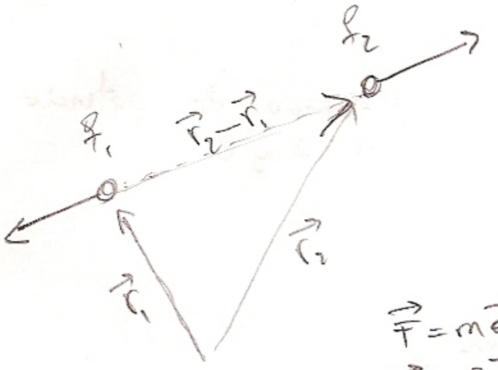
Auxiliar 2 FI 2002-4 Daniel Calderón S. - Otoño 2010.



$$\vec{F}_{q_2/q_1} = q_2 \underbrace{\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{\|\vec{r}_2-\vec{r}_1\|^3}}_{\vec{E}_{q_1}}$$
: fuerza que siente q_2 debido a q_1

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} \quad \left[\frac{N}{C}\right] \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$
: campo eléctrico producido por q (ubicado en $\vec{r}\,'$) en la posición $\vec{r}$.

Principio de superposición: $\vec{E}_{NETO} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$

$$\vec{F}_{NETA} = q \sum \vec{E}_i$$

$$\vec{E} = \sum \frac{q_k(\vec{r}-\vec{r}_k)}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}-\vec{r}_k\|^3}$$

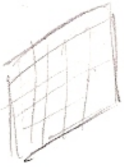
(discreto)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r'} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\,dq$$

(continuo)

lineal : $dq = \lambda(l')\,dl'$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Gamma} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\,\lambda(l')\,dl'$$
se integra sobre las cargas



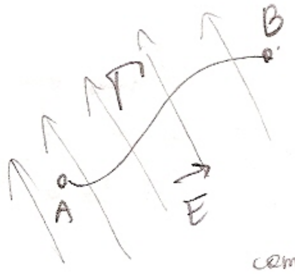
superficial : $dq = \sigma(\vec{r}\,')\,ds'$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\,\sigma(\vec{r}\,')\,ds'$$

volumétrica: $dq = \rho(\vec{r}\,')\,dV'$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\Omega} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\,\rho(\vec{r}\,')\,dV'$$

Trabajo eléctrico:



$$W = -\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{dl} = -q \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$: diferencia de potencial entre A y B.

campo vectorial $\leftarrow \vec{E} = -\nabla V$

campo escalar $\leftarrow V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dl} + V_{ref}$

volts.

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad [V] \quad \left[\frac{J}{C}\right]$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}')\, d\vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S} \frac{\sigma(\vec{r}')\, dS'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')\, dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Teorema de la divergencia de Gauss

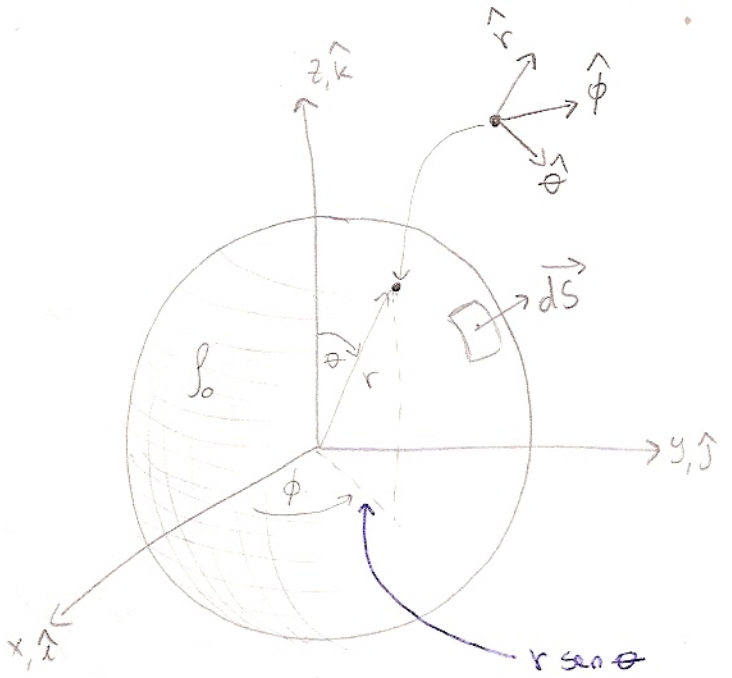
$$\iiint_{V} \nabla \cdot \vec{E}\, dV = \oiint_{\sigma(V)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

