

Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

- Ya vimos

- $$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

-

- Vamos a considerar sólo problemas sin dependencia en el ángulo polar Φ , luego la ecuación de Laplace se transforma en:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0$$

- Haciendo separación de variables:

- $\varphi = Z(r) P(\theta)$

- Luego:

- $$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right)$$

$$l(l+1) = n(n+1)$$

- Luego: $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n+1)Z$
- Suponiendo que la solución es del tipo $Z(r)=r^a$, se encuentra que:
- $Z_n = r^n$ y $Z_n = r^{-(n+1)}$
- La ecuación para θ se transforma en:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin \theta P_n = 0$$

- La solución a esta ecuación son los polinomios de Legendre. La forma general de estos es compleja. Si hacemos $x=\cos(\theta)$, entonces:

- $$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$
-

- En la mayor parte de los problemas usaremos polinomios de Legendre de bajo orden.

- Ejemplo

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

-

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

-

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

-

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

- O en función de $\cos(\theta)$

n	$P_n(\theta)$
0	1
1	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

- Luego, las soluciones a la ecuación de Laplace son de la forma:

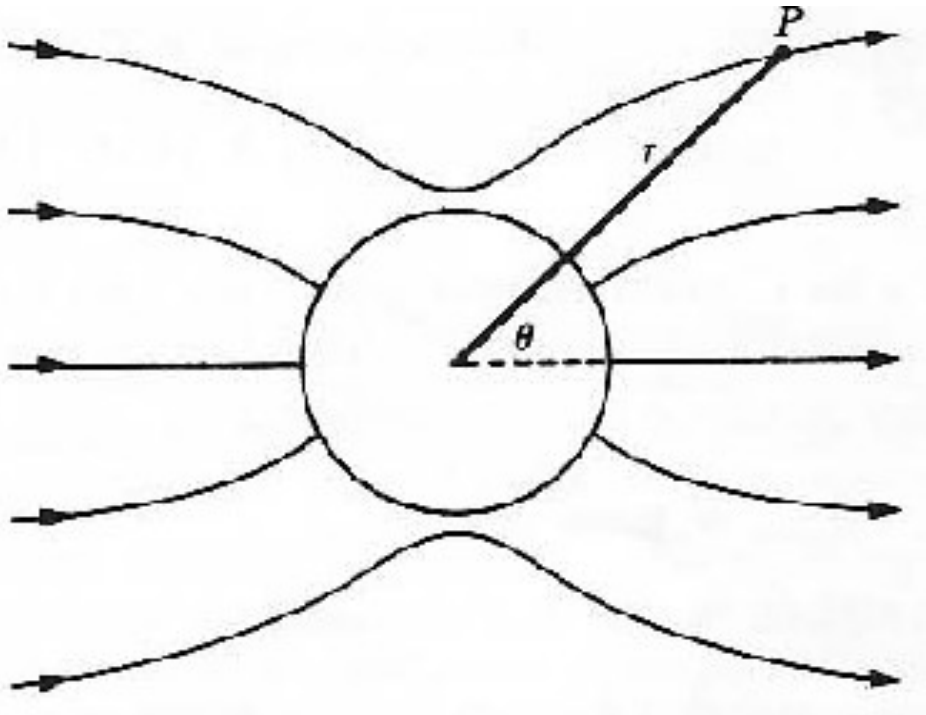
- $\psi_n = r^n P_n(\theta) \quad () \quad \psi_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta)$

-

- Y la expansión del potencial será

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\theta)$$

Ejemplo: Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme



$$\Phi = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

Coordenadas cilíndricas

- La ecuación de Laplace toma la forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

- Haciendo separación de variables

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$$

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = 0$$

- Luego:

- $$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \nu^2, \quad \frac{1}{\Psi} \frac{d^2\Psi}{d\phi^2} = -\nu^2$$

- Ecuaciones facilmente solubles:

- $$R(\rho) = a\rho^\nu + b\rho^{-\nu}$$

- $$\Psi(\phi) = A \cos(\nu\phi) + B \sin(\nu\phi)$$

- Cuando $\nu=0$

$$R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho$$

$$\Psi(\phi) = A_0 + B_0\phi$$

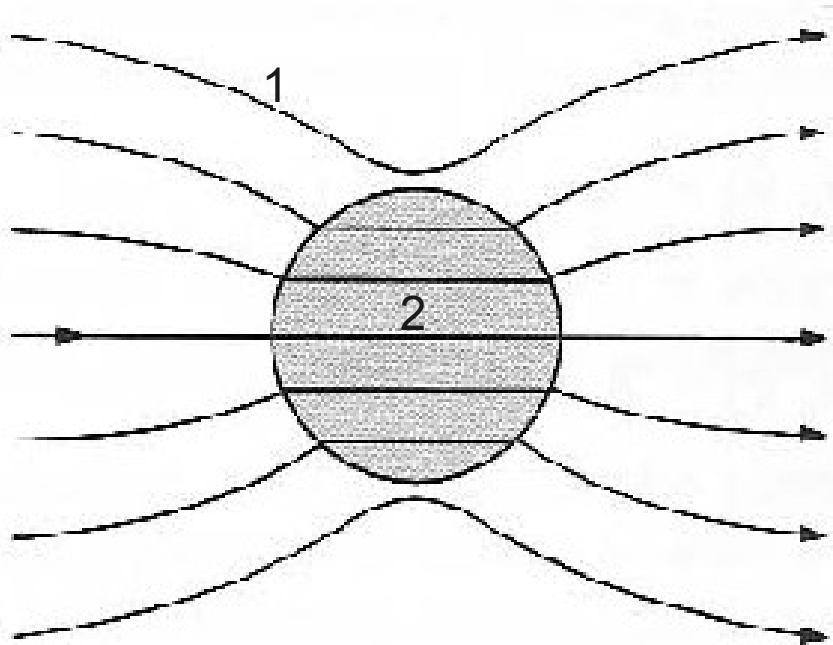
- Luego, la expansión del potencial en coordenadas cilíndricas será:

