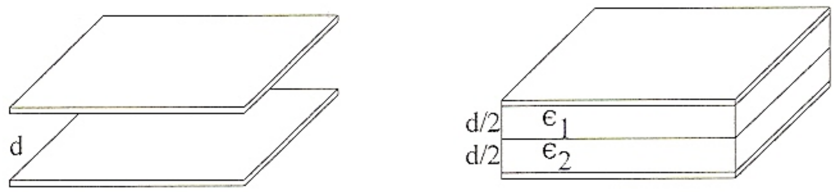
Ejercicio 2
Electromagnetismo

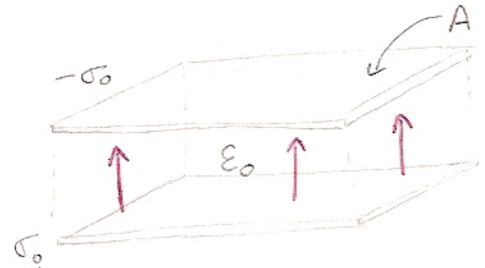
Tiempo: 40 minutos.

Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad C_0 y una separación d entre las placas. Se insertan entre las placas dos láminas dieléctricas de constantes ϵ_1 y ϵ_2 y espesores d/2 y de la misma área que las placas del condensador. Cuando la carga libre sobre las placas del condensador es Q, hallar:

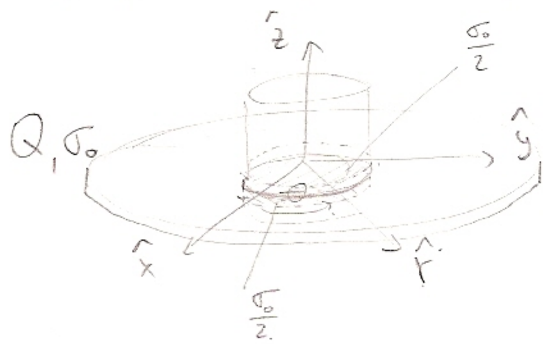
a) El campo eléctrico en cada dieléctrico.
b) La diferencia de potencial entre las placas.
c) Encontrar la nueva capacidad del condensador en función de ϵ_1, ϵ_2 y C_0.
d) Demostrar que este sistema puede considerarse como dos condensadores de espesor d/2 conectados en serie.



Antes de insertar las láminas dieléctricas:



Campo producido por una placa conductora infinita (o despreciando efectos de borde).



$$\vec{D} = D(z)\hat{z}$$

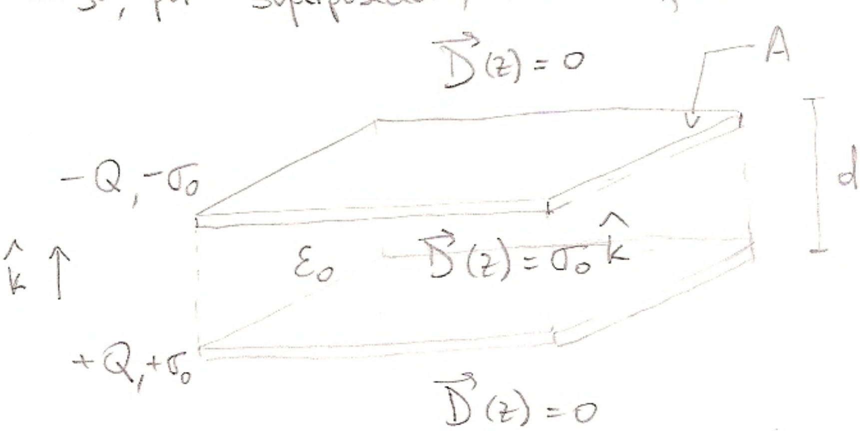
Por Gauss:

$$\oiint_{\sigma(\Omega)} \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q_{LIBRE}$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^r\int_0^{2\pi} D(z)\cancel{\hat{z}}\cdot r\,d\theta\,dr\cancel{\hat{z}} = Q_{LIB.} = \frac{\sigma_0}{2}\cdot\overbrace{\pi r^2}^{A}$$

$$\cancel{2}\cancel{\pi}\cdot\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{2}}\cdot D(z) = \cancel{\pi r^2}\frac{\sigma_0}{2} \Longrightarrow \vec{D}(z) = \frac{\sigma_0}{2}\hat{z}.$$

