

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

CUARTA EDICIÓN

REITZ • MILFORD • CHRISTY

Fundamentos de la teoría electromagnética

CUARTA EDICIÓN

John R. Reitz

*Research Laboratory,
Ford Motor Company*

Frederick J. Milford

Battelle Memorial Institute

Robert W. Christy

Dartmouth College

Versión en español de

Carlos Gerardo Martínez Ávila

*Comisión Nacional de Seguridad
Nuclear y Salvaguardias
México*



Con la colaboración técnica de

José Luis Sebastián Franco

Universidad Complutense de Madrid, España

y

Juan Antonio Flores Lira

Universidad Iberoamericana, México

0126-57841



Addison-Wesley Iberoamericana

Argentina • Chile • Colombia • España
Estados Unidos • México • Puerto Rico • Venezuela

BIB-ID 1043-79160

ÍNDICE GENERAL

* Las secciones y los capítulos indicados con asterisco pueden omitirse sin perder continuidad

1	Análisis vectorial	1	
1.1	Definiciones	1	
1.2	Álgebra vectorial	2	
1.3	Gradiente	5	
1.4	Integración vectorial	9	
1.5	Divergencia	11	
1.6	Rotacional	14	
1.7	El operador vectorial diferencial ∇	17	
1.8	Desarrollos posteriores	19	
1.9	Resumen	22	
2	Electrostática	26	
2.1	Carga eléctrica	26	
2.2	Ley de Coulomb	27	
2.3	El campo eléctrico	31	
2.4	El potencial electrostático	33	
2.5	Conductores y aislantes	36	
2.6	Ley de Gauss	37	
2.7	Aplicación de la ley de Gauss	40	
2.8	El dipolo eléctrico	43	
2.9	Desarrollo multipolar de campos eléctricos	46	
2.10	La función delta de Dirac	48	
2.11	Resumen	50	
3	Resolución de problemas electrostáticos	56	
3.1	Ecuación de Poisson	56	
3.2	Ecuación de Laplace	58	
3.3	Ecuación de Laplace con una variable independiente	60	
3.4	Soluciones a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas: armónicos esféricos	60	
3.5	Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme	63	
3.6	Soluciones a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas: armónicos cilíndricos	65	
*3.7	Ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares	66	
*3.8	Ecuación de Laplace en dos dimensiones: solución general	67	
3.9	Imágenes electrostáticas	68	
3.10	Líneas de carga y líneas imagen	74	
3.11	Sistemas de conductores y coeficientes de potencial	75	
3.12	Solución numérica de problemas de electrostática	76	
3.13	Soluciones de la ecuación de Poisson	91	
3.14	Resumen	92	
4	El campo electrostático en medios dieléctricos	97	
4.1	Polarización	98	
4.2	Campo fuera de un medio dieléctrico	99	
4.3	El campo eléctrico dentro de un dieléctrico	103	
4.4	Ley de Gauss en un dieléctrico: el desplazamiento eléctrico	106	
4.5	Susceptibilidad eléctrica y constante dieléctrica	109	
4.6	Carga puntual en un fluido dieléctrico	110	
4.7	Condiciones en la frontera para los vectores de campo	112	
4.8	Problemas con valores en la frontera en los que intervienen dieléctricos	115	
*4.9	Fuerza sobre una carga puntual sumergida en un dieléctrico	118	

- 4.10 Método de imágenes para problemas en los que intervienen dieléctricos 120
- 4.11 Resumen 122
- 5 Teoría microscópica de los dieléctricos 127**
 - 5.1 Campo molecular en un dieléctrico 127
 - 5.2 Dipolos inducidos: un modelo sencillo 131
 - 5.3 Moléculas polares: la fórmula de Langevin-Debye 132
 - *5.4 Polarización permanente: ferroelectricidad 136
 - 5.5 Resumen 138
- 6 Energía electrostática 141**
 - 6.1 Energía potencial de un grupo de cargas puntuales 142
 - 6.2 Energía electrostática de una distribución de cargas 143
 - 6.3 Densidad de energía de un campo electrostático 146
 - 6.4 Energía de un sistema de conductores cargados: coeficientes de potencial 149
 - 6.5 Coeficientes de capacidad e inducción 150
 - 6.6 Condensadores 151
 - 6.7 Fuerzas y momentos de rotación 154
 - 6.8 Resumen 157
- 7 Corriente eléctrica 162**
 - 7.1 Naturaleza de la corriente 163
 - 7.2 Densidad de corriente: ecuación de continuidad 165
 - 7.3 Ley de Ohm: conductividad 167
 - 7.4 Corrientes estacionarias en medios continuos 170
 - 7.5 Aproximación al equilibrio electrostático 174
 - 7.6 Redes de resistencias y leyes de Kirchoff 175
 - 7.7 Teoría microscópica de la conducción 181
 - 7.8 Resumen 185
- 8 El campo magnético de corrientes estacionarias 190**
 - 8.1 Definición de la inducción magnética 190
 - 8.2 Fuerzas sobre conductores por los que circula corriente 193
 - 8.3 Ley de Biot y Savart 197
 - 8.4 Aplicaciones elementales de la ley de Biot y Savart 199
 - 8.5 Ley de circuitos de Ampère 204
 - 8.6 El potencial vector magnético 207
 - 8.7 El campo magnético de un circuito distante 209
 - 8.8 El potencial escalar magnético 212
 - 8.9 Flujo magnético 213
 - 8.10 Resumen 213
- 9 Propiedades magnéticas de la materia 219**
 - 9.1 Magnetización 219
 - 9.2 El campo magnético producido por un material magnetizado 223
 - 9.3 Potencial escalar magnético y densidad de polos magnéticos 226
 - 9.4 Fuentes del campo magnético: intensidad magnética 227
 - 9.5 Las ecuaciones de campo 228
 - 9.6 Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas e histéresis 230
 - 9.7 Condiciones en la frontera sobre los vectores de campo 236
 - 9.8 Problemas de valores en la frontera en los que intervienen materiales magnéticos 238
 - 9.9 Circuitos de corriente que contienen medios magnéticos 243
 - *9.10 Circuitos magnéticos 246
 - *9.11 Circuitos magnéticos que contienen imanes permanentes 249
 - 9.12 Resumen 252
- *10 Teoría microscópica del magnetismo 257**
 - 10.1 Campo molecular dentro de la materia 258

- 10.2 Origen del diamagnetismo 260
- 10.3 Origen del paramagnetismo 262
- 10.4 Teoría del ferromagnetismo 264
- 10.5 Dominios ferromagnéticos 266
- 10.6 Ferritas 269
- 10.7 Resumen 269
- 11 Inducción electromagnética 272**
- 11.1 Inducción electromagnética 272
- 11.2 Autoinductancia 278
- 11.3 Inductancia mutua 280
- 11.4 La fórmula de Neumann 282
- 11.5 Inductancias en serie y en paralelo 282
- 11.6 Resumen 285
- 12 Energía magnética 290**
- 12.1 Energía magnética de circuitos acoplados 291
- 12.2 Densidad de energía en el campo magnético 293
- 12.3 Fuerzas y momentos de rotación en circuitos rígidos 295
- *12.4 Pérdida por histéresis 299
- 12.5 Resumen 302
- 13 Corrientes que varían lentamente 317**
- 13.1 Comportamiento transitorio y en estado estacionario 308
- 13.2 Leyes de Kirchoff 309
- 13.3 Comportamiento transitorio elemental 311
- 13.4 Comportamiento en estado estacionario de un circuito en serie simple 315
- 13.5 Conexión de impedancias en serie y en paralelo 317
- 13.6 Potencia y factores de potencia 319
- 13.7 Resonancia 320
- * 13.8 Inductancias mutuas en circuitos de c.a. 323
- * 13.9 Ecuaciones de malla y de nodo 327
- *13.10 Impedancias de entrada y funciones de transferencia 330
- 13.11 Resolución de las ecuaciones de redes por computador 332
- 13.12 Resumen 338
- *14 Física de plasmas 344**
- 14.1 Enfoques teóricos de la dinámica de plasmas 345
- 14.2 Neutralidad eléctrica en un plasma 346
- 14.3 Órbitas de partículas y movimiento de deriva en un plasma 347
- 14.4 Espejos magnéticos 352
- 14.5 Las ecuaciones hidromagnéticas 353
- 14.6 El efecto de constricción 356
- 14.7 Sistemas de confinamiento magnético para fusión termonuclear controlada 358
- 14.8 Oscilaciones y movimiento ondulatorio de plasmas 361
- 14.9 Resumen 365
- 15 Propiedades electromagnéticas de los superconductores 368**
- 15.1 Historia de la superconductividad 368
- 15.2 Conductividad perfecta y diamagnetismo perfecto de superconductores 373
- 15.3 Ejemplos en los que interviene la exclusión perfecta del flujo 375
- 15.4 Ecuaciones de London 378
- 15.5 Resumen 387
- 16 Ecuaciones de Maxwell 390**
- 16.1 Generalización de la ley de Ampère. corriente de desplazamiento 390
- 16.2 Ecuaciones de Maxwell y sus bases empíricas 393
- 16.3 Energía electromagnética 394
- 16.4 La ecuación de onda 398
- 16.5 Ondas monocromáticas 399
- 16.6 Condiciones en la frontera 402
- 16.7 La ecuación de ondas con fuentes 406
- 16.8 Resumen 412
- 17 Propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas 417**
- 17.1 Ondas planas monocromáticas en medios no conductores 417
- 17.2 Polarización 423
- 17.3 Densidad y flujo de energía 426
- 17.4 Ondas planas monocromáticas en medios conductores 429

- *17.5 Ondas esféricas 436
- 17.6 Resumen 443

18 Ondas monocromáticas en regiones limitadas 447

- 18.1 Reflexión y refracción en la superficie de separación de dos medios no conductores: incidencia normal 447
- 18.2 Reflexión y refracción en la superficie de separación de dos medios no conductores: incidencia oblicua 451
- 18.3 Ángulo de Brewster: ángulo crítico 457
- 18.4 Coeficientes complejos de Fresnel: reflexión desde un plano conductor 460
- 18.5 Reflexión y transmisión por una capa delgada: interferencia 468
- 18.6 Propagación entre placas conductoras paralelas 475
- 18.7 Guías de onda 480
- 18.8 Cavidades resonantes 483
- 18.9 Resumen 485

19 Dispersión y campos oscilantes en medios dispersivos 491

- 19.1 Linealidad y causalidad 491
- *19.2 Respuesta en frecuencia y relaciones de dispersión 497
- 19.3 Modelo del oscilador armónico de Drude-Lorentz 501
- 19.4 Absorción por resonancia por cargas ligadas 506
- 19.5 La teoría de los electrones libres de Drude 513
- *19.6 Relajación dieléctrica 520
- *19.7 Campos oscilatorios en medios dispersivos 524
- 19.8 Resumen 528

20 Emisión de radiación 532

- 20.1 Radiación de un dipolo oscilante 532
- 20.2 Radiación de una antena de media onda 536

- 20.3 Radiación de un grupo de cargas en movimiento 538

- *20.4 Campos de la zona intermedia y próxima 542

- 20.5 Amortiguamiento por radiación: sección eficaz de Thomson 544

- 20.6 Resumen 548

21 Electrodinámica 552

- 21.1 Potenciales de Lienard-Wiechert 552
- 21.2 El campo de una carga puntual que se mueve uniformemente 555
- 21.3 El campo de una carga puntual acelerada 558
- 21.4 Campos de radiación para velocidades pequeñas 561
- 21.5 Resumen 563

22 La teoría especial de la relatividad 565

- 22.1 La física antes de 1900 565
- 22.2 La transformación de Lorentz y los postulados de Einstein de la relatividad especial 568
- 22.3 Geometría del espacio-tiempo 573
- 22.4 La transformación de Lorentz como una transformación ortogonal 574
- 22.5 Forma covariante de las ecuaciones electromagnéticas 576
- 22.6 Ley de transformación para el campo electromagnético 580
- 22.7 El campo de una carga puntual que se mueve uniformemente 581
- 22.8 Resumen 583

Apéndice I

- Computadores y teoría electromagnética 586

Apéndice II

- Transformaciones de coordenadas, vectores y tensores 602

Análisis vectorial

En el estudio de la electricidad y del magnetismo se puede evitar de una manera eficaz la complejidad de la notación utilizando la notación del análisis vectorial. Al proporcionar esta valiosa taquigrafía, el análisis vectorial también lleva a un primer plano los conceptos físicos contenidos en las ecuaciones. El propósito de este capítulo es dar una exposición breve pero autosuficiente del análisis vectorial básico y proporcionar un conocimiento más bien utilitario de este campo, necesario para el tratamiento de la electricidad y el magnetismo. Los lectores que ya están familiarizados con el análisis vectorial encontrarán este capítulo como un repaso útil y una introducción a la notación del texto.

1.1

DEFINICIONES

En el estudio de la física elemental se han encontrado varias clases de cantidades; en particular, distinguimos entre vectores y escalares. Para nuestros propósitos será suficiente definir un escalar de la siguiente forma:

Un *escalar* es una cantidad que está completamente caracterizada por su magnitud.

Los ejemplos de escalares son numerosos: masa, tiempo, volumen, etc. Una ampliación sencilla de la idea de un escalar es un *campo escalar*, es decir, una función de posición que está completamente determinada por su magnitud en todos los puntos del espacio.

Un vector puede definirse en la forma que sigue:

Un vector es una cantidad que está caracterizada completamente por su magnitud y dirección.

Como ejemplos de vectores citemos la posición a partir de un origen fijo, la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc. La generalización a un *campo vectorial* da una función de posición que está determinada completamente por su magnitud y dirección en todos los puntos del espacio.

Estas definiciones pueden refinarse y ampliarse; de hecho, en el Apéndice II se reemplazan por definiciones más refinadas en términos de propiedades de transformación. Además, pueden definirse clases más complicadas de cantidades, tales como tensores. Sin embargo, los escalares y los vectores serán suficientes para nuestros propósitos hasta el capítulo 22.

1.2 ALGEBRA VECTORIAL

Como el álgebra de los escalares es familiar al lector, ésta se utilizará para desarrollar el álgebra vectorial. Con el fin de continuar con este desarrollo es conveniente tener una representación de los vectores, para lo cual introducimos un sistema coordenado cartesiano tridimensional. Este sistema tridimensional se denotará con las tres variables x, y, z , o, cuando sea más conveniente, x_1, x_2, x_3 . Un vector se especifica por sus componentes x, y, z con respecto a este sistema coordenado. Por tanto, un vector* \mathbf{V} se especifica por sus componentes V_x, V_y, V_z , donde $V_x = |\mathbf{V}| \cos \alpha_1$, $V_y = |\mathbf{V}| \cos \alpha_2$, $V_z = |\mathbf{V}| \cos \alpha_3$ y donde las α son los ángulos entre \mathbf{V} y los ejes coordenados correspondientes. El escalar $|\mathbf{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ es la magnitud o longitud del vector \mathbf{V} . En el caso de campos vectoriales, cada una de las componentes debe considerarse como una función de x, y, z . En este punto debe hacerse énfasis en que introducimos una representación de los vectores con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas sólo por sencillez y facilidad de comprensión; todas las definiciones y operaciones son, de hecho, independientes de cualquier elección especial de coordenadas.

La suma de dos vectores se define como el vector cuyas componentes son la suma de las componentes correspondientes de los vectores originales. Así pues, si \mathbf{C} es la suma de \mathbf{A} y \mathbf{B} , escribimos

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (1-1)$$

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z \quad (1-2)$$

Esta definición de suma vectorial es completamente equivalente a la conocida regla del paralelogramo para la suma de vectores.

* Las cantidades vectoriales se denotarán con símbolos en letra negra.

La resta de vectores se define en términos del negativo de un vector, el cual es el vector cuyas componentes son los negativos de las componentes correspondientes al vector original. De esta forma, si \mathbf{A} es un vector, $-\mathbf{A}$ se define como

$$(-\mathbf{A})_x = -A_x, \quad (-\mathbf{A})_y = -A_y, \quad (-\mathbf{A})_z = -A_z \quad (1-3)$$

La operación de resta se define entonces como la suma del negativo y se escribe

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (1-4)$$

Puesto que la suma de números reales es asociativa y conmutativa, se sigue que la suma de vectores (y la resta) también es asociativa y conmutativa. En la notación vectorial esto se ve como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \end{aligned} \quad (1-5)$$

En otras palabras, los paréntesis no son necesarios, como se indica en la última expresión.

Pasando ahora al proceso de multiplicación, observaremos que el producto más sencillo es el de un escalar por un vector. Esta operación da como resultado un vector, cada una de cuyas componentes es el escalar por la componente correspondiente del vector original. Si c es un escalar y \mathbf{A} un vector, el producto $c\mathbf{A}$ es un vector, $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$, definido por

$$B_x = cA_x, \quad B_y = cA_y, \quad B_z = cA_z \quad (1-6)$$

Está claro que si \mathbf{A} es un *campo vectorial* y c un *campo escalar*, entonces \mathbf{B} es un nuevo campo vectorial que no es necesariamente un múltiplo del campo original.

Si dos vectores se multiplican entre sí, existen dos posibilidades conocidas como producto vectorial y producto escalar. Considerando primeramente el producto escalar, notemos que el nombre proviene de la naturaleza escalar del producto, aunque a veces se le llama en forma alternativa *producto interno* o *producto punto*. La definición de producto escalar, que se expresa como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-7)$$

- * Esta definición es equivalente a otra, tal vez más familiar, que es el producto de las magnitudes de los vectores originales por el coseno del ángulo que forman. Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son perpendiculares entre sí,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos 90.$$

El producto escalar es conmutativo. La longitud de \mathbf{A} es

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$$

El producto vectorial de dos vectores, como su nombre indica, es un vector. También se le llama *producto externo* y *producto cruz*. El producto vectorial se expresa por $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Si \mathbf{C} es el producto vectorial de \mathbf{A} y \mathbf{B} , entonces

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, or

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y, & C_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned} \quad (1-8)$$

Es importante notar que el producto cruz depende del orden de los factores, ya que si se intercambia éste se introduce un signo menos:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Consecuentemente,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} = |\mathbf{A}| |\mathbf{A}| \sin 0.$$

- * Esta definición equivale a la siguiente: el producto vectorial es el producto de las magnitudes por el seno del ángulo que forman los vectores originales, con la dirección dada por la regla del tornillo de la mano derecha.*

El producto vectorial puede recordarse fácilmente en términos de un determinante. Si \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son vectores unitarios, es decir, vectores que tienen como magnitud la unidad, en las direcciones x , y y z , respectivamente, entonces

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-9)$$

Si este determinante se evalúa con las reglas usuales, el resultado es precisamente nuestra definición de producto cruz.

Las operaciones algebraicas anteriores pueden combinarse de muchas formas. La mayoría de los resultados así obtenidos son obvios; sin embargo, hay dos productos triples lo suficientemente importantes como para mencionarlos explícitamente. El triple producto escalar $D = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ se encuentra fácilmente mediante el determinante

$$D = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-10)$$

Este producto no varía al intercambiar el punto y la cruz o por una permutación cíclica de los tres vectores. Observe que los paréntesis no son necesarios, puesto que el producto cruz de un escalar y un vector no está definido.

El otro producto de interés es el triple producto cruz $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. La aplicación repetida de la definición de producto cruz (Ec. 1-8) da por resultado

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-11)$$

* Supongamos que \mathbf{A} gira hacia \mathbf{B} en el menor ángulo posible. Un tornillo de mano derecha girado en esta forma avanzará en una dirección perpendicular tanto a \mathbf{A} como a \mathbf{B} ; esta dirección es la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

que se denomina frecuentemente *regla del factor medio* (*back-cab*). Debe observarse que en el producto cruz los paréntesis son vitales; sin ellos, el producto no está bien definido.