P1 Calcule el campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio producido por una distribución homogenea de carga ρ_0 dispuesta en una esfera de radio R.



Gauss:

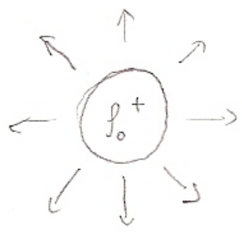
$$\iint_{\sigma(\Omega)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{ENCERRADA EN } \Omega}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{\text{ENCERRADA}} = \iiint_{\Omega} \rho \, dV$$

solu c.

La idea es aprovechar la simetría del sistema y utilizar la ley de Gauss.

Es claro que la magnitud del campo no cambiará si se mantiene r ctte. y se varía θ y ϕ. Además, las líneas de campo apuntan hacia afuera de la esfera (suponiendo $\rho_0 > 0$).



De esta forma, una expresión para el campo es:

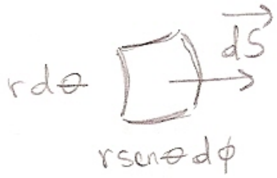
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r, \theta, \phi) = E(r)\,\hat{r}$$

(utilizando coordenadas esféricas).

Para aplicar Gauss se debe considerar una superficie que envuelve las cargas. De esta forma se considera una esfera de radio r. Se tienen 2 casos: $r \leq R$ y $r > R$. Aplicando Gauss en cada uno de estos casos, obtendremos una expresión para el campo en el interior y en el exterior de la esfera, respectivamente.

Considerando una esfera como la envolvente, el diferencial de superficie queda:

$$\vec{dS} = \underbrace{r\,d\theta}_{\substack{\text{movimiento}\\ \text{diferencial}\\ \text{en } \theta}} \cdot \underbrace{r\,\text{sen}\,\theta\, d\phi}_{\substack{\text{movimiento}\\ \text{diferencial}\\ \text{en } \phi}} \cdot \underbrace{\hat{r}}_{\substack{\text{normal}\\ \text{exterior}\\ \text{a la superficie.}}}$$

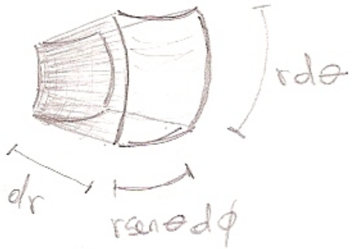


Ya conocemos una expresión para $\vec{E}$ y para $\vec{dS}$, nos falta una para la carga encerrada, esta depende si estamos dentro o fuera de la esfera cargada.

Si $r > R$

Se deben integrar todas las cargas.

$$Q_{ENC} = \iiint \rho\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho_0\, r'^2 \,\text{sen}\,\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\phi' = \rho_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta'\, d\theta'}_{\underbrace{-\cos\theta'\Big|_0^{\pi}}_{-(-1-1)=2}} \underbrace{\int_0^{R} r'^2\, dr'}_{\underbrace{\frac{r'^3}{3}\Big|_0^{R}}_{\frac{R^3}{3}}}$$



$$dV' = \underline{dr'} \cdot \underline{r'd\theta'} \cdot \underline{r'\text{sen}\,\theta'\, d\phi'}$$

Notese que todos los diferenciales tienen unidades de distancia.

$$Q_{ENC} = \frac{4\pi R^3}{3}\rho_0 = \underset{[m^3]}{\text{Volumen Esfera}} \cdot \underset{\left[\frac{C}{m^3}\right]}{\rho_0}$$

$\leftarrow$ Esto se debe a que $\rho = \rho_0$ ctte.

