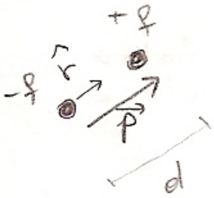
Auxiliar 4 : FI2002-4 / Otoño 2010 / Daniel Calderón S.

RESUMEN

• Dipolo Eléctrico



$\vec{p} = q d \hat{r}$ $[Cm]$ (dipolo eléctrico o momento dipolar).

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{N} q_k \vec{r}_k$$

$$\vec{p} = \int_{\Gamma'} \vec{r}\,' \lambda(\vec{r}\,') dr'$$

$$\vec{p} = \iint_{S'} \vec{r}\,' \sigma(\vec{r}\,') ds'$$

$$\vec{p} = \iiint_{\Omega'} \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') dv'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$ ← potencial producido por un dipolo.

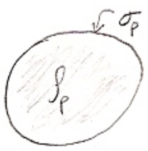
• Polarización

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k}{\Delta v'}$$ hay N dipolos en $\Delta v'$. ← Vector de Polarización.

En presencia de $\vec{E}$ el dieléctrico se polariza, apareciendo ρ_p y σ_p.

$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ $\qquad$ $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$ ← no son cargas libres, no se mueven, aparecen por la rotación de los dipolos...

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\oiint_{S(\Omega)} \frac{\sigma_p(\vec{r}\,') ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} + \iiint_{\Omega} \frac{\rho_p(\vec{r}\,') dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \right]$$



$\vec{P}$ depende de $\vec{E}$ $\Rightarrow$ $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

↑ susceptibilidad eléctrica (en gral. es una matriz).

Vector Desplazamiento $\longrightarrow$ $\vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E}}_{\text{En el vacío}} + \underbrace{\vec{P}}_{\text{En el medio material.}}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 \underbrace{(I + \chi_e)}_{\varepsilon_r}\vec{E}$$

$\varepsilon_r \leftarrow$ permitividad dieléctrica relativa del material.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

ε: permitividad dieléctrica del material

El material es:

lineal $\longrightarrow$ $\|\vec{D}\| = \varepsilon \|\vec{E}\|$

isótropo $\longrightarrow$ $\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\,\vec{E}$

homogeneo $\longrightarrow$ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

- <u>Ley de Gauss en medios materiales</u>

$$\rho_{total} = \underbrace{\rho_{Libre}}_{\nabla \cdot \vec{D}} + \underbrace{\rho_{polarización}}_{-\nabla \cdot \vec{P}}$$

$\vec{P} = 0$ en el vacío pues no hay dipolos.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{Libre}. \iff \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{Libre}}{\varepsilon}$$

$\varepsilon \nwarrow$ permitividad dieléctrica del material.

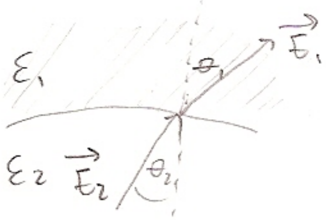
- <u>Condiciones de Borde.</u>

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t} \iff \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_L$$

Si $\sigma_L = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$

$\iff \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$



$$\frac{tg\,\theta_1}{tg\,\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

- <u>Conductor ideal</u>

$\vec{E}_{interior} = 0 \Rightarrow V_{interior} =$ cte. (equipotencial).

$\vec{E}_{exterior} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$.

- Ecuación de Poisson y Laplace

Ley de Gauss para medios materiales $\longrightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{Libre}$.

Suponiendo un material homogeneo $\longrightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho_{Libre}$.

Como $\vec{E}$ es un campo conservativo $\Rightarrow \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \cdot -\nabla V) = \rho_{Libre}$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla \cdot \underbrace{\nabla \underbrace{V}_{\text{escalar}}}_{\text{vector}}}_{\text{escalar}} = \frac{\rho_{Libre}}{\varepsilon} \iff \nabla^2 V = \frac{\rho_{Libre}}{\varepsilon}$$ (Ecuación de Poisson).