En este punto podríamos preguntarnos sobre la posibilidad de la división vectorial. La división de un vector por un escalar puede definirse, por supuesto, como la multiplicación por el recíproco del escalar. Sin embargo, la división de un vector entre otro vector sólo es posible si los dos vectores son paralelos. Por otra parte, es posible expresar soluciones generales de ecuaciones vectoriales y lograr en esta forma algo parecido a la división. Consideremos la ecuación

$$c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \quad (1-12)$$

donde c es un escalar conocido, \mathbf{A} un vector conocido y \mathbf{X} un vector desconocido. Una solución general de esta ecuación es

$$\mathbf{X} = \frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \mathbf{B} \quad (1-13)$$

donde \mathbf{B} es un vector de magnitud arbitraria y perpendicular a \mathbf{A} , esto es, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. Lo que hemos hecho es muy semejante a dividir c entre \mathbf{A} ; en forma más correcta, hemos hallado la forma general del vector \mathbf{X} que satisface la ecuación (1-12). No hay solución única, y este hecho explica la introducción del vector \mathbf{B} . Del mismo modo podemos considerar la ecuación vectorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{X} \quad (1-14)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{C} son vectores conocidos y \mathbf{X} es un vector desconocido. La solución general de esta ecuación es

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + k\mathbf{A} \quad (1-15)$$

donde k es un escalar arbitrario. Por tanto, \mathbf{X} definido por la ecuación (1-15) es muy cercano al cociente de \mathbf{C} entre \mathbf{A} ; el escalar k tiene en cuenta la no unicidad del proceso. Si se pide que \mathbf{X} satisfaga tanto (1-12) como (1-14), entonces el resultado es único (si es que existe) y está dado por

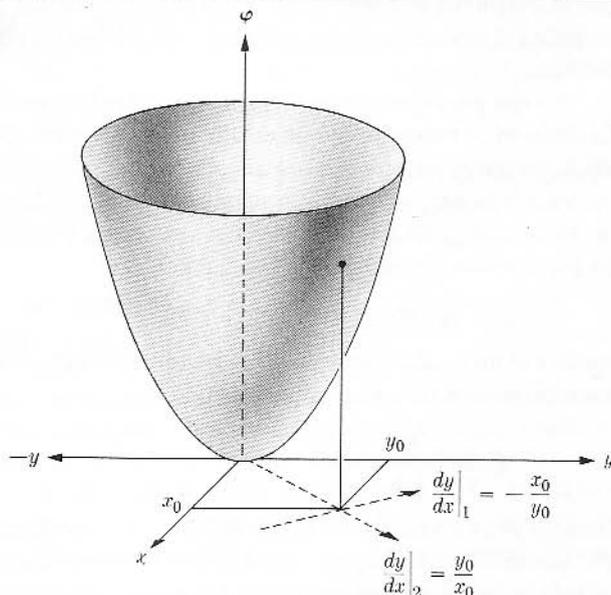
$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \quad (1-16)$$

1.3 GRADIENTE

Se considerarán ahora las ampliaciones de las ideas introducidas en las secciones anteriores para incluir la diferenciación e integración, es decir, el cálculo vectorial. La más sencilla de éstas es la relación de un campo vectorial particular con las derivadas de un campo escalar. Es conveniente introducir primero la idea de *derivada direccional* de una función de varias variables, que es justamente la razón de cambio de la función en una dirección determinada. La derivada direccional de una función

FIGURA 1.1

Función $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ representada gráficamente en función de x e y en el espacio tridimensional.



escalar φ es representada generalmente por $d\varphi/ds$; debe entenderse que ds representa un desplazamiento infinitesimal en la dirección que estamos considerando, y que ds es la magnitud escalar de ds . Si ds tiene como componentes dx , dy , dz , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta s} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \end{aligned}$$

Para aclarar la idea de una derivada direccional, considere una función escalar de dos variables. De esta forma, $\varphi(x, y)$ representa un campo escalar bidimensional. Podemos hacer la gráfica de φ en función de x e y como se ve en la figura 1.1 para la función $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$. La derivada direccional en el punto x_0, y_0 depende de la dirección. Si escogemos la dirección correspondiente a $dy/dx = -x_0/y_0$, entonces encontramos que

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{x_0, y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \left[2x_0 - 2y_0 \frac{x_0}{y_0} \right] \frac{dx}{ds} = 0 \quad (1-17a)$$

Alternativamente, si escogemos $dy/dx = y_0/x_0$ encontramos

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{x_0, y_0} = \left(2x_0 + 2 \frac{y_0^2}{x_0} \right) \sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2 + y_0^2}} = 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (1-17b)$$

puesto que $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Como tercera posibilidad escogamos $dy/dx = \alpha$, entonces

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{x_0, y_0} = (2x_0 + 2\alpha y_0)(1 + \alpha^2)^{-1/2} \quad (1-17c)$$

Si este resultado se deriva con respecto α y la derivada se iguala a cero, entonces se encuentra el valor de α en el que la derivada es un máximo o un mínimo. Cuando realizamos estas operaciones, obtenemos $\alpha = y_0/x_0$, lo que significa simplemente que la dirección de la razón máxima de cambio de la función $\varphi = x^2 + y^2$ es la dirección radial. Si la dirección es radial hacia afuera, entonces el máximo es la razón máxima de incremento; si es radial hacia dentro, es la razón máxima de decremento o la razón mínima de incremento. En la dirección especificada por $dy/dx = -x_0/y_0$, la razón de cambio de $x^2 + y^2$ es cero. Esta dirección es tangente al círculo $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Evidentemente, sobre esta curva, $\varphi = x^2 + y^2$ no cambia. La dirección en la que $d\varphi/ds$ se anula proporciona la dirección de la curva $\varphi = \text{constante}$ en el punto considerado. Estas líneas, que son circunferencias para la función $x^2 + y^2$, son completamente análogas a las conocidas curvas de nivel o líneas de altitud constante que aparecen en los mapas topográficos. La figura 1.2 muestra la función $\varphi = x^2 + y^2$ representada ahora como un diagrama de curvas de nivel.

La idea de curvas de nivel puede generalizarse a una función de tres variables, en cuyo caso las superficies, $\varphi(x, y, z) = \text{constante}$, se denominan *superficies de nivel* o *superficies equipotenciales*. El análogo tridimensional de la figura 1.2 es la única forma práctica de representar gráficamente un campo escalar para un espacio tridimensional. El gradiente de una función escalar puede definirse ahora en la siguiente forma:

El *gradiente* de una función escalar φ es un vector cuya magnitud es la máxima derivada direccional en el punto considerado y cuya dirección es la dirección de la máxima derivada direccional en ese punto.

FIGURA 1.2

Función $\varphi(x, y)$ de la figura 1.1 representada como diagrama de curvas de nivel en dos dimensiones.

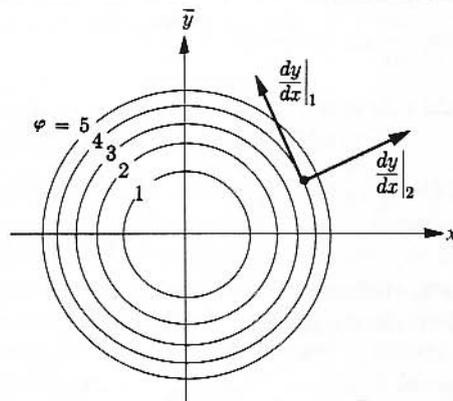
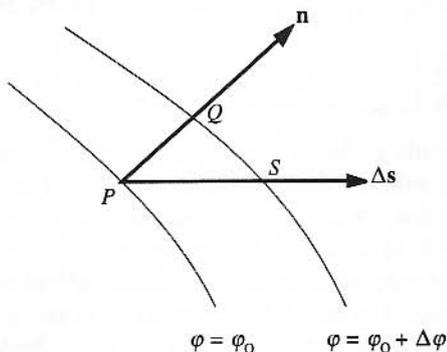


FIGURA 1.3

Partes de dos superficies de nivel de la función $\varphi(x, y, z)$. $\mathbf{grad} \varphi$ en P es igual al límite de $\Delta\varphi / P\bar{Q}$ cuando $P\bar{Q} \rightarrow 0$ y $d\varphi/ds$ es el límite correspondiente de $\Delta\varphi / PS$.



Es obvio que el gradiente tiene dirección normal a la superficie de nivel de φ en el punto considerado. Los símbolos más comunes para el gradiente son ∇ y \mathbf{grad} .* En términos del gradiente, la derivada direccional está dada por

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\mathbf{grad} \varphi| \cos \theta \quad (1-18)$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de ds y la dirección del gradiente. Este resultado es evidente de forma inmediata a partir de la geometría de la figura 1.3. Si representamos con ds el desplazamiento vectorial de magnitud ds , entonces (1-18) puede escribirse como

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{grad} \varphi \cdot \frac{ds}{ds} \quad (1-19)$$

Esta ecuación nos permite hallar la forma explícita del gradiente en cualquier sistema de coordenadas en el que conozcamos la forma ds . En coordenadas rectangulares sabemos que $ds = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$. Sabemos también que

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

A partir de esto y de la ecuación (1-19) se sigue que

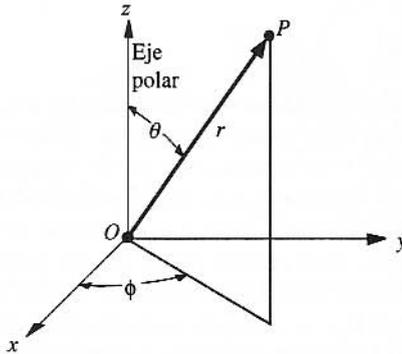
$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz &= (\mathbf{grad} \varphi)_x dx + (\mathbf{grad} \varphi)_y dy \\ &\quad + (\mathbf{grad} \varphi)_z dz \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los diferenciales de las variables independientes en ambos miembros de la ecuación, se tiene

* Utilizaremos esta última notación principalmente.

FIGURA 1.4

Definición de las coordenadas polares r , θ y ϕ .



$$\mathbf{grad} \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1-20)$$

en coordenadas rectangulares. En un caso más complicado, el procedimiento es el mismo. En coordenadas polares esféricas, con r , θ , ϕ definidos como en la figura 1.4, tenemos

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi \quad (1-21)$$

y

$$ds = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\phi r \sin \theta d\phi \quad (1-22)$$

donde \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_θ y \mathbf{a}_ϕ son vectores unitarios en las direcciones de r , θ y ϕ , respectivamente. Aplicando (1-19) e igualando los coeficientes de las variables independientes obtenemos

$$\mathbf{grad} \varphi = \mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \quad (1-23)$$

en coordenadas esféricas.

1.4 INTEGRACIÓN VECTORIAL

Aunque existen otros aspectos de la diferenciación en los que intervienen vectores, es conveniente analizar primero la integración vectorial. Para nuestros propósitos, podemos considerar tres clases de integrales: de línea, de superficie y de volumen, según la naturaleza del diferencial que aparezca en la integral. El integrando puede ser un vector o un escalar; no obstante, ciertas combinaciones de integrandos y diferenciales dan origen a integrales que no son de interés. Las de mayor interés aquí son la integral de línea escalar de un vector, la integral de superficie escalar de un vector y las integrales de volumen tanto de vectores como de escalares.

Si \mathbf{F} es un campo vectorial, la integral de línea de \mathbf{F} se escribe como

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad (1-24)$$

donde C es la curva sobre la cual se efectúa la integración, a y b los puntos inicial y final de esta curva y $d\mathbf{l}$ un desplazamiento vectorial infinitesimal a lo largo de la curva C . Puesto que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ es un escalar, está claro que la integral de línea es un escalar. La definición de la integral de línea es muy semejante a la definición de Riemann de la integral definida. El segmento de C entre a y b se divide en un gran número de pequeños incrementos $\Delta\mathbf{l}_i$; para cada incremento se escoge un punto interior y se halla el valor de \mathbf{F} en ese punto. Se encuentra el producto escalar de cada incremento por su correspondiente valor de \mathbf{F} y se calcula la suma de todos ellos. La integral de línea se define entonces como el límite de esta suma a medida que el número de incrementos llega a ser infinito, de tal manera que cada incremento tienda a cero. Esta definición puede expresarse de forma compacta como

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{l}_i$$

Es importante observar que la integral de línea depende generalmente no sólo de los extremos a y b , sino también de la curva C sobre la que se efectúa la integración, ya que la magnitud y dirección de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ y la dirección de $d\mathbf{l}$ dependen de C y de su tangente, respectivamente. La integral de línea alrededor de una curva cerrada tiene tanta importancia que se ha empleado una notación especial para ella; ésta es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-25)$$

La integral alrededor de una curva cerrada generalmente es distinta de cero; el tipo de vectores para los que la integral de línea alrededor de *cualquier* curva cerrada es cero, es de importancia considerable. Por esta razón a menudo se encuentran integrales de línea alrededor de trayectorias cerradas no especificadas. Por ejemplo,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-26)$$

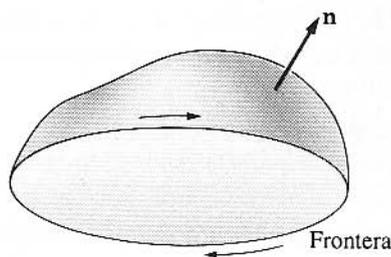
Esta notación es útil sólo en aquellos casos donde la integral es independiente del contorno C dentro de límites bastantes amplios. Si hay posibilidad de ambigüedad, conviene especificar el contorno. El enfoque básico para la evaluación de integrales de línea es obtener un parámetro de descripción de la curva y entonces usar esta descripción para expresar la integral de línea como la suma de tres integrales unidimensionales ordinarias. En todos los casos, salvo los más sencillos, éste es un procedimiento largo y tedioso. Afortunadamente, muy pocas veces es necesario evaluar las integrales de esta forma. Como veremos posteriormente, a menudo es posible demostrar que la integral de línea no depende de la trayectoria entre los extremos. En este último caso, se escoge una trayectoria sencilla para simplificar la integración.

Si \mathbf{F} es de nuevo un vector, una integral de superficie \mathbf{F} se escribe como

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (1-27)$$

FIGURA 1.5

Relación de la normal \mathbf{n} con una superficie y el sentido de recorrido en la frontera.



donde S es la superficie sobre la cual se realiza la integración, da es un área infinitesimal en S y \mathbf{n} es un vector unitario normal a da . Existe una doble ambigüedad al escoger \mathbf{n} , que se elimina al considerar que \mathbf{n} es la normal dibujada hacia afuera si S es una superficie cerrada. Si S no es cerrada y es finita, entonces tiene una frontera y el sentido de la normal es importante sólo con respecto al sentido arbitrario positivo al atravesar la frontera. El sentido positivo de la normal es la dirección hacia la cual avanzaría un tornillo de mano derecha si se girara en la dirección del sentido positivo sobre la curva limitadora, como se ilustra en la figura 1.5. La integral de superficie de \mathbf{F} sobre una superficie cerrada S se denota a veces con

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

Comentarios completamente paralelos a los que se hicieron para la integral de línea pueden hacerse para la integral de superficie. La integral de superficie es claramente un escalar; por lo general depende de la superficie S y los casos en que no depende de ella tienen particular importancia. La definición de la integral de superficie se hace de un modo exactamente comparable a la de la integral de línea. La formulación detallada se deja para la sección de problemas.

Si \mathbf{F} es un vector y ϕ un escalar, entonces las dos integrales de volumen que nos interesan son

$$J = \int_V \phi dv \quad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{F} dv \quad (1-28)$$

Evidentemente, J es un escalar y \mathbf{K} es un vector. Las definiciones de estas integrales se reducen rápidamente a la integral de Riemann en tres dimensiones, excepto que en \mathbf{K} se debe observar que hay una integral para cada componente de \mathbf{F} . Estas integrales son suficientemente conocidas, de modo que no se necesita hacer ningún otro comentario.

Otro operador importante, que esencialmente es una derivada, es el operador divergencia. La divergencia del vector \mathbf{F} , expresada como $\text{div } \mathbf{F}$, se define como sigue:

La *divergencia* de un vector es el límite de su integral de superficie por unidad de volumen a medida que el volumen encerrado por la superficie tiende a cero. Esto es

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

La divergencia es evidentemente una función escalar puntual (campo escalar), y se define en el punto límite de la superficie de integración. Esta definición anterior tiene varias propiedades: es independiente de cualquier elección especial del sistema de coordenadas y puede utilizarse para encontrar la forma explícita del operador divergencia en cualquier sistema particular de coordenadas.

En coordenadas rectangulares, el elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ proporciona una base conveniente para encontrar la forma explícita de la divergencia. Si un vértice del paralelepípedo rectangular está en el punto x_0, y_0, z_0 , entonces

$$\begin{aligned} F_x(x_0 + \Delta x, y, z) &= F_x(x_0, y, z) + \Delta x \left. \frac{\partial F_x}{\partial x} \right|_{x_0, y, z} \\ F_y(x, y_0 + \Delta y, z) &= F_y(x, y_0, z) + \Delta y \left. \frac{\partial F_y}{\partial y} \right|_{x, y_0, z} \\ F_z(x, y, z_0 + \Delta z) &= F_z(x, y, z_0) + \Delta z \left. \frac{\partial F_z}{\partial z} \right|_{x, y, z_0} \end{aligned} \quad (1-29)$$

donde los términos de orden mayor en Δx , Δy y Δz se han omitido. Puesto que el elemento de área $\Delta y \Delta z$ es perpendicular al eje x , $\Delta z \Delta x$ es perpendicular al eje y y $\Delta x \Delta y$ es perpendicular al eje z , la definición de la divergencia resulta ser

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ \int F_x(x_0, y, z) \, dy \, dz \right. \\ &\quad + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_x}{\partial x} + \int F_y(x, y_0, z) \, dx \, dz \\ &\quad + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_y}{\partial y} + \int F_z(x, y, z_0) \, dx \, dy \\ &\quad + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} - \int F_x(x_0, y, z) \, dy \, dz \\ &\quad \left. - \int F_y(x, y_0, z) \, dx \, dz - \int F_z(x, y, z_0) \, dx \, dy \right\} \end{aligned} \quad (1-30)$$

El signo menos asociado a los tres últimos términos tiene en cuenta el hecho de que la normal trazada hacia afuera está en el sentido negativo de los ejes en estos casos. El límite se toma fácilmente, y se encuentra que la divergencia en coordenadas rectangulares es

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1-31)$$

En coordenadas esféricas el procedimiento es semejante. El volumen encerrado por los incrementos de coordenadas $\Delta r, \Delta \theta, \Delta \phi$ se elige como el volumen de integración. Este volumen es $r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$. Como el área encerrada por los incrementos de coordenadas depende de los valores de las coordenadas (lo que no es el caso con coordenadas rectangulares), es mejor escribir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \Delta a$ en su forma explícita:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \Delta a &= F_r r^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi \\ &+ F_\theta r \sin \theta \Delta \phi \Delta r + F_\phi r \Delta r \Delta \theta \end{aligned} \quad (1-32)$$

A partir de esta expresión es evidente que $r^2 F_r \sin \theta$, en lugar de únicamente F_r , debe desarrollarse en serie de Taylor. De forma similar, en los otros términos debe desarrollarse el coeficiente de los productos de los incrementos de coordenadas. Haciendo estos desarrollos y empleándolos para calcular la integral de superficie en la definición de divergencia, se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (F_r r^2 \sin \theta) \Delta r \Delta \theta \Delta \phi \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta r \sin \theta) \Delta \theta \Delta r \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi r) \Delta \phi \Delta r \Delta \theta \right\} \quad (1-33) \end{aligned}$$

Tomando el límite, se encuentra que la forma explícita de la divergencia en coordenadas esféricas es

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (1-34)$$

Este método para hallar la forma explícita de la divergencia es aplicable a cualquier sistema de coordenadas siempre y cuando se conozcan las formas de los elementos de volumen y de superficie o, alternativamente, los elementos de longitud.

El significado físico de la divergencia se puede ver de inmediato en un ejemplo tomado de la mecánica de fluidos. Si \mathbf{V} es la velocidad de un fluido, dada en función de la posición, y ρ es su densidad, entonces $\oint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} da$ es evidentemente la cantidad neta de fluido por unidad de tiempo que sale del volumen encerrado por S . Si el fluido es incompresible, la integral de superficie mide la fuente total del fluido encerrado por la superficie. La definición anterior de la divergencia indica entonces que ésta puede interpretarse como el límite de la intensidad de la fuente por unidad de volumen, o la densidad de la fuente de un fluido incompresible.

Ahora puede enunciarse y demostrarse un teorema extremadamente importante en el que interviene la divergencia.

