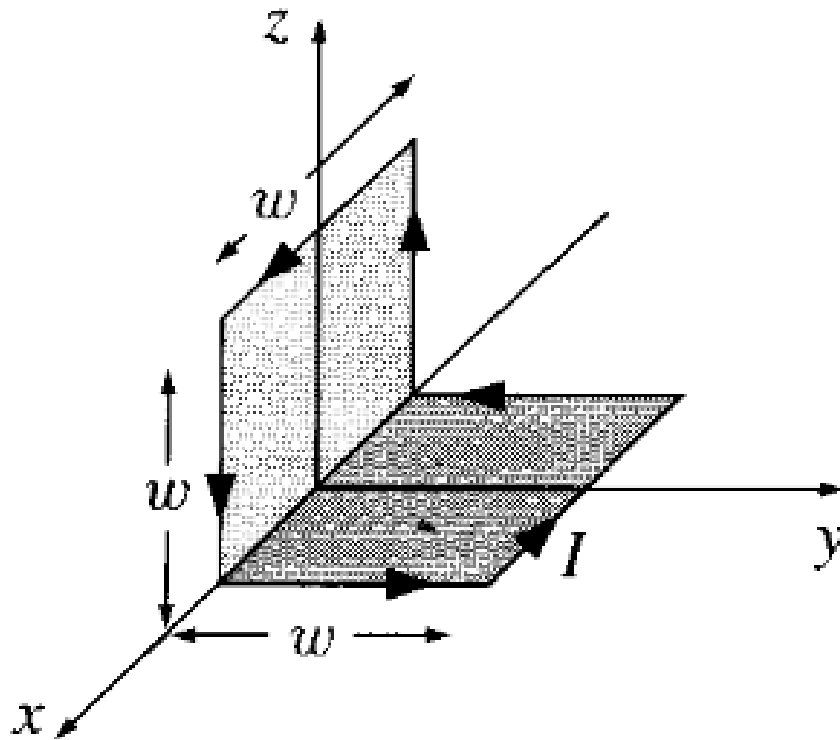
- Ahora,
-
-
- Luego:

$$\oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' = -\hat{\mathbf{r}} \times \int d\mathbf{a}'$$

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

$$\mathbf{m} \equiv I \int d\mathbf{a} = I \mathbf{a}$$

- Ejemplo, calcule el momento dipolar de la espira mostrada en la figura:



$$\mathbf{m} = I w^2 \hat{\mathbf{y}} + I w^2 \hat{\mathbf{z}}$$

- El campo magnético producido por un dipolo puede ser obtenido luego si:

- $$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$$

- Entonces:

- $$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta})$$

- O lo mismo:

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}].$$

- Ejemplo: encuentre el momento magnético dipolar de un disco de carga uniforme que gira con velocidad angular constante.

- $m = \pi \sigma \omega R^4 / 4$

-

- Demuestre que para densidades de corriente:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) \, dv$$