Utilizando ahora la ley de Gauss:

$$\oiint_{\partial(\Omega)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\,\cancel{\hat{r}} \cdot r^2\, \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi\, \cancel{\hat{r}} = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3\varepsilon_0}$$

$$E(r)\, r^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{\cancel{2\pi}} \underbrace{\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\, d\theta}_{\cancel{2}} = \frac{\cancel{4\pi} R^3 \rho_0}{3\varepsilon_0}$$

Luego $E(r) = \dfrac{R^3 \rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}(r) = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ si $r > R$

<u>Si $r \leq R$</u>

se integran solo las cargas envueltas.

$$Q_{ENC} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho_0 r'^2 \operatorname{sen}\theta' \, dr' d\theta' d\phi' = \rho_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta' d\theta'}_{2} \underbrace{\int_0^{r} r'^2 dr'}_{\frac{r^3}{3}}$$

$$Q_{ENC} = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_0$$

Luego, utilizando Gauss nuevamente

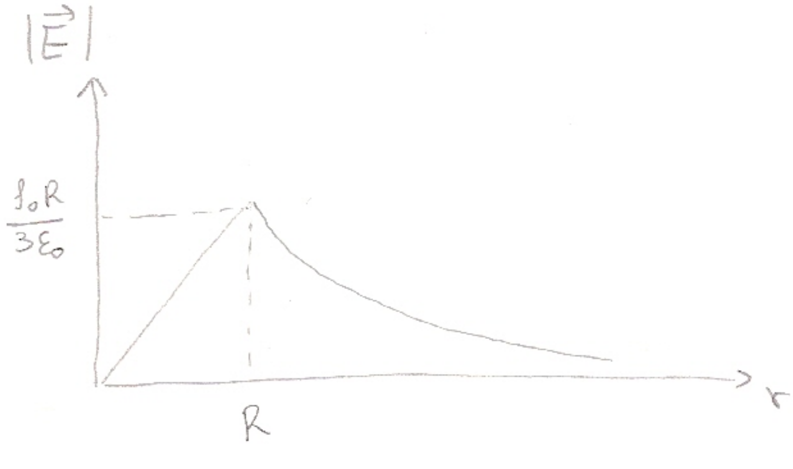
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\cancel{\hat{r}} \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \cancel{\hat{r}} = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\cancel{r^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{\cancel{2\pi}} \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta}_{\cancel{2}} = \frac{\cancel{4\pi} r^{\cancel{3}} \rho_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$$

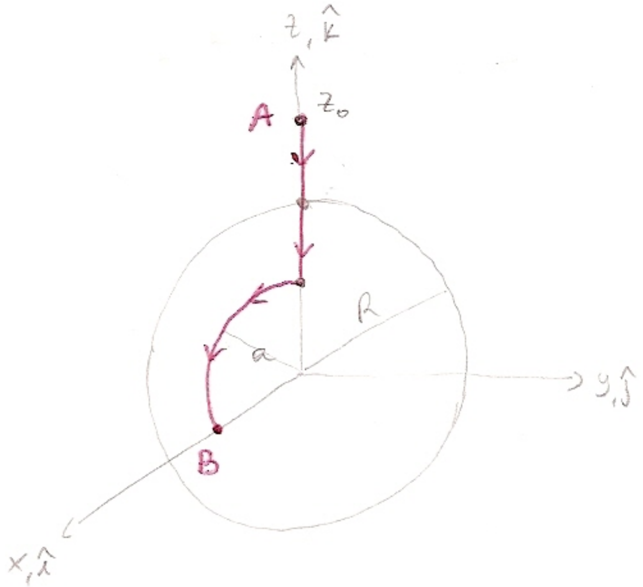
$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r} \quad \text{si } r \leq R$$

De esta forma, el campo eléctrico en todo el espacio es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } r \leq R \\[2ex] \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$



$\boxed{P2}$ Se tiene una esfera maciza cargada por una densidad volumétrica de carga ρ_0 cte. Una carga q se mueve desde A a B como indica la figura:



a) Calcule el trabajo necesario para llevar la carga q desde A hasta B.

b) Calcular la diferencia de potencial entre el punto B y el punto A ($V_B - V_A$).