Teorema de la divergencia. La integral de la divergencia de un vector sobre un volumen V es igual a la integral de superficie de la componente normal del vector sobre la superficie que limita V . Esto es,

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

Considere que el volumen se subdivide en un gran número de pequeñas celdas. Sea ΔV_i el volumen de la i -ésima celda que está limitada por la superficie S_i . Está claro que

$$\sum_i \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (1-35)$$

donde en cada integral de la izquierda, la normal se dirige hacia afuera del volumen considerado. Puesto que el sentido hacia afuera para una celda es el sentido hacia dentro de la celda adyacente apropiada, todas las contribuciones del lado izquierdo de la ecuación (1-35) se anulan excepto aquellas que provienen de la superficie S , y la ecuación (1-35) queda esencialmente demostrada. El teorema de la divergencia se obtiene haciendo que el número de celdas se aproxime a infinito, de tal modo que el volumen de cada celda tienda a cero.

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \left\{ \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \right\} \Delta V_i \quad (1-36)$$

En el límite, la suma sobre i se convierte en una integral sobre V y la razón de la integral sobre S_i a ΔV_i se convierte en la divergencia de \mathbf{F} . Así,

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv \quad (1-37)$$

que es el teorema de la divergencia. Tendremos frecuentes ocasiones para utilizar este teorema, tanto para el desarrollo de los aspectos teóricos de electricidad y de magnetismo como para el propósito práctico de calcular integrales.

1.6

ROTACIONAL

El tercer operador diferencial de interés es el rotacional. El rotacional de un vector, denotado con $\operatorname{rot} \mathbf{F}$, se define en la forma siguiente:

El *rotacional* de un vector es el límite de la razón entre la integral de su producto vectorial con la normal trazada hacia afuera, sobre una superficie cerrada, y el volumen encerrado por la superficie cuando este volumen tiende a cero. Es decir,

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} \, da \quad (1-38)$$

La semejanza entre esta definición y la definición de la divergencia es bastante evidente; en lugar del producto escalar del vector con la normal trazada hacia afuera, se tiene el producto vectorial. Por lo demás, las definiciones son las mismas. Existe una definición distinta pero equivalente que resulta ser de mayor utilidad. Esta definición es

La componente de $\text{rot } \mathbf{F}$ en la dirección del vector unitario \mathbf{a} es el límite de una integral de línea por unidad de área, a medida que el área encerrada tiende a cero, siendo esta área perpendicular a \mathbf{a} . Esto es,

$$\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-39)$$

donde la curva C , que limita la superficie S , está en un plano normal a \mathbf{a} .

Es fácil ver la equivalencia entre las dos definiciones, considerando una curva plana C y el volumen barrido por esta curva cuando se desplaza una distancia ξ en la dirección de la normal a este plano, como se muestra en la figura 1.6. Si \mathbf{a} es una normal de este plano, entonces al tomar el producto escalar de \mathbf{a} con la primera definición del rotacional, ecuación (1-38), se tiene

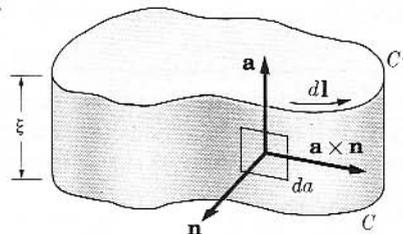
$$\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{F} da \quad (1-40)$$

Como \mathbf{a} es paralelo a la normal para toda la superficie limitadora excepto para la banda estrecha limitada por C y C' , sólo se necesita considerar la integral sobre la superficie. Para esta superficie observamos que $\mathbf{a} \times \mathbf{n} da$ es justamente $\xi d\mathbf{l}$, donde $d\mathbf{l}$ es un desplazamiento infinitesimal sobre C . Puesto que, además, $V = \xi S$, el límite de la integral de volumen es

$$\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{\xi S} \oint \xi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

FIGURA 1.6

Volumen barrido al desplazar la curva C en el sentido de su normal \mathbf{a} .



que se reduce a la segunda forma de nuestra definición al eliminar las ξ . Esta equivalencia puede demostrarse sin emplear el volumen especial utilizado aquí; sin embargo, al hacerlo de ese modo se sacrifica mucho la sencillez de la demostración dada anteriormente.

La forma del rotacional en varios sistemas coordenados puede calcularse de un modo muy parecido al que se utilizó para la divergencia. En coordenadas rectangulares es conveniente el volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$. Para la componente x del rotacional sólo contribuyen las caras perpendiculares a los ejes y y z . Si recordamos que $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$, las contribuciones que no se anulan de las caras del paralelepípedo a la componente x del rotacional dan

$$(\text{rot } \mathbf{F})_x = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \{ [-F_y(x, y, z + \Delta z) + F_y(x, y, z)] \Delta x \Delta y + [F_z(x, y + \Delta y, z) - F_z(x, y, z)] \Delta x \Delta z \} \quad (1-41)$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor y tomando el límite se tiene

$$(\text{rot } \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad (1-42)$$

para la componente x del rotacional. Las componentes y y z pueden encontrarse en una forma exactamente igual. Son

$$(\text{rot } \mathbf{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad (\text{rot } \mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (1-43)$$

La forma del rotacional en coordenadas rectangulares puede recordarse fácilmente si se observa que es justo el desarrollo de un determinante de tres por tres, es decir,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (1-44)$$

El problema de hallar la forma del rotacional en otros sistemas coordenados es sólo un poco más complicado y se deja para los ejercicios.

Como con la divergencia, nos encontramos con un teorema importante y útil en el que interviene el rotacional, conocido como teorema de Stokes.

Teorema de Stokes. La integral de línea de un vector alrededor de una curva cerrada es igual a la integral de la componente normal de su rotacional sobre cualquier superficie limitada por la curva. Esto es,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (1-45)$$

donde C es una curva cerrada que limita la superficie S .

La demostración de este teorema es bastante parecida a la demostración del teorema de la divergencia. La superficie S se divide en un gran número de celdas. La superficie de la i -ésima celda se denomina ΔS_i y la curva que la limita es C_i . Puesto que cada una de estas celdas debe recorrerse en el mismo sentido, está claro que la suma de las integrales de línea sobre C_i es justamente la integral de línea alrededor de la curva limitadora; todas las demás contribuciones se cancelan. Así pues,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Sólo falta determinar el límite a medida que el número de celdas se vuelve infinito, de tal modo que el área de cada celda tienda a cero. El resultado de este proceso de límite es

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \Delta S_i \\ &= \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \end{aligned}$$

que es el teorema de Stokes. Este teorema, como el de la divergencia, es útil tanto en el desarrollo de la teoría electromagnética como en el cálculo de integrales. Tal vez valga la pena observar que ambos teoremas, el de la divergencia y el de Stokes, son esencialmente integraciones parciales.

1.7

EL OPERADOR VECTORIAL DIFERENCIAL ∇

Introduciremos ahora una notación alternativa para los tres tipos de diferenciación vectorial que se han analizado: el gradiente, la divergencia y el rotacional. Esta notación utiliza el operador vectorial diferencial *del*, que está definido en coordenadas cartesianas por

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-46)$$

Del es un operador diferencial que se aplica solamente delante de una función de (x, y, z) , que queda diferenciada; es un vector que obedece las leyes del álgebra vectorial.* En términos de *del*, las ecuaciones (1-20), (1-31) y (1-44) se expresan como

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi,$$

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1-20)$$

* Es también un vector en términos de sus propiedades de transformación, como se muestra en el Apéndice II.

$$\text{div} = \nabla \cdot,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1-31)$$

$$\text{rot} = \nabla \times,$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (1-44)$$

Las operaciones expresadas con *del* son por sí mismas independientes de cualquier elección especial del sistema de coordenadas. Cualquiera de las identidades que pueden probarse usando la representación cartesiana es válida independientemente del sistema de coordenadas. *Del* puede expresarse en un sistema de coordenadas ortonormal no cartesiano (curvilíneo) de manera análoga a la ecuación (1-46) con los elementos de distancia apropiados, pero al aplicarlo debe recordarse que los vectores unitarios en tales sistemas coordenados son ya por sí mismos funciones de la posición y tienen que ser diferenciados.* Los importantes teoremas integrales, de acuerdo con las ecuaciones (1-19), (1-45) y (1-37), son

$$\int_{a(C)}^b \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b d\varphi = \varphi \Big|_a^b = \varphi_b - \varphi_a \quad (1-47)$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-45)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (1-37)$$

Éstas nos dan la integral de una derivada de una función en una región de n dimensiones, en términos de los valores de la propia función en la frontera de $(n - 1)$ - dimensiones de la región, para $n = 1, 2, 3$. Debido a que el operador *del* obedece las reglas del álgebra vectorial, es conveniente usarlo en los cálculos del análisis vectorial, y de ahora en adelante expresaremos el gradiente, la divergencia y el rotacional en términos de ∇ . Se observará que ∇ es un operador *lineal*

$$\nabla(a\varphi + b\psi) = a\nabla\varphi + b\nabla\psi$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$$

$$\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$$

si a y b son escalares constantes.

* Pueden encontrarse resultados para coordenadas cilíndricas y esféricas en el apéndice IV. Un análisis elemental se debe a H. T. Yang, *American Journal of Physics*, vol. 40, pág. 109, 1972.

1.8 DESARROLLOS POSTERIORES

Las operaciones del gradiente, la divergencia o el rotacional pueden repetirse en clases adecuadas de campos. Por ejemplo, tiene sentido tomar la divergencia del gradiente de un campo escalar. En realidad, esta operación combinada es tan importante que tiene un nombre especial, el *laplaciano*. Sin embargo, no tiene sentido tomar el rotacional de la divergencia de un campo vectorial debido a que esto implica tomar el rotacional de un escalar, lo cual no está definido. Hay un total de cinco operadores de segundo orden que tienen sentido, y dos de éstos dan cero. No obstante, los cinco son muy importantes en el estudio de campos electromagnéticos.

El primero de ellos es el *operador laplaciano*, que se define como la divergencia del gradiente de un campo escalar, y que generalmente se escribe como ∇^2 ,

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

En coordenadas rectangulares,

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1-48)$$

Este operador es de gran importancia en electrostática y se estudiará con detalle en el capítulo 3.

El rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es cero. Este enunciado se verifica con mayor facilidad al expresarlo en coordenadas rectangulares. Si el campo escalar es φ , entonces

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \dots = 0 \quad (1-49)$$

lo que verifica el enunciado original. En términos del operador,

$$\nabla \times \nabla = 0$$

La divergencia de cualquier rotacional es también cero. Este resultado se verifica directamente en coordenadas rectangulares al escribir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (1-50)$$

Las otras dos posibles operaciones de segundo orden son tomar el rotacional del rotacional o el gradiente de la divergencia de un campo vectorial. Se deja como ejercicio demostrar que en coordenadas rectangulares

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (1-51)$$

donde el laplaciano de un vector es el vector cuyas componentes rectangulares son los laplacianos de las componentes rectangulares del vector original. En cualquier otro sistema coordenado que no sea rectangular, el laplaciano de un vector está *definido* por la ecuación (1-51).

Otra forma de ampliar la aplicación de los operadores vectoriales diferenciales es aplicarlos a diferentes productos entre vectores y escalares. Las seis combinaciones posibles de productos y operadores diferenciales se encuentran en la tabla 1.1. Estas identidades pueden verificarse fácilmente en coordenadas rectangulares, lo cual es suficiente para asegurar su validez en cualquier sistema de coordenadas. Una derivada de un producto de más de dos funciones, o una derivada de orden superior al segundo, puede calcularse mediante aplicaciones repetidas de las identidades de la tabla 1.1, que es, por tanto, exhaustiva. Las fórmulas pueden recordarse fácilmente a partir de las reglas del álgebra vectorial y la diferenciación ordinaria. La única ambigüedad posible se encuentra en la identidad (1.1.6), en la que aparece $\mathbf{F} \cdot \nabla$ (no $\nabla \cdot \mathbf{F}$).

Algunos tipos particulares de funciones aparecen con tanta frecuencia en la teoría electromagnética que merece la pena mencionar ahora sus diversas derivadas. Para la función $\mathbf{F} = \mathbf{r}$,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 \\ \nabla \times \mathbf{r} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{r} &= \mathbf{G} \\ \nabla^2 \mathbf{r} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1-52)$$

Para una función que sólo depende de la distancia $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

TABLA 1.1

Identidades del vector diferencial

$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$	(1.1.1)
$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$	(1.1.2)
$\nabla \times \nabla \varphi = 0$	(1.1.3)
$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$	(1.1.4)
$\nabla(\varphi \psi) = (\nabla \varphi)\psi + \varphi \nabla \psi$	(1.1.5)
$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})$	(1.1.6)
$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}$	(1.1.7)
$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$	(1.1.8)
$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{F} + \varphi \nabla \times \mathbf{F}$	(1.1.9)
$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$	(1.1.10)

$$\varphi(\mathbf{r}) \text{ or } \mathbf{F}(\mathbf{r}): \quad \nabla = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr} \quad (1-53)$$

Para una función que depende del argumento escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$, donde \mathbf{A} es un vector constante,

$$\varphi(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \text{ or } \mathbf{F}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}): \quad \nabla = \mathbf{A} \frac{d}{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})} \quad (1-54)$$

Para una función que depende del argumento $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, donde \mathbf{r}' se considera una constante,

$$\nabla = \nabla_{\mathbf{R}} \quad (1-55)$$

$$\nabla_{\mathbf{R}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial Z}$$

donde $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$. Si \mathbf{r} es considerada una constante, entonces tendremos

$$\nabla = -\nabla' \quad (1-56)$$

donde

$$\nabla' = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z'}$$

Hay varias posibilidades para la ampliación del teorema de la divergencia y del teorema de Stokes. La más interesante de éstas es el teorema de Green, que es

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dv = \oint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} da \quad (1-57)$$

Este teorema se obtiene de la aplicación del teorema de la divergencia al vector

$$\mathbf{F} = \psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi$$

TABLA 1.2

Teoremas de integrales vectoriales

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \varphi da = \oint_C \varphi d\mathbf{l} \quad (1.2.1)$$

$$\int_V \nabla \varphi dv = \oint_S \varphi \mathbf{n} da \quad (1.2.2)$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} da \quad (1.2.3)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}) da \quad (1.2.4)$$

Utilizando esta \mathbf{F} en el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_V \nabla \cdot [\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi] dv = \oint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} da \quad (1-58)$$

Empleando la identidad para la divergencia de un escalar por un vector (tabla 1.1) se tiene

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) - \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \quad (1-59)$$

Al combinar (1-58) y (1-59) se obtiene el teorema de Green. Algunos otros teoremas figuran en la tabla 1.2.

Esto concluye nuestra breve exposición del análisis vectorial. Por razones de brevedad, las demostraciones de muchos resultados se han dejado como ejercicios. No se ha hecho ningún intento para lograr un alto grado de rigor. Todo el enfoque se ha basado únicamente en la utilidad. Lo que hemos desarrollado es lo que necesitaremos; todo lo demás se ha omitido.

 1.9

RESUMEN

Pueden expresarse tres diferentes clases de diferenciación vectorial mediante el **operador vectorial diferencial del ∇** , a saber, el gradiente, la divergencia y el rotacional:

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Del es un operador lineal. Su aplicación repetida o su aplicación a productos de funciones, produce fórmulas que pueden obtenerse en coordenadas rectangulares, pero que son independientes del sistema de coordenadas. Estas fórmulas pueden recordarse mediante las reglas del álgebra vectorial y de la diferenciación ordinaria. Vale la pena conservar en la memoria las derivadas de algunas funciones especiales. Los **teoremas integrales** más importantes acerca de las derivadas son

$$\int_a^b \int_{(C)} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \varphi \Big|_a^b$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (\text{teorema de la divergencia})$$

Éstas son generalizaciones del teorema fundamental del cálculo.

PROBLEMAS

- 1.1 Los vectores desde el origen a los puntos A, B, C, D son

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{k} - \mathbf{j}$$

Demuestre que las rectas \overline{AB} y \overline{CD} son paralelas y encuentre la razón entre sus magnitudes.

- 1.2 Demuestre que los siguientes vectores son perpendiculares:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

- 1.3 Demuestre que los siguientes vectores constituyen los lados de un triángulo rectángulo:

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \quad \mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

1.4 Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$ e interpretando el resultado geoméricamente, demuestre la "ley de los cosenos".

1.5 (a) Demuestre que los siguientes vectores son unitarios en el plano xy y que forman ángulos α, β con el eje x :

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha \quad \mathbf{B} = \mathbf{i} \cos \beta + \mathbf{j} \sin \beta$$

(b) Por medio de un producto escalar, obtenga la fórmula para $\cos(\alpha - \beta)$.

1.6 Si \mathbf{A} es un vector constante y \mathbf{r} es el vector desde el origen al punto (x, y, z) , demuestre que la siguiente es la ecuación de un plano:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = 0$$

1.7 Con \mathbf{A} y \mathbf{r} definidos como en el problema 1.6, demuestre que la siguiente es la ecuación de una esfera:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r} = 0$$

1.8 Usando el producto punto, encuentre el coseno del ángulo entre la diagonal interna de un cubo y una de las aristas de éste.

1.9 Demuestre la ley de los senos para un triángulo mediante el uso del producto cruz de un vector con $\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B}$.

1.10 Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ son vectores desde el origen a los puntos A, B, C , demuestre que es perpendicular al plano ABC .

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

Electrostática

En este capítulo se introduce el tema de la electricidad con los conceptos empíricos de carga y de la ley de fuerzas entre cargas (ley de Coulomb). Utilizaremos las herramientas matemáticas del capítulo 1 para representar la ley de Coulomb con otras expresiones más poderosas: la expresión del potencial eléctrico y la ley de Gauss; ambas serán de mucha importancia en desarrollos posteriores de este tema.

2.1

CARGA ELÉCTRICA

La primera observación de la electrización de objetos por frotamiento se pierde en la antigüedad; sin embargo, es muy sabido que al frotar un peine de ebonita con un pedazo de lana, el peine adquiere la capacidad de levantar pequeños pedacitos de papel. Como resultado de frotar los dos objetos (hablando estrictamente, como consecuencia de ponerlos en contacto), tanto la ebonita como la lana adquieren una nueva propiedad: se *cargan*. Este experimento sirve para introducir el concepto de *carga*. Pero la carga, en sí misma, no se crea durante este proceso; la carga total, o sea, la suma de las cargas de los dos cuerpos, es todavía la misma que antes de la electrización. A la luz de la física moderna sabemos que las partículas microscópicas cargadas, específicamente los electrones, se transportan de la lana a la ebonita dejando la lana cargada positivamente y el peine de ebonita cargado negativamente.

La carga es una propiedad fundamental y característica de las partículas elementales que forman la materia. De hecho, toda la materia se compone fundamentalmente de protones, neutrones y electrones, y dos de estas partículas tienen carga. Pero aun cuando a escala microscópica la materia se componga de un gran número de partículas cargadas, las potentes fuerzas eléctricas asociadas con estas partículas quedan bastante ocultas a una observación macroscópica. El motivo es que hay dos clases de carga,

positiva y negativa, y un fragmento cualquiera de materia contiene aproximadamente cantidades iguales de cada clase. Desde el punto de vista macroscópico, entonces, la carga se refiere a la carga neta, o al exceso de carga. Cuando decimos que un objeto está cargado, lo que queremos decir es que tiene un exceso de carga, ya sea un exceso de electrones (negativa) o un exceso de protones (positiva). En este capítulo y en los siguientes, la carga se representará generalmente con el símbolo q .

Es un hecho experimental que la carga no puede crearse ni destruirse. La carga total de un sistema cerrado no puede cambiar. Desde el punto de vista macroscópico, las cargas pueden reagruparse y combinarse en distintas formas; sin embargo, podemos establecer que en un sistema cerrado la carga neta se conserva.

2.2

LEY DE COULOMB

Hacia finales del siglo XVIII las técnicas de la ciencia experimental lograron suficiente perfeccionamiento como para hacer posible observaciones refinadas de las fuerzas entre cargas eléctricas. Los resultados de estas observaciones, que eran extremadamente controvertidas en aquella época, pueden resumirse en tres principios:

1. Hay dos y sólo dos clases de carga eléctrica, conocidas ahora como positiva y negativa.
2. Dos cargas puntuales ejercen entre sí fuerzas que actúan a lo largo de la línea que las une y que son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que las separa.
3. Estas fuerzas son también proporcionales al producto de las cargas, son repulsivas para cargas iguales, y atractivas para cargas contrarias.