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\phi + \alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\phi + \beta_n)$$

Problemas con dieléctricos

- En dieléctricos, las cargas libres se encuentran usualmente en las fronteras de éstos, de modo que la ecuación de Laplace es válida en las regiones donde no hay carga.
- Luego, solo resta aplicar las condiciones de borde apropiadas a los dieléctricos usando las soluciones a la ecuación de Laplace.
- Exigir siempre la continuidad del potencial

Ejemplo: esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme E_0



$$\varphi_1(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta$$

$$\varphi_2(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta$$

$$C_2 = 0 \quad A_1 = -E_0$$

La continuidad del potencial en $r=a$ produce

$$-E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a$$

La condición para el desplazamiento:

$$E_0 + 2C_1 a^{-3} = -KA_2$$

- Luego:

- $$A_2 = \frac{3E_0}{K+2}$$

-

-

- $$C_1 = \frac{(K-1)a^3E_0}{K+2}$$

-

-

-

- Y

- $$\mathbf{E}_2 = \frac{3}{K+2} \mathbf{E}_0$$

Método de relajación

- La ecuación de Poisson es:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = p(x, y)$$

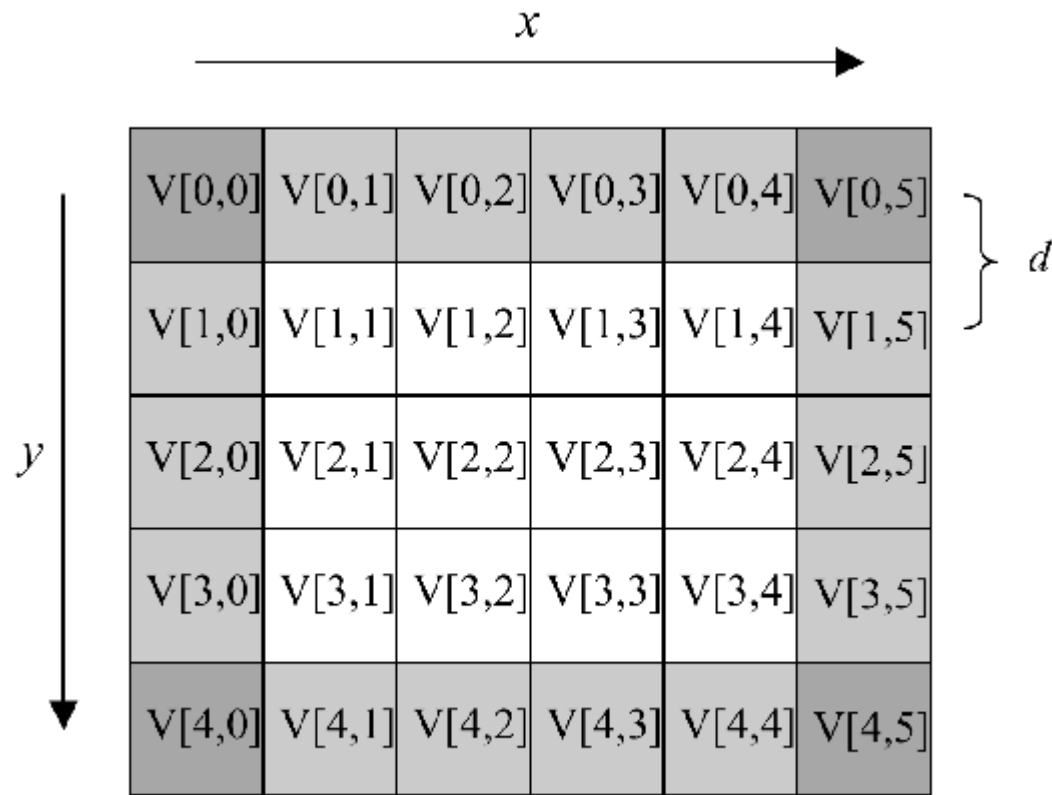
- La cual puede ser discretizada:

$$\frac{\frac{V_{i+1,j} - V_{ij}}{\varepsilon} - \frac{V_{ij} - V_{i-1,j}}{\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{\frac{V_{i,j+1} - V_{ij}}{\varepsilon} - \frac{V_{ij} - V_{i,j-1}}{\varepsilon}}{\varepsilon} = p_{ij}$$

- En donde ε en este caso es la distancia en que se ha discretizado el espacio

- Luego, se puede despejar:
- •
$$V_{ij} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - \epsilon^2 p_{ij})$$
- El valor del potencial en un punto es el promedio de los puntos que lo rodean. Esto puede ser fácilmente implementable en un algoritmo numérico.

- El primer paso es dividir el espacio en una matriz cuadrada:



- Luego, se establece el valor del potencial en las regiones donde se mantendrá fijo, en la figura anterior en los bordes.
- Luego, para los puntos en los cuales el potencial puede variar, se obtiene su valor como el promedio del potencial en los vecinos, usando el ultimo valor obtenido del potencial para ellos.
- Iterar