Soluc.

a) $W_{AB} = -\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}$

Obs: Utilizemos la expresión para $\vec{E}$ obtenida en $\boxed{P1}$

$$W_{AB} = -q\left[\underbrace{\int_{z_0}^{R}\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cancel{\hat{r}}\cdot dr\,\cancel{\hat{r}}}_{\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\underbrace{\int_{z_0}^{R} r^{-2}dr}_{\underbrace{-r^{-1}\Big|_{z_0}^{R}}_{\frac{1}{z_0}-\frac{1}{R}}}}{}^{*} + \underbrace{\int_R^a \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\cancel{\hat{r}}\cdot dr\,\cancel{\hat{r}}}_{\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\underbrace{\int_R^a r\,dr}_{\underbrace{\frac{r^2}{2}\Big|_R^a}_{\frac{a^2-R^2}{2}}}} + \cancel{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r}\cdot r\,d\theta\,\hat{\theta}}\right]$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

$$W_{AB} = -\frac{q\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[-R^2\left(1-\frac{R}{z_0}\right) - \frac{R^2-a^2}{2}\right] = \frac{q\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[R^2\left(1-\frac{R}{z_0}\right) + \frac{R^2-a^2}{2}\right]$$

Note que $W_{AB} > 0$ lo que significa que el trabajo es realizado por un agente externo al sistema. En otras palabras, el campo se opone al movimiento de la carga (como corresponde, pues ambos son +).

* En este caso, el diferencial de línea, es $dr\hat{r}$ y no $-dr\hat{r}$, a pesar de que la trayectoria es hacia abajo. Esto se debe a que el sentido ya está dado por los límites de la integral.
Una formulación alternativa, pero equivalente, sería:

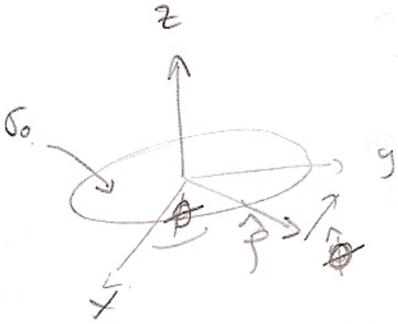
$$\int_{R}^{z_0} \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot -dr\hat{r}$$

b) $V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[R^2\left(1-\frac{R}{z_0}\right) + \frac{R^2-a^2}{2}\right]$ //

P3 Se tiene un disco cargado con densidad superficial σ_0.

a) Calcular el potencial en el eje z

b) Calcular el campo en el eje z



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')\, ds'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

$\sigma(\vec{r}') = \sigma_0$

$\vec{r} = z\hat{k}$

$\vec{r}' = \rho'\hat{\rho}$

$ds' = \rho' d\theta' d\rho'$

$\rho' \in (0,R)$

$\theta' \in (0,2\pi)$

$\|\vec{r}-\vec{r}'\| = \sqrt{z^2+\rho'^2}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 \rho' d\theta' d\rho'}{\sqrt{z^2+\rho'^2}}$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}\sigma_0}{\underset{2}{\cancel{4\pi}}\varepsilon_0} \int_0^R \underbrace{\frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{z^2+\rho'^2}}}_{du}$$

$u = (z^2+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}$

$du = \frac{1}{\cancel{2}}(z^2+\rho'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}\rho' d\rho'$