Los dos últimos principios, con el primero como preámbulo, se conocen como *ley de Coulomb* en honor a Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), quien fue uno de los principales estudiosos de la electricidad en el siglo XVIII.

La ley de Coulomb para cargas puntuales puede formularse concisamente con la notación vectorial del capítulo 1 como

$$\mathbf{F}_1 = C_u \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (2-1)$$

donde \mathbf{F}_1 es la fuerza sobre la carga q_1 , \mathbf{r}_{12} es el vector que va de q_1 a q_2 , r_{12} es la magnitud de \mathbf{r}_{12} y C_u es la constante de proporcionalidad de la que se hablará posteriormente. En la ecuación (2-1) se ha formado un vector unitario en la dirección de \mathbf{r}_{12} al dividir \mathbf{r}_{12} por su magnitud, artificio que se utilizará frecuentemente. Si ha de hallarse la fuerza sobre q_2 , sólo es necesario cambiar cada subíndice 1 por 2 y 2 por 1. Entender

esta notación es importante, puesto que más tarde proporcionará una técnica para seguir el rastro de las variables del campo y de la fuente. La figura 2.1 muestra el vector \mathbf{r}_{12} con respecto a un origen arbitrario O .

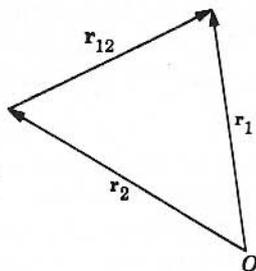
La ley de Coulomb se aplica a cargas puntuales. En el sentido macroscópico, una "carga puntual" es aquella cuyas dimensiones espaciales son muy pequeñas en comparación con cualquier otra longitud relativa al problema en consideración; utilizaremos el término "carga puntual" en este sentido. Hasta donde sabemos, la ley de Coulomb también se aplica a las interacciones de partículas atómicas tales como protones y electrones. La ecuación (2-1) es válida para la repulsión electrostática entre núcleos a distancias mayores que 10^{-14} metros; a distancias menores dominan el panorama las fuerzas nucleares, poderosas pero de corto alcance.

La ecuación (2-1) es una ley experimental. Sin embargo, pruebas teóricas y experimentales indican que la ley del inverso de los cuadrados es exacta, es decir, que el exponente de r_{12} es exactamente 2. Mediante un experimento indirecto* se ha demostrado que el exponente de r_{12} puede diferir de 2 en no más de una parte en 10^{15} .

La constante C_u de la ecuación (2-1) requiere algún comentario, ya que con ella se determina el sistema de unidades. Las unidades de fuerza y distancia son presumiblemente las mismas que pertenecen a uno de los sistemas empleados en mecánica; el procedimiento más directo en este caso sería fijar $C_u = 1$, y elegir la unidad de carga de tal forma que la ecuación (2-1) concuerde con el experimento. Éste es el procedimiento adoptado por el sistema gaussiano de unidades. También son posibles otros procedimientos y pueden tener ciertas ventajas; por ejemplo, se puede especificar por anticipado la unidad de carga. Giorgi demostró en 1901 que todas las unidades eléctricas comunes, tales como el ampere, el volt, el ohm, el henry, etc., pueden combinarse con uno de los sistemas mecánicos, llamado mks (sistema

FIGURA 2.1

El vector \mathbf{r}_{12} se extiende desde el punto que señala la punta del vector \mathbf{r}_2 hasta el punto que señala la punta del vector \mathbf{r}_1 . Obviamente, $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$.



* E. R. Williams, J. E. Faller y H. A. Hill, *Physical Review Letters*, vol. 26, pág. 721, 1971. Experimentos similares se realizaron anteriormente. Maxwell estableció el exponente de 2 hasta una parte en 20,000.

metro-kilogramo-segundo), con el fin de formar un sistema de unidades para todos los problemas eléctricos y magnéticos. Una ventaja de este sistema es que los resultados de los cálculos de circuitos eléctricos se expresan en las mismas unidades eléctricas que se emplean en el laboratorio. En este texto utilizaremos el sistema de unidades mks racionalizado o *sistema de Giorgi* de unidades en la forma conocida como SI (*Sistema Internacional*). Como en este sistema q se mide en coulombs (C), r en metros y F en newtons (N), C_u debe tener las dimensiones de newtons metros² por coulomb².

La magnitud de la unidad SI de carga, el coulomb, se establece a partir de experimentos magnéticos. Esta elección de unidades hace que $C_u = 8.9874 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. * Para simplificar otras ecuaciones hacemos la aparentemente complicada sustitución $C_u = 1/4\pi\epsilon_0$. La constante ϵ_0 , que aparecerá repetidamente, se conoce como *permitividad del espacio libre* y numéricamente es igual a $8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$.

En el sistema mks, la *ley de Coulomb* para las fuerzas entre dos cargas puntuales puede escribirse, por tanto, como

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2-1a)$$

En el Apéndice III, las definiciones de coulomb, ampere, permeabilidad y permitividad del espacio libre se relacionan entre sí y con la velocidad de la luz en una forma lógica; puesto que una formulación lógica de estas definiciones requiere conocimientos de los fenómenos magnéticos y de la propagación de ondas electromagnéticas, no es apropiado presentarlas ahora. En el Apéndice III se analizan las unidades del sistema gaussiano. Hasta el capítulo 4, toda fórmula puede cambiarse a unidades gaussianas simplemente sustituyendo ϵ_0 por $1/4\pi$.

Si se tienen más de dos cargas puntuales, las fuerzas mutuas se determinan por la aplicación repetida de la ecuación (2-1). En particular, si se considera un sistema de N cargas, la fuerza sobre la i -ésima carga está dada por

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (2-2)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$$

* El valor aproximado de $C_u \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ es quizá más fácil de recordar.

donde la sumatoria de la derecha se extiende a todas las cargas excepto a la i -ésima. La ecuación (2-2) es el principio de superposición de fuerzas, que dice que la fuerza total que actúa sobre un cuerpo es la suma vectorial de las fuerzas individuales que actúan sobre él.

Una sencilla extensión de la idea de la interacción entre N cargas puntuales es la interacción de una carga puntual con una distribución continua de cargas. Hemos escogido esta configuración deliberadamente para evitar algunas dificultades que pueden encontrarse cuando se considera la interacción de dos distribuciones continuas de carga.

Antes de continuar, debe examinarse el significado de una distribución continua de carga. Es bien sabido que la carga eléctrica se encuentra en múltiplos de una carga básica, la del electrón. En otras palabras, si se examina una carga detalladamente, se verá que su magnitud es un múltiplo entero de la magnitud de la carga electrónica. Para los propósitos de la física macroscópica, el que la carga sea discreta no ocasiona dificultades, simplemente porque la carga electrónica tiene una magnitud de 1.6019×10^{-19} C, que es extremadamente pequeña. La pequeñez de la unidad básica significa que las cargas macroscópicas se componen invariablemente de un número muy grande de cargas electrónicas; esto a su vez significa que en una distribución macroscópica de carga, cualquier elemento pequeño de volumen contiene un gran número de electrones.

Podemos describir entonces una distribución de carga en términos de una función de densidad de carga, definida como el límite de la carga por unidad de volumen a medida que el volumen se vuelve infinitesimal. Sin embargo, debe tenerse cuidado al aplicar esta clase de descripción a problemas atómicos, puesto que en estos casos sólo interviene un pequeño número de electrones y el procedimiento de tomar el límite no tiene sentido. Dejando a un lado estos casos atómicos, podemos proceder como si una porción de carga pudiese subdividirse indefinidamente. Por tanto, describimos la distribución de carga mediante funciones puntuales.

Una densidad volumétrica de carga está definida por

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (2-3)$$

y una densidad de carga superficial está definida por

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (2-4)$$

De lo que se ha dicho con respecto a q , es evidente que ρ y σ son densidades de carga neta o excesos de carga. Vale la pena mencionar que en materiales sólidos típicos incluso una densidad muy grande de carga ρ implicará una variación en la densidad local de electrones de sólo una parte en 10^9 .

Si la carga se distribuye en un volumen V con una densidad ρ y sobre una superficie S que limita a V con una densidad σ , entonces la fuerza ejercida por esta

distribución de carga sobre una carga puntual q , situada en \mathbf{r} , se obtiene de la ecuación (2-2) sustituyendo q_j por $\rho_j dv_j$ (o por $\sigma_j da_j$) y procediendo luego a obtener el límite:

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (2-5)$$

La variable \mathbf{r}' se usa para localizar un punto dentro de la distribución de carga, esto es, juega el papel del punto fuente \mathbf{r}_j en la ecuación (2-2). Puede parecer a primera vista que si el punto \mathbf{r} cae dentro de la distribución de carga, la primera integral de la ecuación (2-5) divergirá, pero no es así. La región de integración en la vecindad de \mathbf{r} contribuye en una cantidad despreciable y la integral tiene buen comportamiento (véase el problema 2.5).

Está claro que la fuerza sobre q , como se presenta en la ecuación (2-5), es proporcional a q , y lo mismo es válido en la ecuación (2-2). Esta observación nos conduce a introducir un campo vectorial que es independiente de q , la llamada fuerza por unidad de carga. Este campo vectorial, conocido como campo eléctrico, se estudia con detalle en la siguiente sección.

2.3 EL CAMPO ELÉCTRICO

El *campo eléctrico* en un punto se define operacionalmente como el límite de la fuerza sobre una carga de prueba colocada en el punto con respecto a la carga de la carga de prueba, tomándose el límite a medida que la magnitud de la carga de prueba tiende a cero. El símbolo que se acostumbra emplear para el campo eléctrico es \mathbf{E} .

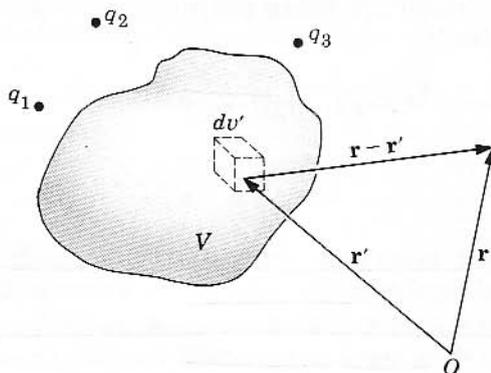
En notación vectorial, la definición de \mathbf{E} se convierte en

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_q}{q} \quad (2-6)$$

El proceso del límite se incluye en la definición de \mathbf{E} para asegurar que la carga de prueba no afecte la distribución de carga que produce \mathbf{E} . Si, por ejemplo, se distribuye carga positiva sobre la superficie de un conductor (un conductor es un material en el que la carga puede moverse libremente), entonces al acercar una carga de prueba a la vecindad del conductor, la carga sobre el conductor se redistribuirá. Si el campo eléctrico se hubiera calculado utilizando la razón de fuerza a carga para una carga de prueba finita, el campo obtenido sería el debido a la carga redistribuida y no el debido a la distribución original de carga.

FIGURA 2.2

Geometría de \mathbf{r} , \mathbf{r}' y $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. El vector \mathbf{r} define el punto de observación (punto del campo) y \mathbf{r}' se extiende sobre la distribución de carga total, incluyendo las cargas puntuales.



En el caso especial en que una de las cargas de la distribución de carga puede usarse como carga de prueba, no es necesario tomar el límite. En este caso, el campo eléctrico en la posición de la carga de prueba será el producido por todo el resto de la distribución de carga. No habrá redistribución de carga, ya que la distribución apropiada de carga se obtiene bajo la influencia de la distribución de carga total, incluida la carga que se está empleando como carga de prueba. En algunos otros casos, particularmente en aquellos en que la distribución de carga está *especificada*, la fuerza será proporcional a la magnitud de la carga de prueba. En esos casos, también resulta innecesario el límite; sin embargo, si existe alguna duda, es más seguro emplear siempre el proceso del límite.

Las ecuaciones (2-2) y (2-5) proporcionan formas sencillas de obtener una expresión del campo eléctrico debido a una distribución de carga dada (véase la Fig. 2.2). Sea una distribución de carga tal que consista en N cargas puntuales, q_1, q_2, \dots, q_N , localizadas en los puntos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, respectivamente, y una distribución volumétrica de carga especificada por la densidad de carga $\rho(\mathbf{r}')$ en el volumen V y una distribución superficial caracterizada por la densidad superficial de carga $\sigma(\mathbf{r}')$ sobre la superficie S . Si una carga de prueba q se encuentra en el punto \mathbf{r} , experimenta una fuerza \mathbf{F} dada por

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (2-7)$$

debida a la distribución de carga dada. El campo eléctrico en \mathbf{r} es el límite de la razón entre esta fuerza y la carga de prueba q . Como la relación es independiente de q , el campo eléctrico en \mathbf{r} es sólo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (2-8)$$

La ecuación (2-8) es muy general; en la mayoría de los casos no se necesitarán todos los términos.

La cantidad que acabamos de definir, el campo eléctrico, puede calcularse en cada punto del espacio en la vecindad de un sistema de cargas o de una distribución de carga. De este modo, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ es una función vectorial puntual, o un campo vectorial. Este campo tiene muchas propiedades matemáticas interesantes que desarrollaremos en las siguientes secciones y en el siguiente capítulo. Como una ayuda para visualizar la estructura del campo eléctrico asociado con una distribución de carga particular, Michael Faraday (1791-1867) introdujo el concepto de *líneas de fuerza*. Una línea de fuerza es una línea imaginaria (o curva) dibujada de tal manera que su dirección (o tangente) en cualquier punto es la dirección del campo eléctrico en dicho punto.

Considere, por ejemplo, la estructura del campo eléctrico asociado con una sola carga puntual positiva q_1 . Las líneas de fuerza son líneas radiales que se dirigen hacia afuera de q_1 . De modo semejante, las líneas de fuerza asociadas con una carga puntual negativa aislada también son radiales, pero esta vez el sentido es hacia dentro (es decir, hacia la carga negativa). Estos dos ejemplos son extremadamente sencillos, pero ilustran una propiedad importante de las líneas de campo: las líneas de fuerza terminan en las fuentes del campo eléctrico, es decir, en las cargas que producen el campo eléctrico.

La figura 2.3 ilustra varios campos eléctricos sencillos que se han trazado con la ayuda de líneas de fuerza.

2.4

EL POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Como se observó en el capítulo 1, si el rotacional de un vector se anula, entonces el vector puede expresarse como el gradiente de un escalar. El campo eléctrico dado por la ecuación (2-8) satisface este criterio. Observemos que tomar el rotacional de la ecuación (2-8) implica la derivación con respecto a r . Esta variable aparece en la ecuación sólo en funciones de la forma $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ y, por tanto, será suficiente demostrar que las funciones de esta forma tienen un rotacional cero. Utilizando la fórmula de la tabla 1.1 para el rotacional del producto (vector por escalar) se tiene

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \times [\mathbf{r} - \mathbf{r}']$$

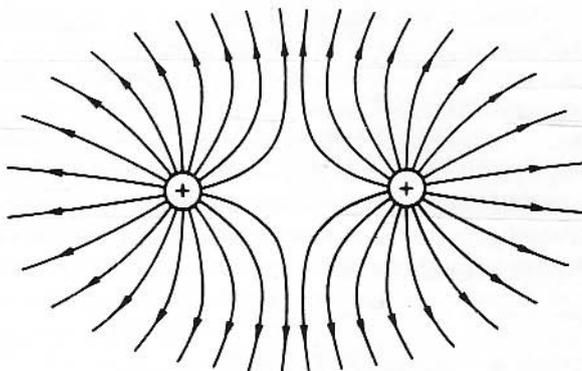
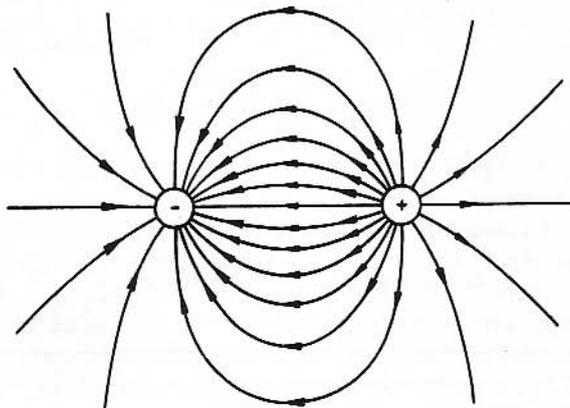
$$\vec{\nabla} \times (\psi \vec{F}) = \vec{\nabla} \psi \times \vec{F} + \psi \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (2-9)$$

Un cálculo directo (véase el problema 1.19) demuestra que

$$\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0 \quad (2-10)$$

FIGURA 2.3

Trazado de un campo eléctrico con ayuda de líneas de fuerza.



y (véase el problema 1.22) que

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \quad (2-11)$$

Estos resultados, junto con la observación de que el producto vectorial de un vector por un vector paralelo es cero, son suficientes para demostrar que

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad (2-12)$$

Como cada contribución de la ecuación (2-8) al campo eléctrico es de esta forma, hemos demostrado que el rotacional del campo eléctrico es cero. La ecuación (2-12) indica que existe una función escalar cuyo gradiente es el campo eléctrico. Esto es, sabemos ahora que existe una función que satisface

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (2-13)$$

pero aún tenemos que hallar la forma de la función φ . Deberá observarse que por convenio se incluye el signo menos en la ecuación (2-13) y que a φ se le llama potencial electrostático.

El potencial electrostático debido a una carga puntual q_1 es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (2-14)$$

lo que se verifica mediante derivación directa. Por tanto, el potencial que corresponde al campo eléctrico de la ecuación (2-8) es

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \end{aligned} \quad (2-15)$$

lo que también se verifica fácilmente por derivación directa.

Puede parecer que las ecuaciones (2-14) y (2-15) se obtuvieron de modo arbitrario. Sin embargo, puesto que todo lo que se exige de φ es que satisfaga (2-13), y como esto ya se ha verificado directamente, el medio por el cual se ha obtenido φ no importa.

El potencial electrostático φ puede obtenerse directamente tan pronto como se establezca su existencia. Puesto que se sabe que existe φ , podemos escribir

$$\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}' \quad (2-16)$$

donde ref indica un punto de referencia en el que φ es cero. De la definición de gradiente,

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}' = d\varphi \quad (2-17)$$

Al sustituir (2-17) en la ecuación (2-16), ésta se convierte en la integral de una diferencial perfecta, que se resuelve fácilmente. El resultado es

$$- \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}' = -\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (2-18)$$

que es realmente la inversa de la ecuación (2-13). Si el campo eléctrico debido a una carga puntual se utiliza en la ecuación (2-18) y el punto de referencia, o límite inferior de la integral, se considera en el infinito, siendo ahí el potencial cero, el resultado es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2-19)$$

Este resultado es sólo un caso especial de la ecuación (2-14), es decir, el caso en el que \mathbf{r}_1 es cero. Este proceso puede ampliarse para obtener la ecuación (2-15); sin embargo, el procedimiento es demasiado engorroso para incluirlo aquí.

Otro aspecto interesante y útil del potencial electrostático es su semejanza con la energía potencial asociada con la fuerza electrostática conservativa. La energía potencial asociada con una fuerza conservativa arbitraria es

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (2-20)$$

donde $U(\mathbf{r})$ es la energía potencial en \mathbf{r} con respecto al punto de referencia en que la energía potencial se considera arbitrariamente cero. Como en el caso electrostático $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, se sigue que si se escoge el mismo punto de referencia para el potencial electrostático y para la energía potencial, entonces el potencial electrostático es sólo la energía potencial por unidad de carga. Esta idea se utiliza a veces para presentar el potencial electrostático; sin embargo, creemos que la presentación por medio de la ecuación (2-13) resalta la importancia del potencial electrostático al determinar el campo electrostático. Por supuesto, no hay duda acerca de la equivalencia de los dos enfoques.