Si no hay cargas libres

$$\nabla^2 V = 0$$ (Ecuación de Laplace).

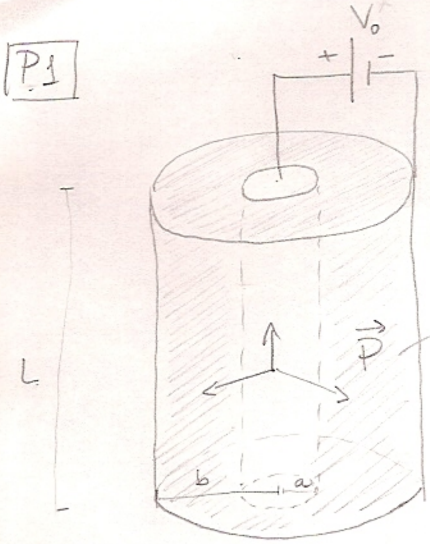
Estas ecuaciones son útiles para calcular el potencial (y el campo) eléctrico en una región donde se conozca el potencial en los bordes.

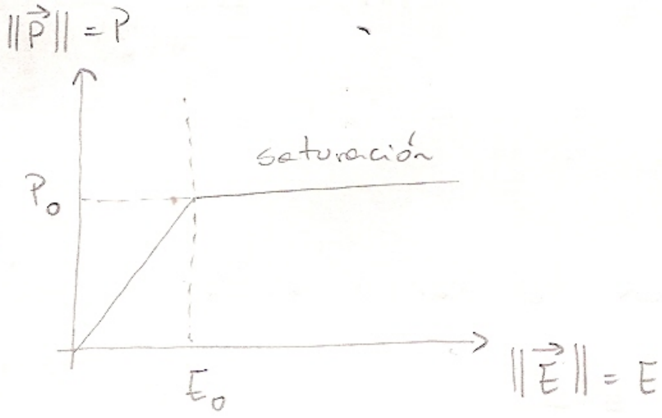
- Energía Eléctrostática

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dv \quad [J]$$

$$W_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad \left[\frac{J}{m^3}\right]$$ $\leftarrow$ densidad de energía electrostática.

P1





a) Encontrar el potencial V_* donde se satura el material.

Dada la geometría del sistema, es claro que tanto el campo como el potencial varían sólo radialmente. $\Rightarrow \vec{E} = E(r)\hat{r}$ y $V = V(r)$.

Se observa que el medio material cumple con la ecuación de Laplace, pues no hay cargas libres. $(\rho_L = 0)$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}_{=0} = 0$$

← V independiente de ϕ y z.

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$r\frac{\partial V}{\partial r} = A$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$$V(r) = A\ln(r) + B$$

Se sabe que la diferencia de potencial entre $r=a$ y $r=b$ es V_0.

$$V_0 = V(a) - V(b) = A\ln(a) - A\ln(b) = A\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{V_0 \ln(r)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} + B$$

$\uparrow$ potencial de referencia, no es de interés.

Ahora, podemos calcular el campo:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial \phi}}_{=0}\hat{\phi} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{=0}\hat{k}\right) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{V_0}{r\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\hat{r} = \frac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{r}$$

$$\|\vec{E}(r)\| = \frac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

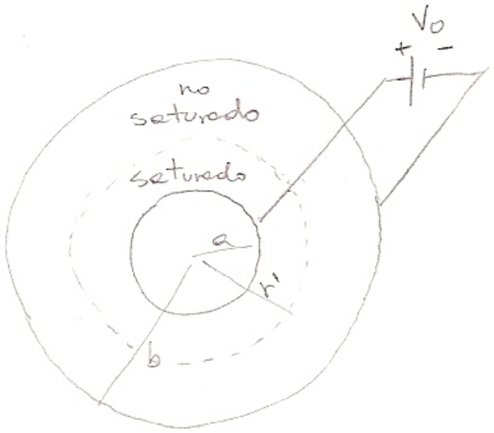
$\longrightarrow$ La magnitud del campo disminuye al aumentar r. $\Rightarrow$ La mayor magnitud del campo ocurre en $r=a$, y la menor en $r=b$.

