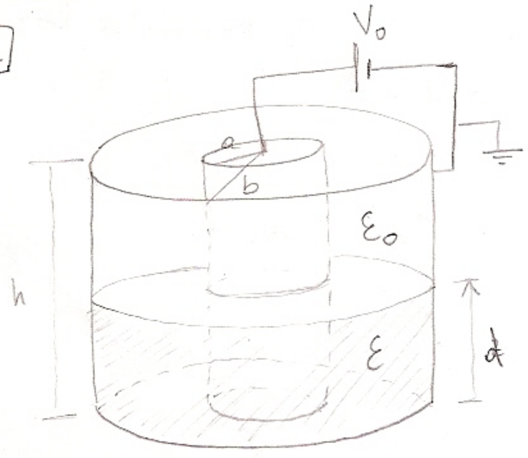
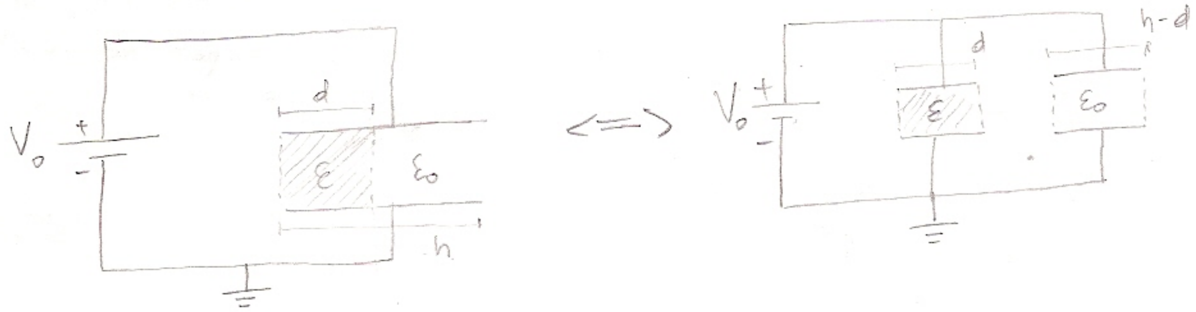
P1



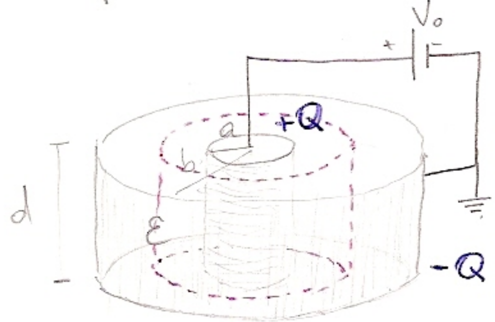
a) Calcule la capacidad del sistema.

b) Calcule las densidades de carga en cada placa.

Observemos que el sistema se puede esquematizar como:



Es decir, el sistema se puede considerar como 2 condensadores en paralelo. Calculemos la capacidad de uno de ellos...



Utilizando la ley de Gauss en un volumen cilíndrico de altura d y radio r.

- Si $r < a$, la carga encerrada es cero por lo que el campo es cero.
- Si $r > b$, la carga encerrada también es cero $(+Q - Q = 0)$, por lo que el campo fuera del sistema también es nulo.

Por simetría el campo apunta radialmente hacia afuera

$\Rightarrow \vec{D} = D(r)\hat{r}$ (cilíndricas), donde se han despreciado los efectos de borde.

Si $r \in (a,b)$ la carga encerrada es Q. Luego,

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q$$

integral cerrada

$$\underbrace{\iint_{\substack{\text{tapa}\\\text{sup.}}} \vec{D}\cdot\vec{dS}}_{\hat{r}\circ\hat{k}=0} + \underbrace{\iint_{\substack{\text{tapa}\\\text{inf.}}} \vec{D}\cdot\vec{dS}}_{\hat{r}\circ(-\hat{k})=0} + \iint_{\text{manto}} \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q$$

como se asume dirección $\hat{r}$, despreciando los efectos de borde las tapas no contribuyen al campo.

$$\iint_{\text{manto}} \vec{D}\cdot\vec{dS} = \int_0^d\int_0^{2\pi} D(r)\cancel{\hat{r}}\circ r\,d\theta\,dz\,\cancel{\hat{r}} = Q$$

$$2\pi\cdot d\cdot D(r)\cdot r = Q$$

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{2\pi d r}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi d \varepsilon r}\hat{r} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{Q}{2\pi d\varepsilon}\ln r + V_{ref}.$$

Sabemos que $V_0 = \underset{\substack{\uparrow\\\text{borne} +}}{V(a)} - V(\underset{\substack{\uparrow\\\text{borne} -}}{b})$

$$V_0 = -\frac{Q}{2\pi d\varepsilon}\ln a + \frac{Q}{2\pi d\varepsilon}\ln b$$

$$V_0 = \frac{Q}{2\pi d \varepsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi d \varepsilon V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Q se distriballe uniformemente sobre el manto de un cilindro. Luego

$$\sigma = \frac{Q}{A_{manto}}$$

De esta forma

$$A_{int} = 2\pi a d \Rightarrow \sigma_{int} = \frac{\cancel{2\pi} \cancel{d} \varepsilon V_0}{\cancel{2\pi} a \cancel{d}} = \frac{\varepsilon V_0}{a}$$

$$A_{ext} = 2\pi b d \Rightarrow \sigma_{ext} = \frac{\cancel{2\pi} \cancel{d} \varepsilon V_0}{\cancel{2\pi} b \cancel{d}} = \frac{\varepsilon V_0}{b}$$