La utilidad del potencial electrostático al calcular campos eléctricos puede verse al comparar las ecuaciones (2-8) y (2-15). La ecuación (2-8) es una ecuación vectorial; para obtener el campo eléctrico a partir de ella es necesario evaluar tres sumas o tres integrales para cada término. En el mejor de los casos, éste es un procedimiento tedioso; en otros, es casi imposible integrar. La ecuación (2-15), en cambio, es una ecuación escalar e implica sólo una suma o integral por término. Además, los denominadores que aparecen en esta ecuación son todos de la forma $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, lo que hace que las integrales sean mucho más sencillas que las de la ecuación (2-8). Esta simplificación a veces es suficiente para establecer la diferencia entre tener o no tener que efectuar las integrales. Puede objetarse que después de hacer las integrales de la ecuación (2-15) es aún necesario derivar el resultado; esta objeción se elimina de inmediato observando que la derivación siempre puede llevarse a cabo si existen las derivadas, y, de hecho, por lo general, es mucho más fácil que la integración. En el capítulo 3 se verá que el potencial electrostático es aún más importante en aquellos problemas en los que no se especifica la distribución de carga, sino que ésta debe determinarse durante la resolución del problema.

En el sistema mks, la unidad de energía es el newton-metro o joule. La unidad de potencial es el joule/coulomb, pero esta unidad se presenta tan frecuentemente que se le da el nombre especial de volt (V). La unidad del campo eléctrico es el newton/coulomb o el volt/metro.

2.5

CONDUCTORES Y AISLANTES

Según su comportamiento eléctrico, los materiales pueden dividirse en dos categorías: conductores de electricidad y aislantes (dieléctricos). Los *conductores* son sustancias, como los metales, que contienen esencialmente un gran número de portadores de carga libre. Estos portadores de carga (electrones en la mayoría de

los casos) tienen la libertad de moverse por todo el material conductor; responden a campos eléctricos casi infinitesimales y continúan su movimiento mientras experimenten un campo. Estos portadores libres llevan la corriente eléctrica cuando se mantiene un campo eléctrico estable en el conductor mediante una fuente externa de energía.

Los *dieléctricos* son sustancias en las que todas las partículas cargadas están ligadas muy fuertemente a las moléculas constituyentes. Las partículas cargadas pueden cambiar sus posiciones ligeramente como respuesta a un campo eléctrico, pero no se alejan de la vecindad de sus moléculas. Hablando estrictamente, esta definición se aplica a un dieléctrico ideal, esto es, aquel que no muestra conductividad en presencia de un campo eléctrico mantenido exteriormente. Los dieléctricos físicos reales pueden mostrar una débil conductividad, pero en un dieléctrico típico la conductividad es 10^{20} veces menor que la de un buen conductor. Como 10^{20} es un factor tremendo, por lo general es suficiente decir que los dieléctricos no son conductores.

Ciertos materiales (semiconductores, electrólitos) tienen propiedades eléctricas intermedias entre los conductores y los dieléctricos. En lo que respecta a su comportamiento en un campo eléctrico estático, estos materiales se comportan casi como los conductores. Sin embargo, su respuesta transitoria es algo más lenta (es decir, estos materiales necesitan más tiempo para alcanzar el equilibrio en un campo estático).

En este capítulo y en los cuatro siguientes trataremos con materiales en campos *electrostáticos*. La polarización dieléctrica, aunque sea un fenómeno básicamente sencillo, produce efectos más bien complicados; en consecuencia pospondremos su estudio hasta el capítulo 4. Por otra parte, los conductores pueden estudiarse con bastante facilidad en términos de los conceptos que ya hemos desarrollado.

Como la carga puede moverse libremente en un conductor, aun bajo la influencia de campos eléctricos muy pequeños, los portadores de carga (electrones o iones) se mueven hasta que encuentran posiciones en las que no experimentan fuerza neta. Cuando llegan al reposo, el interior del conductor debe ser una región donde no existe campo eléctrico; esto debe suceder ya que la población de portadores de carga en el interior del conductor de ningún modo puede agotarse y, si persistiera un campo, los portadores continuarían moviéndose. *Así pues, en condiciones estáticas, el campo eléctrico en un conductor se anula. Además, puesto que $\mathbf{E} = 0$ en un conductor, el potencial es el mismo en todos los puntos del material conductor.* En otras palabras, *en condiciones estáticas, cada conductor forma una región equipotencial del espacio.*

Existe una importante relación entre la integral de la componente normal del campo eléctrico sobre una superficie cerrada y la carga total encerrada por la superficie. Esta relación, conocida como ley de Gauss, se analizará ahora con más detalle. El campo eléctrico en el punto \mathbf{r} debido a una carga puntual q situada en el origen es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2-21)$$

Considere la integral de superficie de la componente normal de este campo eléctrico sobre una superficie cerrada (como la que se muestra en la Fig. 2.4) que encierra el origen y, en consecuencia, a la carga q :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \, da \quad (2-22)$$

La cantidad $(\mathbf{r}/r) \cdot \mathbf{n} \, da$ es la proyección de da en un plano perpendicular a \mathbf{r} . Esta área proyectada, dividida por r^2 , es el ángulo sólido subtendido por da , que se expresa con $d\Omega$. De la figura 2.5 está claro que el ángulo sólido subtendido por da es el mismo que el subtendido por da' , un elemento del área superficial de la esfera S' cuyo centro está en el origen y cuyo radio es r' . Es posible entonces escribir

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \, da = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{r'^3} \, da' = 4\pi$$

lo cual demuestra que

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2-23)$$

en el caso especial descrito antes. Si q está fuera de S , se ve en la figura 2.6 que S puede dividirse en dos áreas, S_1 y S_2 , cada una de las cuales subtiende el mismo ángulo sólido con respecto a la carga q . Sin embargo, para S_2 el sentido de la normal es hacia q , mientras que para S_1 es alejándose de q . Por consiguiente, las contribuciones de S_1 y S_2 a la integral de superficie son iguales y opuestas, y la integral total se anula. Así pues, si la superficie rodea la carga puntual q , la integral de superficie de la componente normal del campo eléctrico es q/ϵ_0 , mientras que si q está fuera de la superficie, la integral de superficie es cero. El enunciado anterior se aplica a cualquier superficie cerrada, aun a las llamadas reentrantes. El estudio de la figura 2.7 es suficiente para verificar que, en efecto, así es.

Si varias cargas puntuales q_1, q_2, \dots, q_N están encerradas por la superficie S , entonces el campo eléctrico total está dado por el primer miembro de la ecuación (2-8). Cada carga subtiende un ángulo sólido completo (4π), por lo que la ecuación (2-23) se convierte en

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \quad (2-24)$$

FIGURA 2.4

Superficie cerrada imaginaria S que encierra una carga puntual en el origen.

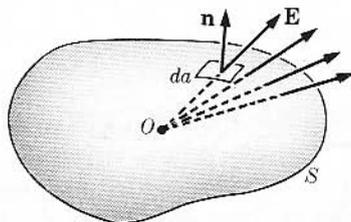
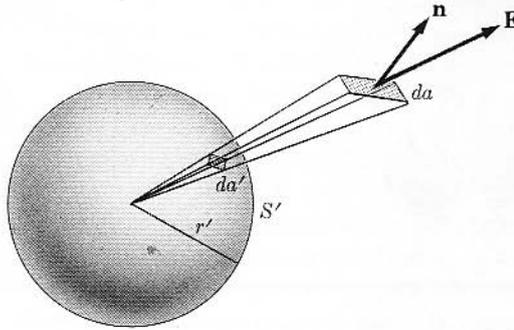


FIGURA 2.5

Construcción de la superficie esférica S' como ayuda para la evaluación del ángulo sólido subtendido por da .



Este resultado puede generalizarse de inmediato al caso de una distribución de carga continua caracterizada por una densidad de carga. Si cada elemento de carga ρdv se considera como una carga puntual, ésta contribuye con $\rho dv/\epsilon_0$ a la integral de superficie de la componente normal del campo eléctrico, siempre que esté dentro de la superficie sobre la cual estamos integrando. La integral de superficie total es entonces la suma de todas las contribuciones de esta forma debidas a la carga que está dentro de la superficie.

El miembro de la izquierda, la integral de la componente normal del campo eléctrico sobre la superficie S , se llama a veces *flujo* del campo eléctrico a través de S .

Si S es una superficie cerrada que limita el volumen V ,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \quad (2-25)$$

lo que se conoce como ley de Gauss.

FIGURA 2.6

Superficie cerrada S dividida en dos superficies, S_1 y S_2 , cada una de las cuales subtende el mismo ángulo sólido con respecto a q .

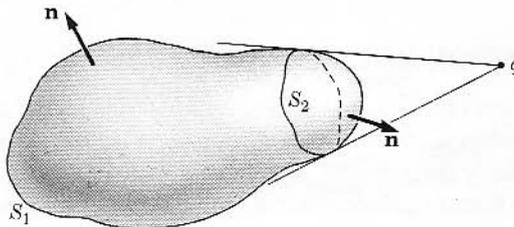
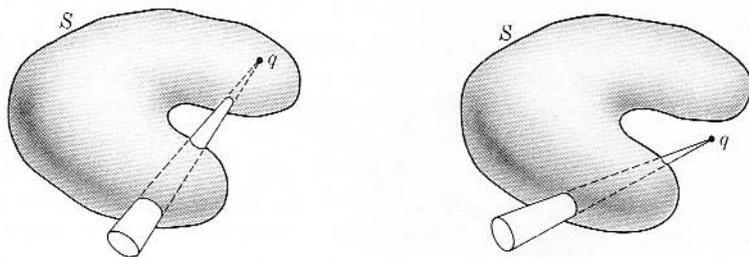


FIGURA 2.7

Elemento de ángulo sólido que corta la superficie S más de una vez.



La ley de Gauss puede expresarse aún en otra forma empleando el teorema de la divergencia. El teorema de la divergencia (1-37) establece que

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv$$

Si este teorema se aplica a la integral de superficie de la componente normal de \mathbf{E} , tendremos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dv \quad (2-26)$$

que, cuando se sustituye en la ecuación (2-25), da

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv \quad (2-27)$$

La ecuación (2-27) debe ser válida para todos los volúmenes, es decir, para cualquier elección del volumen V . La única forma en que esto puede ser cierto es que los integrandos del primer miembro y del segundo miembro sean iguales. Así pues, la validez de la ecuación (2-27) para cualquier elección de V implica que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2-28)$$

Este resultado puede considerarse como la forma diferencial de la ley de Gauss.

2.7
APLICACIÓN DE LA LEY DE GAUSS

La ecuación (2-28) o, más adecuadamente, una forma modificada de esta ecuación que se deducirá en el capítulo 4, es una de las ecuaciones diferenciales básicas de electricidad y magnetismo. Si bien la ecuación (2-28) es importante en este sentido, la ley de Gauss también tiene una utilidad práctica. Lo práctico de la ley consiste principalmente en proporcionar una forma muy fácil de calcular los campos eléctricos en situaciones suficientemente simétricas. En otras palabras, en algunas situaciones

altamente simétricas de considerable interés físico, el campo eléctrico puede calcularse empleando la ley de Gauss en lugar de utilizar las integrales dadas anteriormente o con los procedimientos del capítulo 3. La utilización de la ley de Gauss permite un gran ahorro de cálculos.

Para que la ley de Gauss sea útil en el cálculo del campo eléctrico, debe ser posible elegir una superficie cerrada tal que el campo eléctrico tenga una componente normal que sea cero o un solo valor fijo en cada punto de la superficie. Como ejemplo, considérese una línea muy larga de carga, con densidad de carga λ por unidad de longitud, como se muestra en la figura 2.8. La simetría de la situación indica claramente que el campo eléctrico es radial e independiente tanto de la posición en el alambre como de la posición angular con respecto al alambre. Estas observaciones nos conducen a elegir la superficie mostrada en la figura 2.8. Para esta superficie es fácil evaluar la integral de la componente normal del campo eléctrico. Los extremos circulares no contribuyen, puesto que el campo eléctrico es paralelo a ellos. La superficie cilíndrica contribuye con $2\pi r l E_r$, ya que \mathbf{E} es radial e independiente de la posición de la superficie cilíndrica. La ley de Gauss adquiere entonces la forma

$$2\pi r l E_r = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (2-29)$$

Se puede despejar E_r de la ecuación (2-29) de modo que

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2-30)$$

A partir de este resultado, el potencial puede obtenerse por integración:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

FIGURA 2.8

Superficie cilíndrica utilizada con la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico producido por una carga lineal larga.

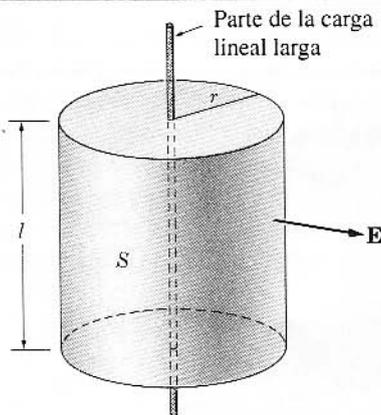
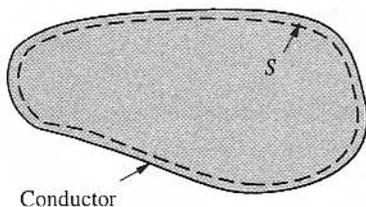


FIGURA 2.9

Superficie gaussiana S construida dentro de un conductor cargado.



El ahorro de esfuerzo que se logró empleando la ley de Gauss se apreciará más al resolver el problema 2.4, que implica la aplicación directa de la ecuación (2-8).

Otro resultado importante de la ley de Gauss es que la carga (carga neta) de un conductor cargado reside en su superficie exterior. Dijimos en la sección 2.5 que el campo eléctrico dentro de un conductor se anula. Podemos construir una superficie gaussiana en cualquier parte del interior del conductor. Por la ley de Gauss, la carga neta encerrada por estas superficies es cero. Finalmente, construyamos la superficie gaussiana S de la figura 2.9 y de nuevo la carga neta encerrada es cero. El único lugar en el que puede estar la carga para que no esté en contradicción con la ley de Gauss es sobre la superficie del conductor. Ya que no hay carga en el interior, parte del material puede quitarse sin cambiar nada. De este modo, la carga de una *capa* conductora reside completamente en la superficie *exterior*.

El campo eléctrico que está en el exterior inmediato de un conductor cargado debe ser normal a la superficie del conductor. Esto se debe a que la superficie es una equipotencial, y $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Supongamos que la carga de un conductor está dada por la función de densidad superficial σ . Si se aplica la ley de Gauss a la pequeña superficie S de la figura 2.10, que tiene la forma de una caja de pastillas, entonces

$$E \Delta S = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \Delta S$$

FIGURA 2.10

Aplicación de la ley de Gauss a una superficie S , en forma de caja de pastillas, que corta la superficie de un conductor cargado.

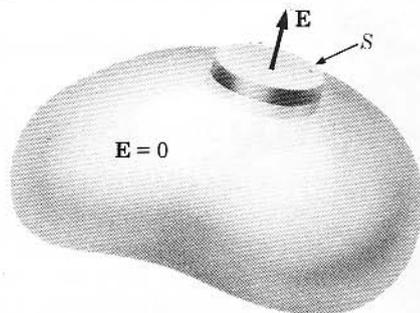
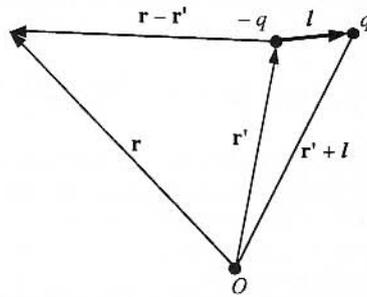


FIGURA 2.11

Geometría que interviene en el cálculo del campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ debido a dos cargas puntuales.



donde ΔS es el área de una de las bases de la caja de pastillas. De aquí que el campo eléctrico que está en el exterior inmediato de un conductor es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2-31)$$

2.8 EL DIPOLO ELÉCTRICO

Dos cargas iguales y de signo contrario separadas por una pequeña distancia forman un dipolo eléctrico. El campo eléctrico y la distribución del potencial producidos por tal configuración de cargas pueden analizarse con la ayuda de las fórmulas de las secciones 2.3 y 2.4. Supongamos que una carga $-q$ está ubicada en el punto \mathbf{r}' y que una carga q está en $\mathbf{r}' + \mathbf{l}$, como se muestra en la figura 2.11; entonces, el campo eléctrico en un punto arbitrario \mathbf{r} puede encontrarse por aplicación directa de la ecuación (2-8). Se determina que el campo eléctrico en \mathbf{r} es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (2-32)$$

El campo eléctrico correcto para cualquier valor de q y cualquier valor de la separación l está dado por la ecuación (2-32); sin embargo, no es fácil de interpretar. Lo que deseamos es el campo dipolar, y en el dipolo la separación l es pequeña comparada con $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$; por tanto, podemos desarrollar la ecuación (2-32), conservando sólo el primer término que no se anula. Como este procedimiento es de utilidad general, se considerará con detalle. La principal dificultad para efectuar este desarrollo se debe al denominador del primer término de la ecuación (2-32). El inverso de este denominador puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^{-3} &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l} + l^2]^{-3/2} \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{l^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-3/2} \end{aligned}$$

Es fácil desarrollar esta última expresión por el teorema del binomio, conservando sólo los términos lineales en l . El resultado de este desarrollo es

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - l|^{-3} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left\{ 1 + \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \dots \right\} \quad (2-33)$$

donde los términos en los que interviene l^2 se han suprimido. Sustituyendo la ecuación (2-33) en la (2-32), y conservando nuevamente sólo los términos lineales en l , se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dots \right\} \quad (2-34)$$

La ecuación (2-34) da la parte del campo eléctrico, debida a un dipolo eléctrico finito, que es proporcional a la separación de las cargas. Hay otras contribuciones proporcionales al cuadrado, al cubo y a potencias más altas de la separación. Sin embargo, si la separación es pequeña, estas potencias mayores contribuyen muy poco. En el límite, mientras l tiende a cero, todos los términos se anulan a menos que la carga se vuelva infinita. En este límite, en el que el producto ql permanece constante, todos los términos excepto el término lineal en l se anulan. En este límite se forma un *dipolo puntual*. Un dipolo puntual no tiene carga neta, ni extensión en el espacio, y se caracteriza completamente por su momento dipolar que es el límite de ql cuando l tiende a cero. Utilizamos el símbolo \mathbf{p} para representar el momento dipolar eléctrico, y escribimos

$$\mathbf{p} = ql \quad (2-35)$$

En términos del momento dipolar, la ecuación (2-34) puede expresarse como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (2-36)$$

La distribución de potencial producida por un dipolo puntual también es importante y ésta podría encontrarse buscando una función cuyo gradiente fuese igual al lado derecho de la ecuación (2-36). Sin embargo, es más fácil aplicar la ecuación (2-15) a la distribución de carga que consiste en dos cargas puntuales separadas por una pequeña distancia. Empleando la notación de la ecuación (2-32), la distribución de potencial está dada por

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - l|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad (2-37)$$

Desarrollando el primer término exactamente en la misma forma que se hizo para el primero de la ecuación (2-32) y conservando sólo el término lineal l , la ecuación (2-37) puede ponerse en la forma

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2-38)$$

Esta ecuación es válida para la misma aproximación que la ecuación (2-34); es decir, los términos proporcionales a l^2 y a potencias mayores de l se desprecian. Para un

dipolo puntual, \mathbf{p} , la ecuación (2-38) es exacta; sin embargo, es mejor expresarla como

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2-39)$$

La ecuación (2-39) da el potencial $\varphi(\mathbf{r})$ producido por un dipolo eléctrico y a partir de este potencial puede determinarse el campo eléctrico (Ec. 2-36).

También es interesante estudiar la energía potencial de un dipolo eléctrico que se coloca en un *campo eléctrico externo*. En el caso de dos cargas, $-q$ en \mathbf{r} y q en $\mathbf{r} + \mathbf{l}$, en un campo eléctrico descrito por la función potencial $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, la energía potencial es

$$U = -q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \quad (2-40)$$

Si \mathbf{l} es pequeña comparada con \mathbf{r} , $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{l})$ puede desarrollarse en serie de potencias de \mathbf{l} y sólo los dos primeros términos se conservan. El desarrollo da

$$\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \mathbf{l} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} \quad (2-41)$$

donde debe utilizarse el valor del gradiente en el punto \mathbf{r} . Si este desarrollo se utiliza en la ecuación (2-40), el resultado es

$$U = q\mathbf{l} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} \quad (2-42)$$

Tomando el límite de un dipolo puntual se tiene simplemente

$$U(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} \quad (2-43)$$

lo que, por supuesto, es exacto. Como el campo eléctrico es el negativo del gradiente del potencial electrostático, una forma alternativa de la ecuación (2-43) es

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (2-44)$$

$U(\mathbf{r})$ es la energía potencial de un dipolo \mathbf{p} en un campo eléctrico externo \mathbf{E}_{ext} , donde $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ se calcula en la posición del dipolo.