Luego, para que el material esté <u>completamente</u> saturado se necesita que $\|\vec{E}(b)\| = E_0$. Esto se cumple con $V_0 = V_*$

$$E_0 = \frac{V_*}{b\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \Rightarrow V_* = E_0 b \ln\left(\frac{b}{a}\right) \;//.$$

Notar que si $\|\vec{E}(r')\| = E_0$ con $r' \in (a,b)$, el material está saturado en (a, r') pero no en (r', b).

(visto desde arriba).



El material se empieza a saturar si se alcanza E_0 en algún lugar entre $r=a$ y $r=b$.

$$E_0 = \frac{V_{**}}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$\longleftarrow$ voltaje que comienza a saturar el material.

Luego, si $V_0 \in (V_{**}, V_*)$ el material está saturado hasta r'. Donde r' cumple:

$$E_0 = \frac{V_0}{r' \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \implies r' = \frac{V_0}{E_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

b) Determinar $\vec{E}$ y $\vec{D}$ para todo valor del potencial V_0 aplicado

De la parte anterior tenemos $\vec{E}(r) = \dfrac{V_0}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \hat{r}$

$\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a) > 0 \right.$ ya que $b > a$ y ln es creciente $\left. \right)$

Del gráfico, tenemos que $\vec{P} = \begin{cases} \frac{P_0}{E_0} E \hat{r} & \text{si } E < E_0 \\ P_0 \hat{r} & \text{si } E > E_0 \end{cases}$

Conocemos $\vec{E}$ y $\vec{P}$ $\implies$ mediante la ecuación $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ se puede calcular $\vec{D}$.

- Si $V_0 > V_*$, el material está completamente saturado, luego $\vec{P} = P_0 \hat{r} \implies \vec{D}(r) = \left(\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} + P_0 \right) \hat{r}$

- Si $V_0 < V_{**}$, el material no está saturado, luego $\vec{P} = \frac{P_0}{E_0} E \hat{r}$

$$\implies \vec{D}(r) = \left(\varepsilon_0 E(r) + \frac{P_0}{E_0} E(r) \right) \hat{r} = \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{E_0} \right) \cdot \frac{V_0}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \hat{r}$$

• si $V_{**} < V_0 < V_*$ el material se satura entre $r=a$ y $r = r' = \dfrac{V_0}{E_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$, y no se satura entre $r=r'$ y $r=b$.

Luego,

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + P_0\right)\hat{r} & \text{si } r \in (a, r') \\ \left(\varepsilon_0 + \dfrac{P_0}{E_0}\right) \cdot \dfrac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{r} & \text{si } r \in (r', b) \end{cases}$$