La capacidad queda entonces:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\frac{2\pi d \varepsilon \cancel{V_0}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}{\cancel{V_0}} = \frac{2\pi d \varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Regresamos ahora al problema original, la capacidad total está dada por (2 condensadores en paralelo):

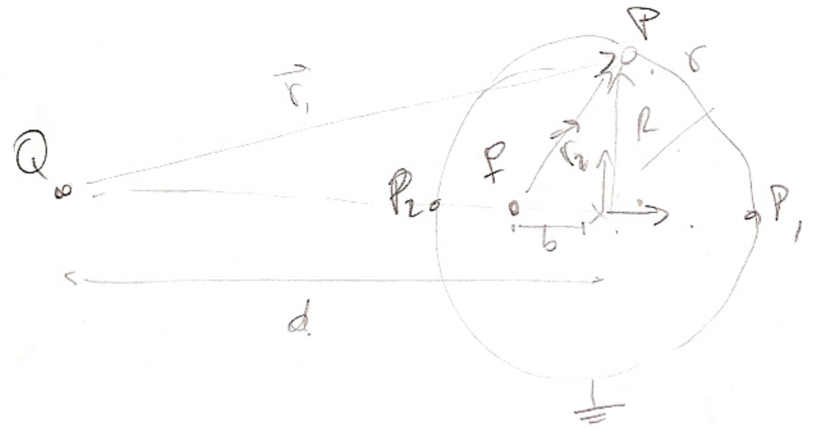
$$C = \frac{2\pi d \varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2\pi (h-d) \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$C = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(d\varepsilon + h\varepsilon_0 - d\varepsilon_0 \right)$$

y las densidades de carga superficial quedan dadas por:

$$\sigma_{int} = \begin{cases} \frac{\varepsilon V_0}{a} & \text{si } z \in (0,d) \\ \frac{\varepsilon_0 V_0}{a} & \text{si } z \in (d,h) \end{cases} \qquad \sigma_{ext} = \begin{cases} \frac{\varepsilon V_0}{b} & \text{si } z \in (0,d) \\ \frac{\varepsilon_0 V_0}{b} & \text{si } z \in (d,h) \end{cases}$$

$\boxed{P2}$



a) Encuentre q y b tq el potencial en el casquete esférico sea nulo.

b) Si la esfera está a potencial V_0 ¿como debe modificar su modelo de carga imagen?

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\cancel{\hat{r}}\cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \cancel{\hat{r}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\, r^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \quad V(r) = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

En la superficie de la esfera se tiene:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\|\vec{r}_1\|} + \frac{q}{\|\vec{r}_2\|}\right) = 0$$

En P_1:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_1 = d+R \\ \vec{r}_2 : b+R \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Q}{d+R} + \frac{q}{b+R} = 0$$

En P_2:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_1 = d-R \\ \vec{r}_2 = R-b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Q}{d-R} + \frac{q}{R-b} = 0$$

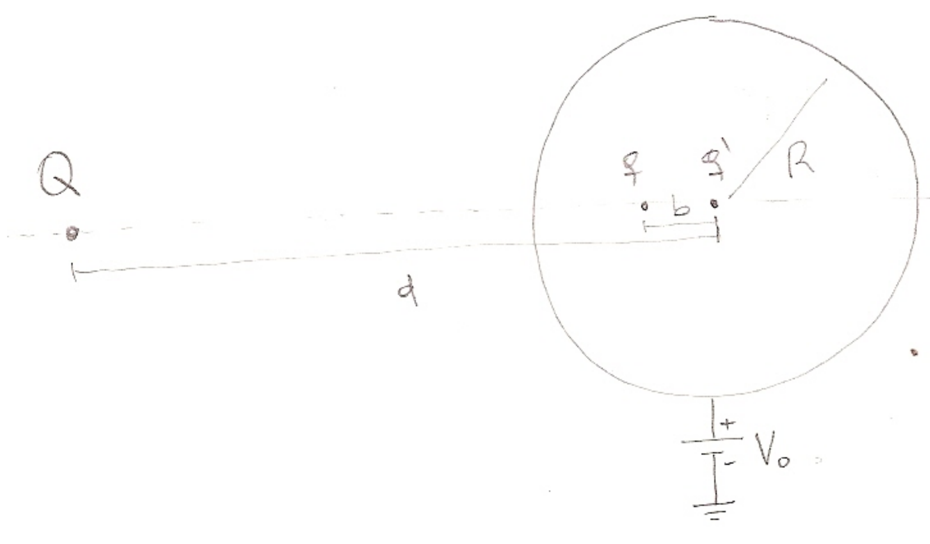
$$\Rightarrow \quad q = -\frac{R}{d}Q, \qquad b = \frac{R^2}{d}$$

b) Utilizando Q y q, la superficie de la esfera queda con potencial nulo. Si agregamos otra carga q' al centro, podemos ajustar el potencial sin dañar la simetría de lo ya calculado.

Se necesita que a distancia R el potencial producido por q' sea V_0.

$$\Rightarrow \quad V_0 = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \Rightarrow \quad q' = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$$

Así se modela completamente el sistema:



Es decir, se reemplaza la esfera conductora a potencial V_0 por el par de cargas q y q'.

- El campo producido por q, q', Q es válido como solución únicamente al exterior de la esfera. Sin embargo, sabemos que al interior de la esfera conductora $\vec{E} = 0$ y $V = V_0 = \text{cte}$.
- La solución es válida pues el potencial producido por q, q' y Q satisface la ecuación de Laplace y satisface las mismas condiciones de borde. Luego, por existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales, los sist. son equivalentes.