Es importante observar que en esta sección se han analizado dos potenciales. En las ecuaciones (2-37), (2-38) y (2-39) se considera el potencial electrostático *producido* por un dipolo eléctrico. En las ecuaciones (2-40) a (2-43) se considera que el dipolo está en un *campo eléctrico existente* descrito por una función potencial $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Este campo eléctrico se debe a cargas que no constituyen el dipolo; de hecho, el campo dipolar debe excluirse para evitar un resultado infinito. Este principio podría conducirnos a cuestiones bastante complicadas en las que intervienen fuerzas y energía propias que no discutiremos aquí; sin embargo, puede observarse que la energía potencial que resulta de la interacción de un dipolo eléctrico con su propio campo proviene de fuerzas ejercidas sobre el dipolo por sí mismo. Dichas fuerzas, conocidas en dinámica como fuerzas internas, no afectan el movimiento del dipolo como un todo. Para nuestros fines, no será necesario hacer más consideraciones sobre este asunto.

2.9 DESARROLLO MULTIPOLAR DE CAMPOS ELÉCTRICOS

De la definición de momentos dipolares dada con anterioridad, es evidente que algunos aspectos de la distribución de potencial producida por una distribución de carga determinada pueden expresarse bastante bien en términos de su momento dipolar eléctrico. Para hacer esto, es necesario definir el momento dipolar eléctrico de una distribución de carga arbitraria. En lugar de utilizar una definición no razonada, consideremos cierto desarrollo del potencial electrostático debido a una distribución de carga arbitraria. Para reducir el número de coordenadas de posición, se considerará una distribución de carga en la vecindad del origen de coordenadas. Una restricción más será que la distribución de carga puede estar encerrada completamente en una esfera de radio a , que es pequeño comparado con la distancia al punto de observación. Un punto arbitrario dentro de la distribución de carga se designará con \mathbf{r}' , la densidad de carga en ese punto con $\rho(\mathbf{r}')$ y el punto de observación con \mathbf{r} (véase la Fig. 2.12). El potencial en \mathbf{r} está dado por

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2-45)$$

donde dv' se utiliza para designar un elemento de volumen en la distribución de carga y V representa el volumen total ocupado por la distribución de carga. En vista de la restricción hecha antes a los puntos de observación que están lejos del origen, la cantidad $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ puede desarrollarse en una serie de potencias crecientes de \mathbf{r}'/r . El resultado de dicho desarrollo es

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &= (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[-\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \left[\quad \right]^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2-46)$$

donde sólo los tres primeros términos se indican explícitamente. Deberá observarse que aunque $(r'/r)^2$ es despreciable comparado con $2\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/r^2$, no debe eliminarse del primer par de corchetes porque es del mismo orden que el término dominante del segundo par de corchetes. Sustituyendo la ecuación (2-46) en (2-45) y omitiendo los términos que contienen el cubo y las potencias mayores de \mathbf{r}' , se tiene

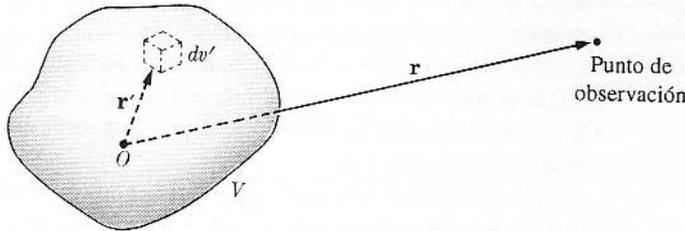
$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] + \dots \right\} \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (2-47)$$

Como \mathbf{r} no contiene la variable de integración \mathbf{r}' , la dependencia respecto a \mathbf{r} puede sacarse del signo de integración, para obtener

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dv' \right\} \end{aligned} \quad (2-48)$$

FIGURA 2-12

Carga localizada en un volumen V con una densidad de carga $\rho(\mathbf{r}')$. El campo eléctrico se calcula en el punto \mathbf{r} .



donde x_i, x_j son componentes cartesianas de \mathbf{r} ; x'_i, x'_j son las componentes cartesianas de \mathbf{r}' y δ_{ij} se define como sigue:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Es fácil interpretar la ecuación (2-48). La primera integral de la ecuación es evidentemente la carga total, y el primer término es el potencial que resultaría si esta carga total se concentrara en el origen.

La segunda integral es una generalización directa del concepto del momento dipolar para una distribución de carga continua y se llama *momento dipolar de la distribución de carga*. El segundo término de la ecuación (2-48) es el potencial que resultaría si un dipolo puntual igual al momento dipolar de la distribución de carga se localizara en el origen de coordenadas. Es interesante observar que el momento dipolar de una distribución de carga es independiente del origen de coordenadas si la carga total es cero. Para verificar esto, consideremos un nuevo sistema de coordenadas cuyo *origen* esté en la posición \mathbf{R} del sistema primitivo. Al representar un punto con respecto al sistema primitivo con \mathbf{r}' y el mismo punto con respecto al nuevo sistema con \mathbf{r}'' , se tiene

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{R} \quad (2-49)$$

El momento dipolar con respecto al sistema primitivo es

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' = \int_V (\mathbf{r}'' + \mathbf{R}) \rho(\mathbf{r}') dv' = \int_V \mathbf{r}'' \rho dv' + \mathbf{R}Q \quad (2-50)$$

Por tanto, \mathbf{p} es independiente del origen si Q es cero.

El tercer término de la ecuación (2-48) puede expresarse como

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} \quad (2-51)$$

donde

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (2-52)$$

Hay nueve componentes de Q_{ij} que corresponden a i, j igual a 1, 2, 3. De estas nueve componentes, seis son iguales en pares, quedando seis componentes distintas. Este conjunto de cantidades forma el tensor* de momento de cuadrupolo y representa una extensión del concepto de momento dipolar. Hay momentos de orden superior que se generan conservando los términos de orden superior en el desarrollo de la ecuación (2-48). Estos multipolos de orden superior son importantes en física nuclear, pero no se considerarán en este libro.

Los multipolos eléctricos se utilizan, como lo indica la ecuación (2-48), para calcular en forma aproximada el potencial (y el campo eléctrico) de una distribución de carga. Sin embargo, hay muchos otros usos, todos en el contexto de aproximar una distribución extendida de carga real por cargas puntuales, dipolos puntuales, etc. Estas aproximaciones permiten a menudo que sea posible resolver problemas extremadamente difíciles.

2.10

LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC †

En las expresiones generales del campo eléctrico y del potencial en las ecuaciones (2-8) y (2-15), hemos distinguido entre cargas puntuales y distribuciones continuas de carga. Para simplificar la notación, sería útil poder expresar las cargas puntuales como un caso especial de una función general de densidad de carga $\rho(\mathbf{r})$. La *función delta de Dirac* $\delta(\mathbf{r})$ puede servir para este propósito, y además resulta ser una valiosa herramienta matemática para muchos cálculos. Escribimos

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) \quad (\text{carga puntual}) \quad (2-53)$$

donde

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{para } \mathbf{r} \neq 0$$

y

$$\int \delta(\mathbf{r}') dv' = 1 \quad (2-54)$$

Por tanto, la función delta proporciona una expresión matemática para la idea física de una carga puntual en $\mathbf{r} = 0$: la integral de la densidad de carga es q , pero toda la carga se localiza exactamente en el origen. La función delta es desde luego una función matemática sumamente singular, al ser cero en cualquier parte excepto en un solo punto y, no obstante, tener una integral distinta de cero. Sin embargo, es un objeto matemático legítimo que no acarrea dificultades si lo manejamos con cuidado; por ejemplo, no se debe tratar de derivarla como si fuera una función continua. Una

* Los tensores son una generalización de los vectores; una exposición elemental de éstos se da en el Apéndice II.

† Otras propiedades de la función delta se analizan en el Apéndice V.

variación de ella puede usarse para representar una densidad superficial de carga $\sigma(\mathbf{r})$; es decir, una distribución de carga que es nula en todas partes excepto en una superficie determinada. Con estas extensiones, basta la integral sencilla sobre $\rho(\mathbf{r})$ en las ecuaciones (2-8) y (2-15). Para esta aplicación observamos que

$$\int F(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}') dv' = F(0) \quad (2-55)$$

donde F es cualquier función escalar o vectorial, puesto que el integrando desaparece excepto en $\mathbf{r}' = 0$. Además,

$$\int F(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) dv' = F(\mathbf{r}_0) \quad (2-56)$$

De esta forma, si $\rho(\mathbf{r}') = q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

y

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

para una carga puntual q_i en \mathbf{r}_i . Con esta caracterización de cargas puntuales, no es necesario incluir una sumatoria específica sobre q_i en las ecuaciones (2-8) y (2-15).

Se pueden obtener algunas otras propiedades de la función delta a partir de la forma diferencial de la ley de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2-28)$$

Para una carga puntual q en $\mathbf{r} = 0$, considerando la ecuación (2-21),

$$\nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} = \frac{1}{\epsilon_0} q \delta(\mathbf{r})$$

o

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (2-57)$$

También, debido a que

$$\nabla \cdot \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

entonces,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (2-58)$$

Las ecuaciones (2-57) y (2-58) son tan importantes que bien vale la pena hacer una derivación más directa. Una derivación directa nos muestra que la divergencia es cero en cualquier parte, excepto en el origen:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = -\frac{3}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = 0, \quad r \neq 0$$

En $r = 0$ la divergencia es $-\infty + \infty$, que es indeterminada. Sin embargo, el teorema de la divergencia, aplicado a una pequeña esfera de radio R alrededor del origen, nos da

$$\int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv = \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} da = \frac{1}{R^2} \oint_S da = 4\pi$$

Ya que la integral de volumen es 4π sin importar lo pequeño que sea el radio R , el integrando puede representarse como $4\pi\delta(\mathbf{r})$, de acuerdo con la ecuación (2-57). En otras palabras, la función delta permite que el teorema de la divergencia pueda aplicarse a \mathbf{r}/r^3 , incluso en una región que contenga la singularidad en el origen. La función delta es extremadamente útil siempre que se encuentre una integral sobre la divergencia de \mathbf{r}/r^3 o sobre el laplaciano de $1/r$.

2.11

RESUMEN

La electrostática se basa en la **ley de Coulomb**, la cual, para una carga puntual q_1 en el origen y una carga puntual q en \mathbf{r} , da como fuerza electrostática que actúa sobre q

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

donde $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ en unidades mks y $\epsilon_0 = 1/4\pi$ en unidades gaussianas. Es conveniente tratar a q como una carga de prueba y abstraer a partir de su definición el campo eléctrico \mathbf{E} , correspondiente a la fuerza \mathbf{F}_e :

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

El **campo electrostático** en \mathbf{r} debido a la carga fuente q_1 localizada en $\mathbf{r}_1 = 0$ es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

El rotacional y la divergencia de \mathbf{E} son de fundamental importancia:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r})$$

donde la **función delta de Dirac** está definida por

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \neq 0$$

$$\int \delta(\mathbf{r}) dv = 1$$

La función delta tiene la propiedad de que para cualquier función F

$$\int F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = F(\mathbf{r}_0)$$

• La ley de Coulomb puede generalizarse a sistemas de muchas cargas fuente, o a una **distribución continua de densidad de carga** $\rho(\mathbf{r})$ definida de tal modo que el elemento de carga en un elemento de volumen dv es

$$dq = \rho(\mathbf{r}) dv$$

Para una carga puntual q_i en \mathbf{r}_i ,

$$\rho(\mathbf{r}) = q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

Puesto que las fuerzas y los campos son aditivos,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv'$$

Como ∇ es un operador lineal,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

Éstas son las ecuaciones diferenciales fundamentales que todo campo electrostático debe satisfacer localmente en cualquier punto. (De hecho, la ecuación de divergencia se satisface aun con campos dependientes del tiempo, y es una de las cuatro *ecuaciones fundamentales de Maxwell*.)

• La **ley de Gauss** se obtiene de la ecuación de la divergencia mediante la integración de ambos lados de la ecuación sobre un volumen arbitrario V y la aplicación del teorema de la divergencia:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

donde

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$$

es la carga total dentro de V limitada por S . La ley de Gauss tiene utilidad práctica para calcular E en unas cuantas situaciones especiales en las que se puede argumentar en términos generales que E debe ser constante en magnitud y dirección con respecto a una superficie elegida S . También muestra que la *carga sobre un conductor* debe ubicarse sobre la *superficie exterior* y que justo afuera de la superficie, $E = \sigma/\epsilon_0$.

• La existencia de un **potencial electrostático** $\varphi(\mathbf{r})$ se deduce de la ecuación del rotacional, de tal forma que

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

Para un campo dado \mathbf{E} ,

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Para una distribución específica de carga,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

Esta ecuación es más fácil de resolver que la integral para \mathbf{E} . El potencial escalar φ se relaciona con la **energía potencial** U de la fuerza electrostática conservativa mediante

$$U = q\varphi$$

• A cierta distancia de la región donde se localizan las cargas fuente ρ , es útil el **desarrollo multipolar** de φ :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \right]$$

donde

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv'$$

es el elemento dipolar de la distribución de carga. Por lo general, el primer término que no se anule en el desarrollo es el más importante; nosotros sólo consideraremos los dos primeros términos.

PROBLEMAS

2.1 Dos partículas, cada una de masa m y cargas q y $2q$ respectivamente, están suspendidas por cuerdas de longitud l a partir de un punto en común. Encuentre el ángulo θ que forma cada una de las cuerdas con la vertical.

2.2 Dos pequeñas esferas conductoras idénticas tienen cargas de 2.0×10^{-9} C y -0.4×10^{-9} C, respectivamente. (a) Cuando se colocan a 4 cm una de otra, ¿cuál es la fuerza entre ellas? (b) Si se ponen en contacto y luego se separan 4 cm, ¿cuál será la fuerza entre ellas?

2.3 Se sitúan cargas puntuales de 4×10^{-9} C en cada uno de los tres vértices de un cuadrado de lado igual a 15 cm. Encuentre la magnitud, la dirección y el sentido del campo eléctrico en el vértice vacante del cuadrado.

2.4 Una carga lineal infinitamente larga tiene una densidad de carga uniforme λ por unidad de longitud. Por integración directa, encuentre el campo eléctrico a una distancia r de la línea.

2.5 (a) Un disco circular de radio R tiene una densidad de carga superficial uniforme σ . Calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje del disco a una distancia z del plano de dicho disco. (b) Un cilindro circular recto de radio R y altura L se orienta a lo largo del eje z .

Resolución de problemas electrostáticos

La resolución de un problema electrostático es directa para el caso en el que la distribución de carga esté especificada en todo punto, puesto que, como hemos visto, el potencial y el campo eléctrico están dados directamente como integrales sobre esta distribución de carga:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3-1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3-2)$$

Sin embargo, muchos de los problemas encontrados en la práctica no son de este tipo. Si la distribución de carga no se especifica de antemano, puede ser necesario determinar el campo eléctrico *primero*, para posteriormente poder calcular la distribución de carga. Por ejemplo, en un problema electrostático pueden intervenir varios conductores, conociéndose ya sea el potencial o la carga total de cada conductor, pero, en general, la distribución de la carga superficial no será conocida y debe obtenerse como parte de la resolución del problema.

Nuestro propósito en este capítulo es crear un enfoque alternativo de los problemas electrostáticos, y para lograr esto deduciremos primero la ecuación diferencial fundamental que debe satisfacer el potencial φ . Por ahora no tendremos en cuenta problemas en los que intervienen cuerpos dieléctricos; los problemas de este tipo se resolverán en el capítulo 4.

ECUACIÓN DE POISSON

Todas las relaciones básicas que necesitaremos aquí se desarrollaron en el capítulo anterior. Primero, tenemos la forma diferencial de la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (3-3)$$

Además, en un campo puramente electrostático, \mathbf{E} puede expresarse como menos el gradiente del potencial φ :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (3-4)$$

Combinando (3-3) y (3-4), obtenemos

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3-5a)$$

Como observamos en el capítulo 1, es conveniente considerar la divergencia del gradiente como un solo operador diferencial, $\nabla \cdot \nabla$ o ∇^2 , llamado *laplaciano*.

El laplaciano es un operador diferencial escalar y la ecuación (3-5b) es una ecuación diferencial conocida como *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3-5b)$$

El operador ∇^2 implica la derivación con respecto a más de una variable. En consecuencia, la ecuación de Poisson es una *ecuación en derivadas parciales* que puede resolverse una vez que se conoce la dependencia funcional de $r(x, y, z)$ y las condiciones adecuadas en la frontera.

El operador ∇^2 , así como el ∇ , $\nabla \cdot$ y $\nabla \times$, no hacen referencia a ningún sistema de coordenadas particular. Para resolver un problema determinado, debemos expresar ∇^2 en función de x, y, z o de r, θ, ϕ , o de algún otro sistema coordenado. La elección del sistema particular de coordenadas es arbitraria, pero se logrará una extraordinaria simplificación del problema si se elige un sistema compatible con la simetría del problema electrostático. La forma que toma $\nabla^2\varphi$ en diferentes sistemas de coordenadas se halla fácilmente tomando primero el gradiente de φ y aplicando luego $\nabla \cdot$. Utilizando expresiones específicas del capítulo 1 (o del Apéndice IV), tenemos las siguientes formas.*
Coordenadas rectangulares:

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (3-6)$$

Coordenadas esféricas: sen

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \quad (3-7)$$

* Para la forma del laplaciano en otros sistemas coordenados más complicados, el lector puede ver las referencias al final de este capítulo.

Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (3-8)$$

Deberá observarse que r y θ tienen distintos significados en (3-7) y (3-8). En coordenadas esféricas, r es la magnitud del radio vector desde el origen y θ es el ángulo polar. En coordenadas cilíndricas, r es la distancia perpendicular al eje del cilindro y θ es el ángulo azimutal con respecto a este eje.

3.2

ECUACIÓN DE LAPLACE

En cierto tipo de problemas electrostáticos en los que intervienen conductores, toda la carga se encuentra ya sea sobre la superficie de los conductores o en forma de cargas puntuales fijas. En estos casos, ρ es cero en la mayoría de los puntos del espacio.

Donde se anula la densidad de carga, la ecuación de Poisson se reduce a la forma más sencilla

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3-9)$$

que es la *ecuación de Laplace*.

Supongamos que tenemos un conjunto de N conductores que se mantienen a los potenciales $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$. Nuestro problema es hallar el potencial en todos los puntos del espacio exterior a los conductores. Esto puede lograrse encontrando una solución de la ecuación de Laplace que se reduce a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sobre la superficie de los conductores apropiados. Puede demostrarse que dicha solución de la ecuación de Laplace es única, es decir, que no hay otra solución de la ecuación de Laplace que satisfaga las mismas condiciones en la frontera. Una demostración de este enunciado se dará a continuación. La solución de la ecuación de Laplace que encontramos de esta forma no se aplica al interior de los conductores porque éstos tienen carga superficial, lo que implica una discontinuidad en el gradiente de φ a través de la superficie (véase la Sec. 2.7). Pero hemos visto ya que el interior de cada conductor es una región de potencial constante, de modo que la solución a nuestro problema es completa.

Describiremos con cierto detalle dos métodos para la solución de la ecuación de Laplace. El primero es un método para componer una solución general de la ecuación (3-9) a partir de soluciones particulares (funciones base) en un sistema de coordenadas exigido por la simetría del problema; el segundo es el método de imágenes. Además, se hallará una solución completamente general para el problema en dos dimensiones. Sin embargo, antes de considerar estos procedimientos específicos, demostraremos algunas propiedades importantes de la solución de la ecuación de Laplace.

Teorema I. Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ son todas soluciones de la ecuación de Laplace, entonces:

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_n\varphi_n \quad (3-10)$$

donde las C son constantes arbitrarias, también es una solución.