//

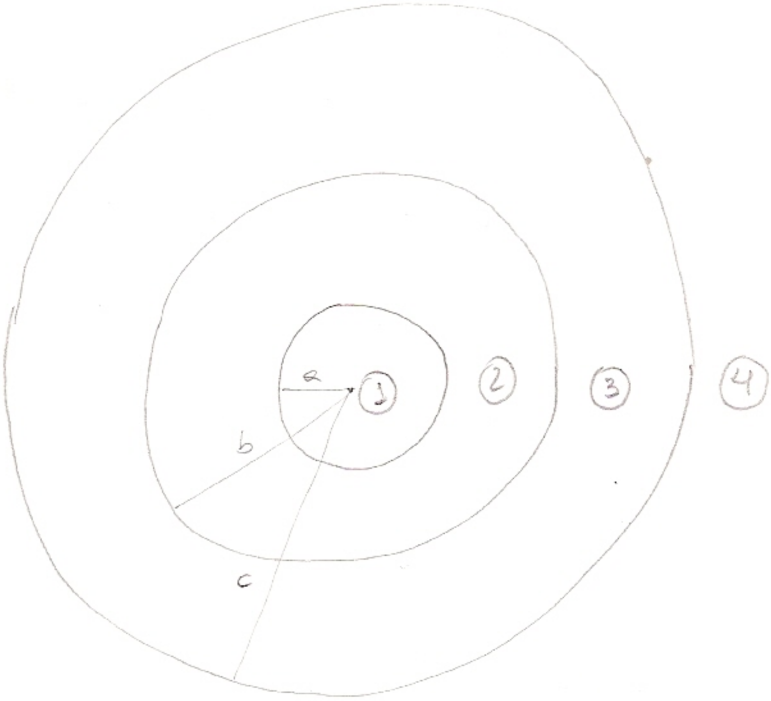
Resumen:

$$V(r) = -\frac{V_0 \ln(r)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + B$$

$$\vec{E}(r) = \frac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{r}$$

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + P_0\right)\hat{r} & \text{si } V_0 > V_*,\ r \in (a,b) \\ \left(\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + P_0\right)\hat{r} & \text{si } V_{**} < V_0 < V_*,\ r \in (a, r') \\ \left(\varepsilon_0 + \dfrac{P_0}{E_0}\right) \cdot \dfrac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{r} & \text{si } V_{**} < V_0 < V_*,\ r \in (r', b) \\ \left(\varepsilon_0 + \dfrac{P_0}{E_0}\right) \cdot \dfrac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{r} & \text{si } V_0 < V_{**},\ r \in (a,b) \end{cases}$$

P2



Cada medio está caracterizado por:

① $\rho(r) = \gamma r$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0$

densidad volumétrica de carga.

② moléculas distribuidas según: $g(r) = k r^2 \left[\frac{molec.}{m^3}\right]$

cada molécula tiene un momento dipolar:

$\vec{p}_i = q\,\hat{r}$ (coord. esf.)

③ $\varepsilon = \varepsilon_3$

④ $\varepsilon = \varepsilon_0$

a) Determinar $\vec{P}$ en el medio material ②.

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\sum_k p_k}{\Delta v'} \approx \frac{\text{dipolo neto}}{\text{unidad de volumen}} \qquad \frac{\xrightarrow{\sum p_k}}{dv'}$$

$\vec{P}$ es una densidad de momentos dipolares.

En dv', ¿"cuantas" moleculas hay? $\longrightarrow g(r) = k r^2 \left[\frac{molec}{m^3}\right]$

¿Cual es el dipolo asociado a dichas moléculas? $\longrightarrow \vec{p}_i = q\,\hat{r} \left[\frac{Cm}{molec}\right]$

$$\Rightarrow \vec{P} = g(r) \cdot \vec{p}_i = k r^2 \left[\frac{molec}{m^3}\right] \cdot q\,\hat{r} \left[\frac{Cm}{molec}\right]$$

$$\vec{P} = q k r^2 \,\hat{r} \left[\frac{C}{m^2}\right]$$ para $r \in (a, b)$ i.e. en el medio ②.

b) Calcular $\vec{D}$ y $\vec{E}$ en todo el espacio.

Para aprovechar la simetría utilizamos Gauss para calcular $\vec{D}$.

$$\oiint_{S(\Omega)} \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q_{\substack{\text{libre}\\ \text{en } \Omega}}.$$

Por simetría $\vec{D} = D(r)\hat{r}$

Como volumen Ω, conviene utilizar una esfera de radio r.

