Ejercicio 1
Electromagnetismo FI 2002-4

Profesor: Jonathan Avila
Auxiliares: Daniel Calderon
Ignacio Olavarría

1) Considere una distribución lineal de carga, la cual se encuentra en el plano z=0 distribuida en la mitad de un anillo de radio a . Para $0 \leq \theta \leq \pi$ tiene una valor de λ y para $\pi \leq \theta \leq 3 \text{over} 2\pi$ tiene un valor de $-\lambda$, en donde θ es el ángulo en coordenadas polares. **a)calcule el campo electrico en el origen. b) indique la direccion del momento dipolar del anillo.**

a) la expresion para el campo es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\Omega \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dr' \text{En este caso} \vec{r}=0,\ \ \vec{r}\,'=a\hat{\rho}\text{, y } dr'=a\,d\theta$$

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \lambda & si\, 0 \leq \theta \leq \pi \\ -\lambda & si\, \pi \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

entonces calculemos la contribución solo del cuadrante positivo, la contribución del otro cuadrante sera exactamente la misma, por simetria (piense xq o haga al calculo a mano...., pero entiendalo)

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-a\hat{\rho}\lambda}{a^3}a\,d\theta = \frac{-\lambda}{a\,4\pi\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\hat{\rho}\,d\theta = \frac{-\lambda}{a4\pi\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\theta), \sin(\theta))\,d\theta$$

$$= \frac{-1}{a\,4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} \sin(\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ -\cos(\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \frac{-1}{a\,4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces como la segunda parte integrará lo mismo

$$\vec{E} = \frac{-\lambda}{a\,2\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

notar que $\vec{E}$ es un vector que corresponde a la direccion de $\theta = \frac{5}{4}\pi$ ie. apunta en la dirección que dimedia el cuadrante x<0, y<0.

b) el dipolo va desde la carga negativa hacia la positiva, ocupando la simetria del problema podemos ver que la direccion del dipolo es: (1,1) o bien $\theta = \frac{\pi}{4}$. Es decir en la direccion de $-\vec{E}$.

2) a)usando Gauss calcule el campo $\vec{E}$ en todo el espacio producido por un alambre infinito a lo largo del eje z con densidad de carga λ . b) ¿cual sera la fuerza que sentira un cable infinito paralelo al primero, con densidad de carga $-\lambda$ a una distancia d del primer cable?

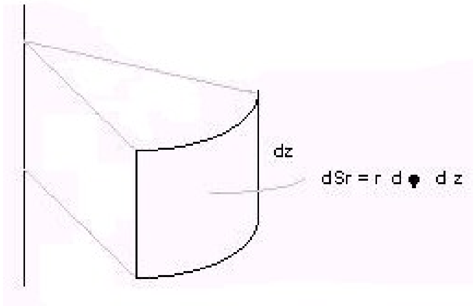
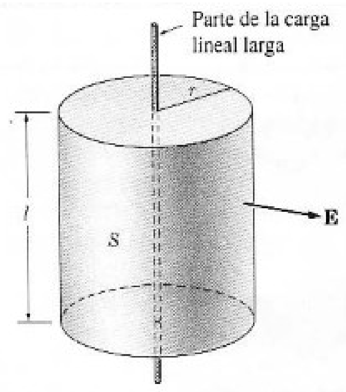


FIGURA 2.8
Superficie cilíndrica utilizada con la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico producido por una carga lineal larga.



a) usando ley de Gauss:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_V \nabla\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\,dv$$

Tomamos un Volumen cilindrico de radio r y altura l entonces
$ds = r\,dz\,d\theta$, por simetria del problema asumimos $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

$ds = r\,dz\,d\theta$, por simetria del problema asumimos $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

entonces el Flujo por las tapas del cilindro sera 0, pues la normal exterion de esta son $\hat{z}$ y $-\hat{z}$

luego

$$A = \int_{(0)}^{l}\int_{0}^{2\pi} E(r)\hat{r}\cdot\hat{r}\,r\,d\theta\,dz = 2\pi\,lr\,E(r)$$

$$B = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}dv = 2\pi\,l\,E(r) = \int_0^l \frac{\lambda}{\epsilon_0}dz = l\frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

notemos que la integral de volumen se convirtio en una integral de linea, pues la distribución de carga es lineal y lo que no interesa es la carga total incluida en el volumen
entonces

$$A = B \Leftrightarrow 2\pi\,l\,r\,E(r) = l\frac{\lambda}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\,r\,\epsilon_0}$$

entonces

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\,r\,\epsilon_0}\hat{r}$$

b) la fuerza por unidad de largo es $\frac{d\vec{F}(r=d)}{dq}\frac{dq}{d\,l}=-\lambda\,\vec{E}(r)=\frac{-\lambda^2}{2\pi\,d\,\epsilon_0}\hat{r}$ notemos que que $\lambda=\frac{dq}{dl}$ y $\vec{E}=\text{Fuerza por unidad de carga}\simeq\frac{d\vec{F}}{dq}$. Lo cual esta bien pues los alambres se atraen.