La demostración de este teorema es inmediata a partir del hecho de que

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi &= \nabla^2C_1\varphi_1 + \nabla^2C_2\varphi_2 + \dots + \nabla^2C_n\varphi_n \\ &= C_1\nabla^2\varphi_1 + C_2\nabla^2\varphi_2 + \dots + C_n\nabla^2\varphi_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando el teorema I podemos superponer dos o más soluciones de la ecuación de Laplace, de tal manera que la solución resultante satisfaga un conjunto dado de condiciones en la frontera. Se darán ejemplos en las siguientes secciones.

Teorema II: Teorema de unicidad. Dos soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones en la frontera difieren a lo sumo en una constante aditiva.

Para demostrar este teorema consideremos una región cerrada V_0 exterior a las superficies S_I, S_{II}, \dots, S_N de los diversos conductores del problema y limitada en el exterior por una superficie S , siendo esta última una superficie en el infinito o una superficie física real que encierra V_0 . Supongamos que φ_1 y φ_2 son dos soluciones de la ecuación de Laplace en V_0 que, además, tienen las mismas condiciones en la frontera sobre $S, S_I, S_{II}, \dots, S_N$. Estas condiciones en la frontera pueden determinarse asignando valores ya sea para φ o $\partial\varphi/\partial n$ sobre las superficies limitadoras.

Definimos una nueva función $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Evidentemente, $\nabla^2\Phi = \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = 0$ en V_0 . Por otro lado, Φ o $\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi$ se anula en las fronteras. Así, aplicando el teorema de la divergencia al vector $\Phi\nabla\Phi$ tenemos:

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) dv = \int_{S+S_I+\dots+S_N} \Phi\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} da = 0$$

ya que la segunda integral se anula. La divergencia puede desarrollarse según la ecuación (1.1.7) de la tabla 1.1 para que dé:

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2$$

Pero $\nabla^2\Phi$ se anula en todos los puntos de V_0 , de modo que el teorema de la divergencia se reduce en este caso a

$$\int_{V_0} (\nabla\Phi)^2 dv = 0$$

Ahora $(\nabla\Phi)^2$ debe ser positivo o cero en cada punto de V_0 y, puesto que su integral es cero, es evidente que $(\nabla\Phi)^2 = 0$ es la única posibilidad.

El teorema queda así esencialmente demostrado. Una función cuyo gradiente es cero en todos los puntos no puede cambiar; por tanto, en todos los puntos de V_0 , Φ tiene el mismo valor que el que tiene en las superficies limitadoras. Si las condiciones en la frontera se han dado al especificar ϕ_1 y ϕ_2 en las superficies S, S_1, \dots, S_N , entonces, puesto que $\Phi = 0$ sobre estas superficies, éste se anula en todo V_0 . Si las condiciones en la frontera se dan en función de $\partial\phi_1/\partial n$ y $\partial\phi_2/\partial n$, entonces $\nabla\Phi$ es igual a cero en todos los puntos de V_0 y $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre las fronteras. La única solución compatible con el último enunciado es que Φ sea igual a una constante.

3.3

ECUACIÓN DE LAPLACE CON UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Si ϕ es función de una sola variable, la ecuación de Laplace se reduce a una ecuación diferencial ordinaria. Considérese el caso en que ϕ es $\phi(x)$, es decir, una función de una sola coordenada rectangular x . Entonces

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad \text{y} \quad \phi(x) = ax + b \quad (3-11)$$

es la solución general, donde a y b son constantes elegidas de tal modo que se cumplan las condiciones de la frontera. Éste es el resultado que se encontró en el capítulo anterior para el potencial entre dos placas conductoras cargadas con orientación normal al eje x .

La situación no es más complicada en otros sistemas coordenados en los que ϕ es una función de una sola variable. En coordenadas esféricas, donde ϕ es igual a $\phi(r)$, la ecuación de Laplace y su solución general se convierten en

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0, \quad \phi(r) = -\frac{a}{r} + b \quad (3-12)$$

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para una función independiente de θ y z , es decir, para $\phi(r)$, se deja como ejercicio en la sección de problemas.

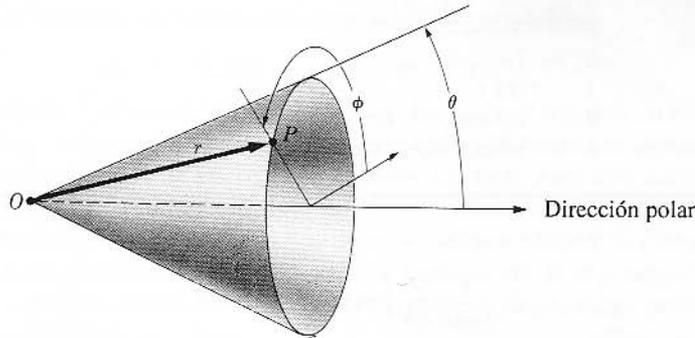
3.4

SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS ESFÉRICAS: ARMÓNICOS ESFÉRICOS

Dirigimos ahora nuestra atención a las soluciones de la ecuación de Laplace en las que ϕ es función de más de una variable. Muchos de los problemas que nos interesan tratan de conductores en forma de esferas o cilindros y, por tanto, se necesitan soluciones de la ecuación de Laplace ya sea en coordenadas esféricas o cilíndricas. Primero abordaremos el problema esférico, pero veremos que conviene *limitar el análisis*

FIGURA 3.1

Localización del punto P en función de las coordenadas esféricas r , θ , ϕ .



a los casos en que φ es independiente del ángulo azimutal ϕ . Esta limitación restringe la clase de problemas que podremos resolver. Sin embargo, muchos problemas físicos de interés quedan dentro de esta categoría restringida y los problemas más complicados se encuentran más allá del alcance de este texto.

Para el caso esférico, φ es $\varphi(r, \theta)$, donde r es el radio vector que va desde un origen fijo O y θ es el ángulo polar (véase la Fig. 3.1). Al utilizar la ecuación (3-7), la ecuación de Laplace se convierte en este caso en

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3-13)$$

Esta ecuación diferencial parcial se resolverá por una técnica conocida como *separación de variables*. Una solución de la forma $\varphi(r, \theta) = Z(r)P(\theta)$ se sustituye en la ecuación (3-13), lo que produce

$$\frac{1}{r^2} P(\theta) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) + \frac{Z(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0 \quad (3-14)$$

Observe que las derivadas parciales han sido sustituidas por derivadas totales, puesto que Z y P son funciones de una sola variable. Dividiendo por $\varphi(r, \theta)$ y multiplicando por r^2 , transformamos la ecuación (3-14) en

$$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \quad (3-15)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es función únicamente de r y el lado derecho es función de θ . La única forma en que una función de r puede ser igual a una función de θ para todos los valores de r y θ es que ambas funciones sean constantes. En consecuencia, igualaremos cada miembro de la ecuación (3-15) a k , siendo k la "constante de separación".

No todos los valores de k proporcionan necesariamente soluciones aceptables con bases físicas. Considere primero la ecuación para θ , conocida como *ecuación de Legendre*:

TABLA 3.1
Polinomios de Legendre
para $n = 0, 1, 2$ y 3 .

n	$P_n(\theta)$
0	1
1	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + kP = 0 \quad (3-16)$$

Las únicas soluciones físicamente aceptables que están definidas en el intervalo de θ , que va desde 0 hasta (π) corresponden a $k = n(n + 1)$, siendo n un entero positivo. La solución para una n en particular se representará con $P_n(\theta)$. Las soluciones de la ecuación (3-16) para otros valores de k no se comportan bien en la vecindad de $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ radianes, volviéndose infinitas o incluso indefinidas para esos valores de θ .*

Estas soluciones no pueden satisfacer condiciones físicas en la frontera y, por tanto, deben descartarse.†

Las soluciones aceptables, $P_n(\theta)$, son polinomios en $\cos \theta$ y generalmente se denominan *polinomios de Legendre*. Las primeras cuatro funciones de Legendre se dan en la tabla 3.1. Es evidente de la ecuación (3-16) que los P_n pueden multiplicarse por cualquier constante arbitraria.

Volvamos ahora a la ecuación radial

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n + 1)Z \quad (3-17)$$

donde hemos empleado la forma explícita de k que dio soluciones de θ aceptables. La inspección de la ecuación (3-17) muestra que dos soluciones independientes son

$$Z_n = r^n \quad \text{y} \quad Z_n = r^{-(n+1)}$$

Las soluciones de la ecuación de Laplace se obtienen mediante el producto $\varphi_n(r, \theta) = Z_n(r)P_n(\theta)$, donde debe tenerse especial cuidado para que Z y P correspondan al mismo valor de n . Esto es imprescindible, puesto que ambos miembros de la ecuación (3-15) son iguales a la misma constante, es decir, $n(n + 1)$.

* La exposición ha sido demasiado breve. El lector que se interese en el tema deberá consultar más textos de matemáticas para un tratamiento detallado de la ecuación de Legendre. Véanse, por ejemplo, los libros indicados al final de este capítulo. La ecuación de Legendre se expresa generalmente en una forma distinta, sustituyendo $x = \cos \theta$, y sus soluciones se representan entonces con $P_n(x)$ o $P_n(\cos \theta)$.

† Este enunciado requiere algunas limitaciones. En algunos problemas electrostáticos, las regiones alrededor de $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ pueden excluirse naturalmente, por ejemplo, por superficies cónicas conductoras. En estas condiciones podrían también utilizarse las soluciones de la ecuación (3-16) con otros valores de k . Los problemas de este tipo no se considerarán aquí.

Hemos resuelto así la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, obteniendo así las soluciones conocidas como *armónicos esféricos*:

$$\varphi_n = r^n P_n(\theta) \quad \text{o} \quad \varphi_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad (3-18)$$

donde $P_n(\theta)$ es uno de los polinomios de la tabla 3.1 y n es un entero positivo o cero. Los armónicos esféricos forman un conjunto de funciones adecuado para la solución de la ecuación de Laplace con fronteras esféricas y simetría azimutal. Estas soluciones pueden combinarse de acuerdo con el Teorema I. Varios de los armónicos de zona ya nos son bien conocidos: una de las soluciones para $n=0$, es decir, $\varphi = \text{constante}$, es una solución trivial de la ecuación de Laplace, válida en cualquier sistema de coordenadas; el armónico esférico r^{-1} es el potencial de una carga puntual, y $r^{-2} \cos \theta$ es el potencial de un dipolo.

3.5

ESFERA CONDUCTORA EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Ilustraremos la utilidad de los armónicos de zona para problemas electrostáticos que tienen simetría esférica resolviendo el problema de una esfera conductora descargada colocada en un campo eléctrico *inicialmente* uniforme, \mathbf{E}_0 . Las líneas de un campo eléctrico uniforme son paralelas, pero la presencia del conductor altera el campo de tal manera que las líneas de éste chocan perpendicularmente con la superficie del conductor, que es una superficie equipotencial. Si tomamos la dirección del campo eléctrico inicialmente uniforme como la dirección polar (dirección z) y si fijamos el origen de nuestro sistema de coordenadas de modo que coincida con el centro de la esfera, entonces de la simetría del problema se ve que el potencial será independiente del ángulo azimutal ϕ y puede expresarse como una suma de los armónicos esféricos.

El conductor esférico, de radio a , es una superficie equipotencial; representemos este potencial con φ_0 . Nuestro problema es hallar una solución de la ecuación de Laplace en la región exterior a la esfera que se reduzca a φ_0 sobre la esfera misma y que tenga la forma limitadora correcta a grandes distancias de separación. La solución puede expresarse formalmente como

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \\ & + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \quad (3-19)$$

donde las A y las C son constantes arbitrarias. Para r grande, el campo eléctrico se distorsionará sólo ligeramente con respecto a su forma inicial y el potencial será el apropiado para un campo eléctrico uniforme.

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} &= \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{k} \\ [\varphi(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} &= -E_0 z + \text{constante} \\ &= -E_0 r \cos \theta + \text{constante} \end{aligned} \quad (3-20)$$

En consecuencia, para que concuerden las ecuaciones (3-19) y (3-20) para r grande, $A_2 = -E_0$. Además, todas las A desde A_3 en adelante deben igualarse a cero.

El término $C_1 r^{-1}$ produce un campo radial que, como podría esperarse, es compatible sólo con un conductor esférico que tiene una carga total neta. Como nuestro problema trata de un conductor descargado, la constante C_1 debe igualarse a cero. En la superficie de la esfera, $\varphi = \varphi_0$, y el potencial debe ser independiente del ángulo θ . Los dos términos en que interviene $\cos \theta$ pueden eliminarse entre sí, pero los términos con potencias inversas de r , mayores, no pueden eliminarse entre sí debido a que contienen funciones de Legendre *diferentes*. La única posibilidad es igualar todas las C_i a cero cuando $i \geq 3$. La ecuación (3-19) se convierte ahora en

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= A_1 - E_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta, \quad \text{para } r \geq a \\ \varphi(a, \theta) &= \varphi_0\end{aligned}\quad (3-21)$$

Ya que las dos expresiones deben ser iguales en $r = a$, $A_1 = \varphi_0$ y $C_2 = E_0 a^3$.

De la última expresión para el potencial, podemos calcular no sólo el campo eléctrico en todos los puntos del espacio (véase la Fig. 3.2), sino también la densidad superficial de carga sobre la esfera conductora:

$$\left. \begin{aligned}E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \theta \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin \theta\end{aligned}\right\} \quad \text{para } r \geq a \quad (3-22)$$

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (3-23)$$

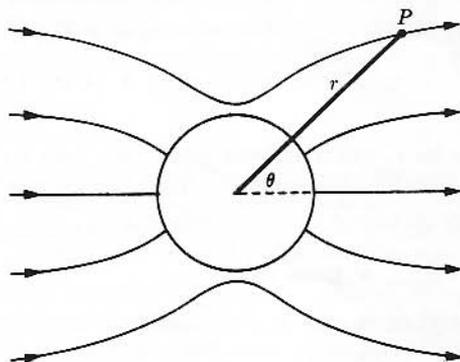
La carga total sobre la esfera,

$$Q = a^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta$$

es evidentemente cero, lo que concuerda con nuestra suposición inicial.

FIGURA 3.2

Líneas de flujo eléctrico para el caso de una esfera conductora colocada en un campo eléctrico uniforme.



SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS: ARMÓNICOS CILÍNDRICOS

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas puede resolverse también por el método de separación de variables. Aquí nuevamente conviene resolver sólo un tipo restringido de problemas, es decir, aquellos en los cuales el potencial es independiente de la coordenada z . Estas soluciones son apropiadas para ciertos problemas en los que interviene un conductor cilíndrico o alambre recto y largo, pero *no* para aquellos que tratan de un segmento cilíndrico corto.

Si el potencial es independiente de z , la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas se convierte en

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3-24)$$

Al sustituir $\varphi = Y(r)S(\theta)$, la ecuación se reduce a

$$\frac{r}{Y} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) = - \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = k \quad (3-25)$$

donde k nuevamente desempeña el papel de una constante de separación. La ecuación para θ es particularmente sencilla; tiene por soluciones $\cos k^{1/2}\theta$ y $\sin k^{1/2}\theta$. Pero para que estas soluciones tengan sentido físico, cada una debe ser una función univalente de θ ; por lo que

$$\cos k^{1/2}(\theta + 2\pi) = \cos k^{1/2}\theta$$

$$\sin k^{1/2}(\theta + 2\pi) = \sin k^{1/2}\theta$$

O, dicho de otra forma, una vez que θ ha recorrido todo el intervalo desde 0 hasta 2π , la función debe unirse *suavemente* a su valor en $\theta = 0$. Esto puede suceder sólo si $k = n^2$, siendo n un entero. Podemos, además, pedir que n sea positivo (o cero) sin perder ninguna de estas soluciones.

Volviendo a la ecuación de r , podemos verificar fácilmente que $Y(r)$ es r^n o r^{-n} ; a menos que $n = 0$ cuando $Y(r) = \ln r$ o $Y(r) = \text{constante}$. En consecuencia, las soluciones buscadas de la ecuación de Laplace, que se denominan *armónicos cilíndricos*, son

1	$\ln r$
$r^n \cos n\theta$	$r^{-n} \cos n\theta$
$r^n \text{sen } n\theta$	$r^{-n} \text{sen } n\theta$

Estas funciones forman un conjunto completo para las variables r, θ en coordenadas cilíndricas, y el potencial $\varphi(r, \theta)$ puede desarrollarse como una superposición de armónicos cilíndricos de acuerdo con el teorema I.

*3.7 ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS RECTANGULARES

En coordenadas rectangulares, las variables pueden separarse haciendo la sustitución

$$\varphi(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)$$

por lo que la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = -\frac{1}{f_3(z)} \frac{d^2 f_3}{dz^2} \quad (3-26a)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es una función de x e y , y el derecho es función de z únicamente; en consecuencia, ambos miembros deben igualarse a la misma constante, k . Esta constante es la primera constante de separación. Las dos ecuaciones obtenidas a partir de (3-26a) son

$$\frac{d^2 f_3}{dz^2} + kf_3 = 0 \quad (3-26b)$$

$$\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = k - \frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2}$$

Esta última ecuación se ha expresado de tal forma que las variables x e y estén separadas. Cada miembro de esta ecuación se iguala ahora a $-m$ (segunda constante de separación). Por tanto,

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2} + mf_2 = 0 \quad (3-26c)$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} - (k + m)f_1 = 0 \quad (3-26d)$$

Las ecuaciones (3-26b), (3-26c) y (3-26d) se resuelven fácilmente. Una de las soluciones típicas para $\varphi(x, y, z)$ es

$$\varphi(x, y, z) = Ae^{-(k+m)^{1/2}x} \cos m^{1/2}y \cos k^{1/2}z \quad (3-27)$$

Las otras siete soluciones independientes para un par de constantes de separación (k, m) se obtienen haciendo una o más de las siguientes sustituciones: $+(k + m)^{1/2}x$ por $-(k + m)^{1/2}x$, $\sin m^{1/2}y$ por $\cos m^{1/2}y$ y $\sin k^{1/2}z$ por $\cos k^{1/2}z$.

Hasta ahora no ha habido restricción sobre k ni sobre m , pero las condiciones en la frontera del problema restringen generalmente k (o m) a un conjunto discreto de valores positivos o negativos. Vale la pena observar que las condiciones en la frontera son las que realmente imperan en la selección de las *soluciones pertinentes* para una ecuación diferencial parcial. Para x e y fijos, la siguiente función es justamente el *desarrollo en serie de Fourier* para una función par arbitraria de z :

* Las secciones con asterisco pueden ser omitidas sin perder continuidad.

$$\varphi(x, y, z) = \sum_p \sum_q A_{pq} e^{-(p^2+q^2)^{1/2}x} \cos py \cos qz$$

Las soluciones individuales en la ecuación (3-27) no representan potenciales que corresponden a situaciones físicas sencillas. Sin embargo, el caso en el que ambas constantes de separación son cero corresponde a una situación física de interés; por tanto, dirigiremos nuestra atención a este caso. De la ecuación (3-26d), es evidente que $f_1(x) = a_1x$, o sea, $f_1(x) = \text{constante}$, es una solución; de la ecuación (3-26c) obtenemos $f_2(y)$, etc. Así,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & A_1xyz + A_2xy + A_3yz + A_4xz \\ & + A_5x + A_6y + A_7z + A_8 \end{aligned} \quad (3-28a)$$

donde las A son constantes arbitrarias. Esta solución puede aplicarse al caso en el que tres planos conductores se cortan perpendicularmente. Si estos planos son los planos coordenados xy , yz y zx , y todos están al mismo potencial, entonces

$$\varphi(x, y, z) = A_1xyz + A_8 \quad (3-28b)$$

Se deja como ejercicio para el lector determinar la densidad de carga superficial sobre los planos coordenados que es compatible con la ecuación (3-28b).