$= \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{z^2+\rho'^2}}$

$\rho' = 0 \Rightarrow u = \sqrt{z^2} = |z|$

$\rho' = R \Rightarrow u = \sqrt{z^2+R^2}$

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\, u \Big|_{|z|}^{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$V(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - |z|\right)$$

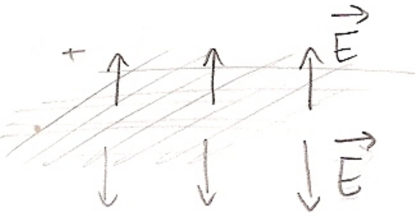
$$\vec{E}(z) = -\nabla V(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left\{ \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(|z| - (z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}\hat{k}$$

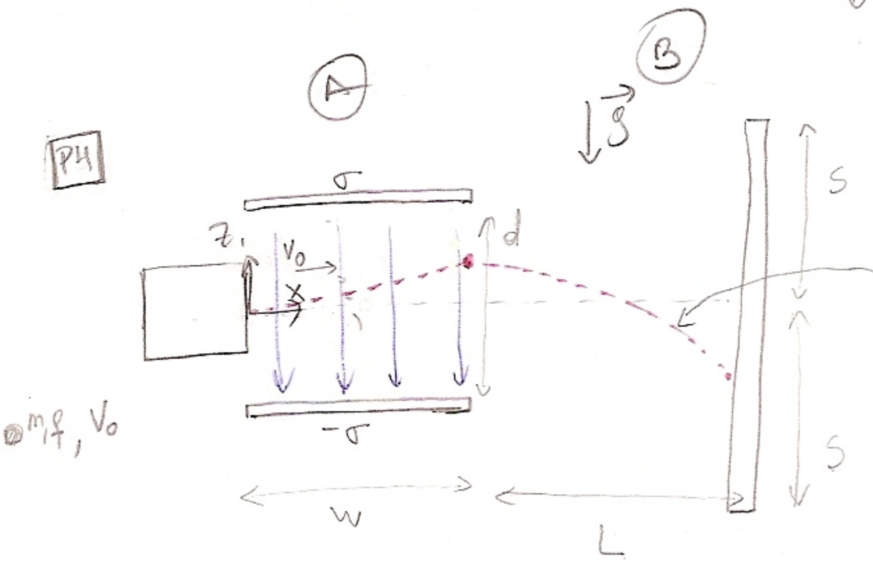
$$= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{1}{\cancel{2}}(z^2+R^2)^{-\frac{1}{2}}\cancel{2}z\right)\hat{k}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{k}$$

Si la placa es muy grande $(R \to \infty) \Rightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{|z|} \hat{k}$$





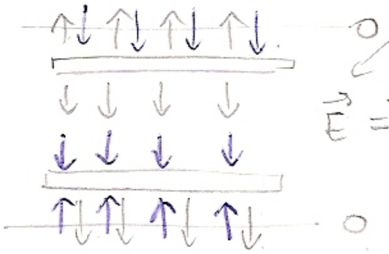
Considere $W >>> d$
desprecie efectos de borde.

Encuentre L para que el $\bar{e}$ llegue justo a S.

"Ver" trayectoria

"Ver" campo

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

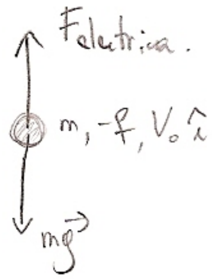


$$\vec{E} = -\frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0} \hat{k} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \hat{k}$$

Potencial ? $\longrightarrow$ $\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow V = -\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$. $d\vec{l} = dz\,\hat{k}$

$$\Rightarrow V(z) = -\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cancel{\hat{k}} \cdot dz \cancel{\hat{k}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{d}{2} - -\frac{d}{2} \right) = \frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0}$$