$\Rightarrow \vec{dS} = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$

Si $r < a$

$$Q_{\substack{\text{libre}\\ \text{en } \Omega}} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\rho(r')}_{\gamma r'} r'^2 \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi' dr'$$

$$= \gamma \underbrace{\int_0^r r'^3 dr}_{\frac{r^4}{\cancel{4}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{\cancel{2}\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta' \, d\theta'}_{\cancel{2}.}$$

$$Q_{\substack{\text{libre}\\ \text{en } \Omega}} = \gamma \pi r^4$$

Si $r > a$

$$Q_{\substack{\text{libre}\\ \text{en } \Omega}} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(r') r'^2 \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi' dr'$$

$$= \gamma \pi a^4$$

De esta forma,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} D(r)\cancel{\hat{r}} \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \cancel{\hat{r}} = Q_{\substack{\text{libre}\\ \text{en } \Omega}}$$

$$D(r) \, r^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta}_{2} = Q_{\substack{\text{libre}\\ \text{en } \Omega}}$$

$$\Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Q_{\substack{\text{Libre}\\ \text{en } \Omega}}}{4\pi r^2}\,\hat{r}$$

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} \dfrac{\gamma \cancel{\pi} r^{\cancel{4}\,2}}{4\cancel{\pi}\cancel{r^2}}\,\hat{r} = \dfrac{\gamma r^2}{4}\,\hat{r} & \text{si } r < a \\[2ex] \dfrac{\gamma \cancel{\pi} a^4}{4\cancel{\pi} r^2}\,\hat{r} = \dfrac{\gamma\, a^4}{4 r^2}\,\hat{r} & \text{si } r > a \quad * \end{cases}$$

Notar que la expreción $*$ es válida incluso para $r > b$ y $r > c$, pues no hay más cargas libres. Notar además que se cumple la condición $D_{1n} = D_{2n}$ en cada cambio de medio.

Calculemos ahora $\vec{E}$ en cada región.

① $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{E}(r) = \frac{\gamma r^2}{4\varepsilon_0}\,\hat{r}$$

② $\vec{P} = \alpha k r^2\,\hat{r}$, $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}(r) = \frac{\dfrac{\gamma a^4}{4r^2}\,\hat{r} - \alpha k r^2\,\hat{r}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\varepsilon_0}\left(\frac{\gamma a^4}{r^2} - 4\alpha k r^2\right)\hat{r}$$

③ $\varepsilon = \varepsilon_3$, $\vec{D} = \varepsilon_3\vec{E}$ (material homogeneo).

$$\vec{E}(r) = \frac{\gamma a^4}{4\varepsilon_3 r^2}\,\hat{r}$$

④ $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$

$$\vec{E}(r) = \frac{\gamma a^4}{4\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

En resumen:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\gamma r^2}{4\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si} \quad r \in [0, a) \\ \dfrac{1}{4\varepsilon_0}\left(\dfrac{\gamma a^4}{r^2} - 4\alpha k r^2\right)\hat{r} & \text{si} \quad r \in [a, b) \\ \dfrac{\gamma a^4}{4\varepsilon_3 r^2} & \text{si} \quad r \in [b, c) \\ \dfrac{\gamma a^4}{4\varepsilon_0 r^2} & \text{si} \quad r \in [c, +\infty) \end{cases}$$

c) Determinar la diferencia de potencial entre los casquetes definidos por radios a y b.

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$$

$$= -\int_a^b \frac{1}{4\varepsilon_0}\left(\frac{\gamma a^4}{r^2} - 4\alpha k r^2\right)\cancel{\hat{r}} \cdot dr\, \cancel{\hat{r}}$$

$$= -\frac{\gamma a^4}{4\varepsilon_0}\underbrace{\int_a^b r^{-2}\, dr}_{\left.\frac{r^{-1}}{-2}\right|_a^b} + \frac{\alpha k}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_a^b r^2\, dr}_{\left.\frac{r^3}{3}\right|_a^b}$$

$$\Delta V = \frac{\gamma a^4}{8\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{\alpha k}{3\varepsilon_0}(b^3 - a^3)$$

d) Calcular la energía electrostática del sistema

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV$$

separando la integral en cada medio...

$$U_e = \frac{1}{2} \left[\iiint_{①} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV + \iiint_{②} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV + \iiint_{③} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV + \iiint_{④} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV \right]$$

Hay que calcular la energía en cada uno de los medios.