Luego, por superposición, tenemos que:



Por lo que al interior de las placas se tiene:

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$V(z) = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}z + V_{ref}$$

La diferencia de tensión entre las placas queda:

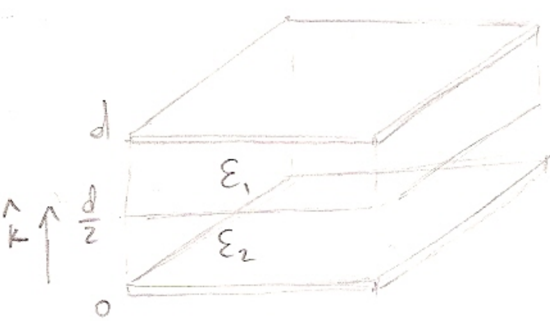
$$|\Delta V| = \frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0}$$

Luego,

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C_0 = \frac{\overset{\cancel{\sigma_0} A}{Q}}{\frac{\cancel{\sigma_0} d}{\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \Rightarrow A = \frac{d C_0}{\varepsilon_0}$$

$$Q = \sigma_0 \cdot A \Rightarrow \sigma_0 = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{d C_0}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{Q \varepsilon_0}{d C_0}$$

Al insertar las láminas dieléctricas, $\vec{D}$ no cambia, pues no depende del medio. Luego:



$$\vec{D}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } d < z \\ \sigma_0 \hat{k} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

En cada medio $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, entonces:

a) $$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_1} \hat{k} & \text{si } \frac{d}{2} < z < d \\ \frac{\sigma_0}{\varepsilon_2} \hat{k} & \text{si } 0 < z < \frac{d}{2} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Reemplazando σ_0 por los datos conocidos, queda:

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{d\,C_0} \cdot \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\,\hat{k} & \text{si } \dfrac{d}{2} < z < d \\ \dfrac{Q}{d\,C_0} \cdot \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\,\hat{k} & \text{si } 0 < z < \dfrac{d}{2} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

b) $V = -\int \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$

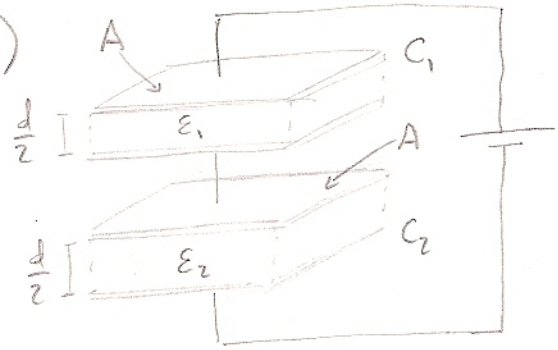
$$|\Delta V| = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{Q}{d\,C_0} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\, dz + \int_{\frac{d}{2}}^{d} \frac{Q}{d\,C_0} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\, dz$$

$$|\Delta V| = \frac{Q}{\cancel{d}\,C_0} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\cancel{d}}{2} + \frac{Q}{\cancel{d}\,C_0} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\cancel{d}}{2}$$

$$|\Delta V| = \frac{Q\,\varepsilon_0}{2\,C_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

c) $$C' = \frac{Q}{V} = \frac{\cancel{Q}}{\dfrac{\cancel{Q}\,\varepsilon_0}{2\,C_0}\underbrace{\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)}_{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}}$$

$$\Rightarrow \quad C' = \frac{2\,C_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

d) 

Por el cálculo realizado al comienzo, se tiene:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 A}{\frac{d}{2}} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2 A}{\frac{d}{2}}$$

Si 2 condensadores se agrupan en serie, se cumple que:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Luego

$$C_{eq} = \frac{\frac{\varepsilon_1 \cancel{A}}{\cancel{\frac{d}{2}}} \cdot \frac{\varepsilon_2 A}{\frac{d}{2}}}{\frac{\varepsilon_1 \cancel{A}}{\cancel{\frac{d}{2}}} + \frac{\varepsilon_2 \cancel{A}}{\cancel{\frac{d}{2}}}} = \frac{2A}{d} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$C_{eq} = \frac{2}{\cancel{d}} \cdot \frac{\cancel{d} C_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{2 C_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Lo que equivale a la capacidad calculada en c). //