Zona A



$$\vec{F}_N = \vec{F}_{elec} + \vec{F}_{peso}$$

$$m \ddot{z} \hat{k} = -q \cdot -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \hat{k} - mg \hat{k} \qquad (*)$$

$$m \ddot{x} \hat{\imath} = 0 \Rightarrow \dot{x} = cte = V_0$$

(*) $$m\ddot{z} = \frac{q\sigma_0}{\varepsilon_0} - mg$$

$$\ddot{z} = \underbrace{\frac{q\sigma_0}{m\varepsilon_0} - g}_{a} \Rightarrow \dot{z} = at + \text{ctte.}$$

$$\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow \text{ctte} = 0.$$

$$\Rightarrow \dot{z} = at$$

$$z = \frac{at^2}{2} + \text{ctte}$$

$$z(0) = 0 \Rightarrow \text{ctte} = 0$$

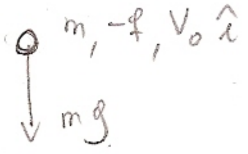
$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{q\sigma_0}{m\varepsilon_0} - g\right)t^2}$$

$$\boxed{x = V_0 t}$$

$$x^* = w \Rightarrow t^* = \frac{w}{V_0} \Rightarrow z^* = \frac{1}{2}\left(\frac{q\sigma_0}{m\varepsilon_0} - g\right)\left(\frac{w}{V_0}\right)^2$$

$$\dot{z}^* = \left(\frac{q\sigma_0}{m\varepsilon_0} - g\right)\left(\frac{w}{V_0}\right)$$

ZONA B



$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = V_0 t$$

$$\cancel{m}\ddot{z} = -\cancel{m}g$$

$$\dot{z} = gt + \text{ctte}$$

Si $t = t^* = \frac{w}{V_0} \Rightarrow \dot{z} = \dot{z}^* = \left(\frac{q\sigma_0}{m\varepsilon_0} - g\right)\left(\frac{w}{V_0}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{q\sigma_0}{m\varepsilon_0} - g\right)\frac{w}{V_0} = g\cdot\frac{w}{V_0} + \text{ctte} \Rightarrow \text{ctte} = \left(\frac{q\sigma_0}{m\varepsilon_0} - 2g\right)\frac{w}{V_0}$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = gt + \left(\frac{q\sigma_0}{m\varepsilon_0} - 2g\right)\frac{w}{V_0}$$

$$z(t) = \frac{g}{2}t^2 + \left(\frac{q\sigma_0}{m\varepsilon_0} - 2g\right)\frac{w}{V_0}t + \text{ctte.}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f\sigma_0}{m\varepsilon_0}-g\right)\left(\frac{w}{V_0}\right)^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{w}{V_0}\right)^2 + \left(\frac{f\sigma_0}{m\varepsilon_0}-2g\right)\left(\frac{w}{V_0}\right)^2 + \text{ctte.}$$

$$\left(\frac{f\sigma_0}{2m\varepsilon_0}-g\right)\left(\frac{w}{V_0}\right)^2 = \left(\frac{f\sigma_0}{m\varepsilon_0}-2g\right)\left(\frac{w}{V_0}\right)^2 + \text{ctte.}$$

$$\left(g-\frac{f\sigma_0}{2m\varepsilon_0}\right)\left(\frac{w}{V_0}\right)^2 = \text{ctte.}$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{g}{2}t^2 + \left(\frac{f\sigma_0}{m\varepsilon_0}-2g\right)\frac{w}{V_0}t + \left(g-\frac{f\sigma_0}{2m\varepsilon_0}\right)\left(\frac{w}{V_0}\right)^2.$$

$$x(t) = V_0 t$$

$$\frac{W+L}{V_0} = t_s$$

$$\boxed{-S = \frac{g}{2}\cdot\left(\frac{W+L}{V_0}\right)^2 + \left(\frac{f\sigma_0}{m\varepsilon_0}-2g\right)\frac{W}{V_0}\left(\frac{W+L}{V_0}\right) + \left(g-\frac{f\sigma_0}{2m\varepsilon_0}\right)\left(\frac{W}{V_0}\right)^2}$$