Notar que los medios materiales ①, ③ y ④ son homogeneos, luego:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow U_{e_i} = \frac{1}{2} \iiint_{ⓘ} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_{②} \|\vec{E}\|^2 \, dV$$

Calculando cada término...

- $$U_{e_1} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \left(\frac{\gamma r^2}{4 \varepsilon_0} \right)^2 r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$U_{e_1} = \frac{\gamma^2 \cancel{\varepsilon_0}}{\underset{8}{\cancel{32}} \, \varepsilon_0^{\cancel{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{\cancel{2}\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta}_{\cancel{2}} \underbrace{\int_0^{a} r^6 \, dr}_{\left. \frac{r^7}{7} \right|_0^a = \frac{a^7}{7}}$$

$$U_{e_1} = \frac{\gamma^2 \pi a^7}{56 \, \varepsilon_0}$$

- $$U_{e_2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b} \frac{\gamma a^4}{4 r^2}\cancel{\hat{r}} \cdot \frac{1}{4\varepsilon_0}\left(\frac{\gamma a^4}{r^2} - 4 \alpha k r^2\right)\cancel{\hat{r}} \; r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$U_{e_2} = \frac{\gamma a^4}{\cancel{32}_{8}\,\varepsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{\cancel{2}\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{\cancel{2}} \left[\gamma a^4 \underbrace{\int_a^b \frac{\cancel{r^2}^{\,1}}{\cancel{r^2}} dr}_{(b-a)} - 4\alpha k \underbrace{\int_a^b r^4 dr}_{\left.\frac{r^5}{5}\right|_a^b} \right]$$

$$U_{e_2} = \frac{\gamma \pi a^4}{8\varepsilon_0}\left[\gamma a^4 (b-a) - \frac{4\alpha k}{5}(b^5 - a^5)\right]$$

- $$U_{e_3} = \frac{\varepsilon_3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^{c} \left(\frac{\gamma a^4}{4\varepsilon_3 r^2}\right)^2 r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\cancel{\varepsilon_3}\gamma^2 a^8}{\cancel{32}_{8}\,\varepsilon_3^{\cancel{2}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{\cancel{2}\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{\cancel{2}} \underbrace{\int_b^c \underbrace{\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^4}_{2}}}_{r^{-2}} dr}_{\left.\frac{r^{-3}}{-3}\right|_b^c}$$

$$= -\frac{\gamma^2 a^8 \pi}{24\,\varepsilon_3}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3}\right)$$

- $$U_{e_4} = -\frac{\gamma^2 a^8 \pi}{24\,\varepsilon_0}\left(\underbrace{\frac{1}{+\infty^3}}_{\to 0} - \frac{1}{c^3}\right)$$ ← análogo a ③, pero se considera r entre c y $+\infty$, y $\varepsilon = \varepsilon_0$.

$$U_{e_4} = \frac{\gamma^2 a^8 \pi}{24\, c^3\, \varepsilon_0}$$

La energía electrostática neta del sistema queda dada por:

$$U_e = U_{e_1} + U_{e_2} + U_{e_3} + U_{e_4} \, .$$

$$U_e = \frac{\gamma^2 \pi a^7}{56 \varepsilon_0} + \frac{\gamma \pi a^4}{8 \varepsilon_0} \left[\gamma a^4 (b-a) - \frac{4ak}{5}(b^5 - a^5) \right]$$

$$+ \frac{\gamma^2 \pi a^8}{24 \varepsilon_3} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{c^3} \right) + \frac{\gamma^2 \pi a^8}{24 c^3 \varepsilon_3}$$