***3.8**

**ECUACIÓN DE LAPLACE EN DOS DIMENSIONES:
SOLUCIÓN GENERAL**

Si el potencial es una función de dos coordenadas rectangulares únicamente, la ecuación de Laplace puede expresarse como

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (3-29a)$$

Es posible obtener una solución general de esta ecuación por medio de una transformación a un nuevo conjunto de variables independientes. Sin embargo, deberá resaltarse que dicha transformación conduce a una simplificación de la ecuación original solamente en el caso bidimensional. Sea

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es el número imaginario unidad. En términos de estas relaciones,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

y

$$\nabla^2 \varphi = 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (3-29b)$$

Es evidente que la solución general a la ecuación (3-29b) es

$$\varphi = F_1(\xi) + F_2(\eta) = F_1(x + iy) + F_2(x - iy) \quad (3-30)$$

donde F_1 y F_2 son funciones *arbitrarias* que son adecuadamente* continuas y diferenciables. Las funciones F_1 y F_2 son cantidades complejas en general, pero se pueden construir dos funciones reales de la siguiente forma. Supongamos primero que $F_2(x - iy) = F_1(x - iy)$, es decir, que las dos funciones F_1 y F_2 dependen del mismo argumento. Entonces,

$$\varphi_1 = F_1(x + iy) + F_1(x - iy) = 2 \operatorname{Re} [F_1(x + iy)]$$

donde Re significa *parte real de*. Por otro lado, la segunda función real del potencial es

$$\varphi_2 = -i[F_1(x + iy) - F_1(x - iy)] = 2 \operatorname{Im} [F_1(x + iy)]$$

donde Im significa *parte imaginaria de*. Por tanto, las partes real e imaginaria de cualquier función compleja $F(x + iy)$ son soluciones de la ecuación de Laplace.

Las soluciones halladas de esta forma no se restringen a un sistema de coordenadas particular. Por ejemplo, los armónicos cilíndricos de la sección 3.7 se obtienen de las funciones complejas† $(x + iy)^n = r^n e^{in\theta}$, y $\ln(x + iy) = \ln r + i\theta$. Por otra parte, cuando es necesario resolver un problema bidimensional particular, no hay un procedimiento establecido para hallar la función compleja adecuada. Este método genera tantas soluciones que no es posible enumerarlas y hay que dejar fuera las que no satisfagan las condiciones en la frontera del problema. En casos sencillos, las funciones necesarias pueden hallarse por ensayo y error; en otros casos, el método de *representación conforme* (que está más allá del alcance de este texto) puede ser útil.

3.9

IMÁGENES ELECTROSTÁTICAS

Para un conjunto dado de condiciones en la frontera, la solución de la ecuación de Laplace es única, de modo que si obtenemos una solución $\varphi(x, y, z)$ por cualquier medio y si esta φ satisface todas las condiciones en la frontera, entonces se ha encontrado una solución completa del problema. El *método de imágenes* es un procedimiento para lograr este resultado sin resolver específicamente una ecuación diferencial. No se aplica universalmente a todos los tipos de problemas electrostáticos, pero un número suficiente de problemas de interés caen dentro de esta categoría, de modo que vale la pena exponer aquí el método.

Supongamos que el potencial puede expresarse en la siguiente forma:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3-31)$$

* La función F debe ser "analítica" en el dominio (x, y) de interés. Véase el Apéndice VII, ecuación (VII-3).

† Las coordenadas cilíndricas y rectangulares se relacionan en la forma usual: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

donde φ_1 es ya una función específica o fácilmente calculable y la integral representa la contribución al potencial de la carga superficial sobre todos los conductores que aparecen en el problema. Aquí no se conoce la función σ . Puede suceder, y ésta es la esencia del método de la carga imagen, que el último término de la ecuación (3-31) pueda sustituirse por un potencial φ_2 debido a una distribución de carga *especificada*, generalmente cargas puntuales o lineales. Esto es posible mientras las superficies de todos los conductores coincidan con las superficies equipotenciales de $\varphi_1 + \varphi_2$ combinados. Las cargas especificadas que produce φ_2 se llaman *cargas imagen*. Por supuesto que no existen realmente. Su posición aparente queda *dentro* de los diversos conductores, y el potencial $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ es una solución válida del problema sólo en la región exterior.

EJEMPLO 3.1 Carga puntual cerca de un plano conductor

Tomaremos ahora algunos ejemplos específicos para demostrar las ventajas del método de la carga imagen. Se destacará que la solución de estos ejemplos sería muy difícil si tuviéramos que utilizar otros métodos analíticos. Consideraremos primero el problema de una carga puntual q colocada cerca de un plano conductor de extensión infinita. Para formular el problema matemáticamente, consideremos el plano conductor de tal forma que coincida con el plano yz , y supongamos que la carga puntual está sobre el eje x en el punto $x = d$ (véase la Fig. 3.3a). El potencial se ajusta a lo indicado en la ecuación (3-31), con

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \quad (3-32)$$

Solución: Considere un problema diferente, el de dos cargas puntuales (q y $-q$) separadas por una distancia $2d$, como en la figura 3.3(b). El potencial de estas dos cargas,

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (3-33)$$

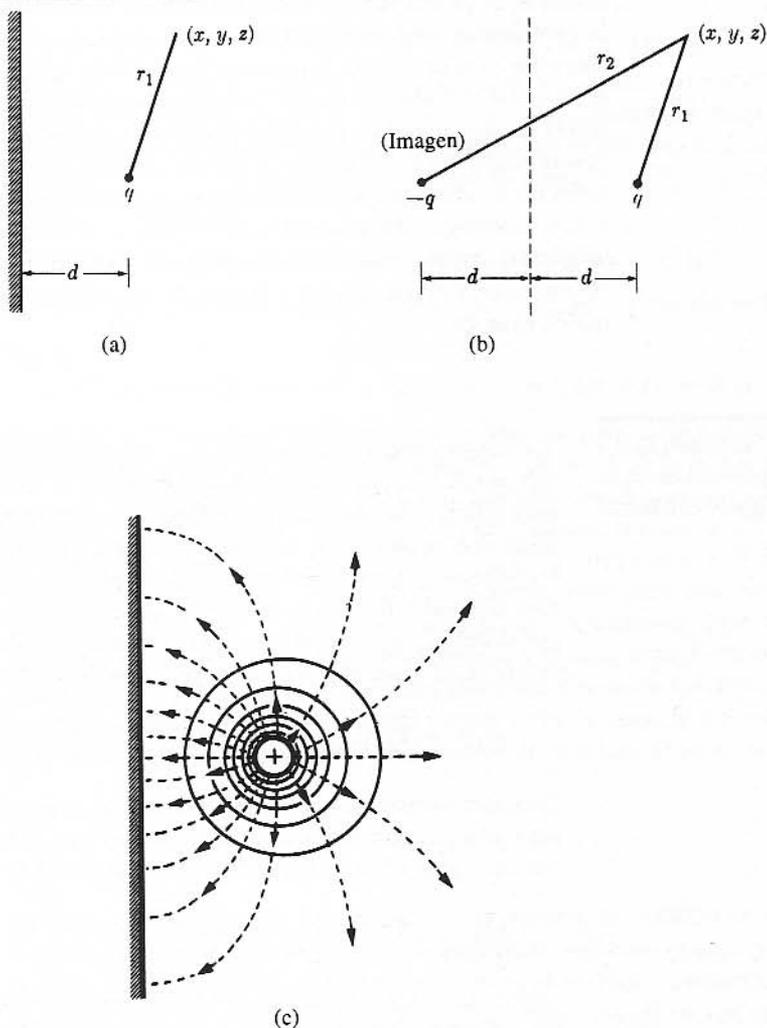
no sólo satisface la ecuación de Laplace en todos los puntos exteriores a las cargas, sino que también se reduce a una constante (es decir, cero) sobre el plano que biseca perpendicularmente el segmento que une las dos cargas. Así pues, la ecuación (3-33) satisface las condiciones en la frontera del problema original. Debido a que las soluciones de la ecuación de Laplace son únicas, la ecuación (3-33) es el potencial correcto en todo el semiespacio del lado derecho del plano conductor. La carga $-q$ da origen al potencial:

$$\varphi_2(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \quad (3-34)$$

Esta carga se llama *imagen* de la carga puntual q . Naturalmente, la imagen no existe en realidad, y la ecuación (3-32) *no da* correctamente el potencial en el interior ni a la izquierda del plano conductor de la figura 3.3(a).

FIGURA 3.3

Problema de una carga puntual y de un plano conductor resuelto mediante el método de la carga imagen: (a) problema original; (b) situación de la carga imagen; (c) líneas de fuerza (líneas punteadas) y superficies equipotenciales (líneas continuas).



El campo eléctrico \mathbf{E} en la región de la derecha del plano conductor puede obtenerse como menos el gradiente de la ecuación (3-33). Ya que la superficie del plano conductor representa una zona interfacial que relaciona dos soluciones de la ecuación de Laplace, a saber, $\varphi = 0$ y la ecuación (3-33), la discontinuidad en el campo eléctrico se tiene en cuenta mediante una densidad de carga superficial σ sobre el plano:

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3-35)$$

Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales correspondientes al problema original se ilustran en la figura 3.3(c). Éstas son las mismas líneas de fuerza y superficies equipotenciales que corresponden al problema de dos cargas puntuales de la figura 3.3(b), excepto que en este último caso las líneas de flujo continuarían dentro de la parte izquierda del semiplano. De la figura es evidente que *todas* las líneas de flujo eléctrico que normalmente convergen en la carga imagen son interceptadas por el plano en la figura 3.3(c). En consecuencia, la carga total sobre el plano es igual a la de la carga imagen $-q$. Este mismo resultado puede obtenerse matemáticamente integrando la ecuación (3-35) sobre toda la superficie (véase el problema 3.14).

Es evidente que la carga puntual q ejerce una fuerza atractiva sobre el plano, debido a que la carga superficial inducida es de signo contrario. Por la ley de Newton de la acción y la reacción, esta fuerza es igual en magnitud a la fuerza ejercida sobre q por el plano. Puesto que la carga puntual no experimenta ninguna fuerza debida a su propio campo,

$$\mathbf{F} = -q \nabla \varphi_2 \quad (3-36)$$

que es exactamente la fuerza ejercida sobre ella por la carga imagen.

EJEMPLO 3.2

Carga puntual cerca de una esquina que forma un ángulo recto

Otro problema que puede resolverse sencillamente en términos de imágenes es el de determinar el campo eléctrico de una carga puntual q en la vecindad de la intersección de dos planos conductores en ángulo recto (véase la Fig. 3.4a).

Solución: Las posiciones de las cargas imagen necesarias se muestran en la figura 3.4(b). Se ve de inmediato que los dos planos, ilustrados con líneas punteadas en la figura, son superficies de potencial cero debido a los potenciales combinados de q y las tres cargas imagen.

La dificultad principal al resolver un problema por el método de la carga imagen es el de encontrar un grupo de cargas imagen que produzca superficies equipotenciales en los conductores. El problema es directo sólo para casos en los que la geometría es sencilla. Tal es el caso del siguiente ejemplo.

FIGURA 3.4

Carga puntual en una esquina que forma un ángulo recto.

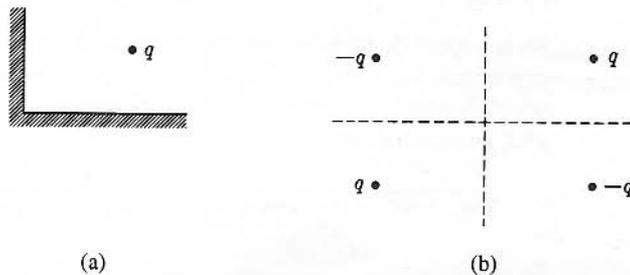
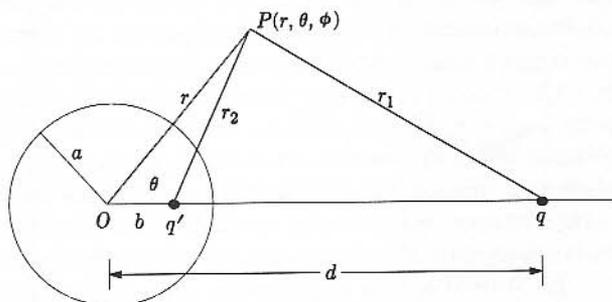


FIGURA 3.5

Carga puntual q en la vecindad de una esfera conductora; q' es la carga imagen.



EJEMPLO 3.3

Carga puntual y esfera conductora

Consideremos el problema planteado por una carga q en la vecindad de una esfera conductora; se requiere una carga imagen sencilla para hacer que la esfera sea una superficie de *potencial cero*. Se necesita una carga imagen adicional para cambiar el potencial de la esfera a algún otro valor constante.

Solución: Determinaremos primero la magnitud y la posición de la imagen q' que, junto con la carga puntual q , produce un potencial cero en todos los puntos de la esfera. La geometría de la situación se ilustra en la figura 3.5. La carga puntual q está a una distancia d del centro de la esfera y el radio de la esfera es a . Es evidente de la simetría del problema que la carga imagen q' estará en la recta que pasa por q y por el centro de la esfera.

Los resultados deseados se obtienen con mayor facilidad utilizando coordenadas esféricas, con el origen de coordenadas en el centro de la esfera. Sea el eje polar la recta que une q con el origen. La distancia b y la magnitud de q' se han de determinar en función de las cantidades especificadas q , d , a . El potencial en un punto arbitrario P debido a q y q' está dado por

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta, \phi) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \right]\end{aligned}\quad (3-37)$$

En la superficie de la esfera, $r = a$ y $\varphi(a, \theta, \phi) = 0$ para toda θ y ϕ . Pero de la expresión (3-37), $\varphi(a, \theta, \phi)$ puede igualarse a cero para toda θ sólo si las dos raíces cuadradas son proporcionales la una a la otra, lo que requiere que $b = a^2/d$, puesto que entonces

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = \frac{a}{d} \sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}$$

En consecuencia,

$$b = \frac{a^2}{d} \quad (3-38)$$

y, además,

$$q' = -\frac{a}{d}q \quad (3-39)$$

Estas ecuaciones son útiles para determinar la posición y la magnitud de la primera carga imagen.

Una segunda carga imagen q'' puede colocarse en el centro de la esfera sin destruir la naturaleza equipotencial de la superficie esférica. La magnitud de q'' es arbitraria; puede ajustarse de modo que esté de acuerdo con las condiciones en la frontera del problema. Con esto hemos encontrado una solución completa para el problema de la esfera conductora con una carga puntual; el potencial en todos los puntos exteriores a la esfera es

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r} \right] \quad (3-40)$$

El potencial propio del conductor esférico es

$$\varphi(a, \theta, \phi) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (3-41)$$

y la densidad de carga superficial sobre la esfera es

$$\sigma(\theta, \phi) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (3-42)$$

Todas las líneas de fuerza que normalmente convergen sobre las cargas son interceptadas por la esfera. Por tanto, la carga total sobre la esfera, Q , es igual a la suma de las cargas imagen:

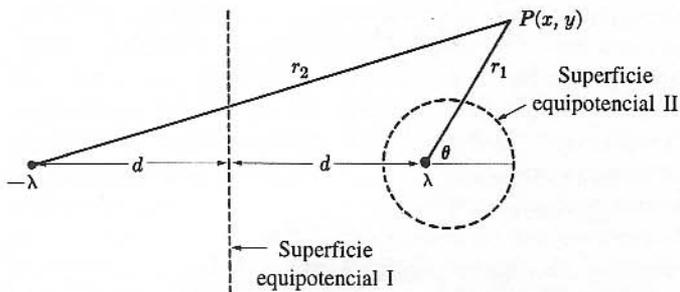
$$Q = q' + q'' \quad (3-43)$$

Este resultado puede verificarse por integración directa de la ecuación (3-42).

Casos especiales de interés son la esfera *puesta a tierra*: $\varphi(a) = 0$, $q'' = 0$; y el *conductor esférico descargado*: $q'' = -q'$.

FIGURA 3.6

Dos líneas de carga infinitamente largas y paralelas (de carga λ y $-\lambda$ por unidad de longitud) se muestran perpendiculares al plano del papel.



3.10 LÍNEAS DE CARGA Y LÍNEAS IMAGEN

Hasta ahora, nuestra técnica de imágenes se ha limitado a problemas en los que intervienen cargas puntuales y, en consecuencia, imágenes puntuales. En esta sección consideraremos varios problemas que pueden resolverse por medio de cargas imagen lineales. Consideremos dos líneas de carga infinitamente largas y paralelas, con cargas λ y $-\lambda$ por unidad de longitud, respectivamente, tal como se muestra en la figura 3.6. El potencial en cualquier punto está dado por

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln r_1 - \ln r_2] = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (3-44)$$

donde r_1 y r_2 son las distancias perpendiculares desde el punto hasta las dos líneas de carga. Los equipotenciales se obtienen igualando la ecuación (3-44) a una constante, procedimiento que es equivalente a exigir que

$$\frac{r_1}{r_2} = M \quad (3-45)$$

siendo M una constante. Por tanto, los equipotenciales pueden determinarse con la ecuación (3-45).

El equipotencial que corresponde a $M = 1$ es el plano situado a la mitad de la distancia que hay entre las dos líneas de carga e identificado como la superficie equipotencial I en la figura 3.6. El potencial del plano es cero. En consecuencia, el problema de una línea de carga larga orientada paralelamente a un plano conductor se ha resuelto eficazmente. El potencial en la mitad del espacio está dado correctamente por la ecuación (3-44). Supongamos que la línea de carga mostrada en la parte derecha de la figura es la carga especificada, que está a una distancia d del plano conductor. Entonces la línea de carga del lado izquierdo de la figura desempeña el papel de una imagen. Nuevamente, la carga total sobre el plano es igual a la de la carga imagen.

Consideremos a continuación superficies equipotenciales que corresponden a otros valores de M . La forma general de la superficie puede hallarse expresando r_1 y r_2 en coordenadas rectangulares. Por comodidad, elegimos el origen del sistema coordenado en la línea de carga positiva, y hacemos que esta carga coincida con el eje z ; la segunda línea de carga está colocada en $x = -2d$, $y = 0$. Ahora

$$x = -2d, \quad y = 0.$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2$$

y

$$r_2^2 = (x + 2d)^2 + y^2$$

de modo que la ecuación (3-45) se convierte, después de alguna manipulación algebraica, en

$$x^2 + y^2 - \frac{4M^2xd}{1 - M^2} = \frac{4M^2d^2}{1 - M^2} \quad (3-46)$$

Ésta es la ecuación de un cilindro circular que se extiende paralelo al eje z . Si M es menor que uno, el cilindro rodea la línea de carga positiva como lo hace la superficie equipotencial II de la figura. El eje del cilindro pasa por el punto

$$x = \frac{2M^2d}{1 - M^2}, \quad y = 0 \quad (3-47)$$

y el radio del cilindro es

$$R_c = \frac{2Md}{1 - M^2} \quad (3-48)$$

EJEMPLO 3.4
Cilindro conductor cargado con orientación paralela a un plano conductor

Estamos ahora en posición de resolver varios problemas interesantes en los que intervienen conductores cilíndricos, pero sólo se expondrá uno de este tipo. Consideremos el problema de un conductor cilíndrico largo en la vecindad de un plano conductor y orientado paralelamente a éste. El cilindro tiene carga λ por unidad de longitud. La figura 3.6 puede servir para ilustrar el problema; los dos conductores coinciden con las superficies punteadas.

Solución: Ambas líneas de carga son imágenes en este caso, y el potencial en la región que rodea al cilindro y que está a la derecha del plano está dado por la ecuación (3-44). Es evidente que la carga inducida sobre el plano es igual a $-\lambda$ por unidad de distancia en la dirección z .

3.11 SISTEMA DE CONDUCTORES Y COEFICIENTES DE POTENCIAL

En las secciones anteriores se han analizado varios métodos importantes para obtener soluciones de la ecuación de Laplace. Aunque son de carácter general, por consideraciones prácticas estos métodos se limitan a problemas en los que los conductores tienen formas más bien sencillas. Cuando sus formas son complicadas, una solución matemática completa en forma analítica queda descartada. Sin embargo, se pueden sacar algunas conclusiones con respecto al sistema simplemente porque el potencial satisface la ecuación de Laplace. De hecho, demostraremos aquí que existe una relación lineal entre el potencial de uno de los conductores y las cargas de los diversos conductores del sistema. Los coeficientes en esta relación, los llamados *coeficientes de potencial*, son funciones sólo de la geometría (específicamente, no dependen ni de las cargas ni de los potenciales) y, aunque no siempre se puedan calcular analíticamente, pueden determinarse numéricamente o a partir de experimentos.

Supongamos que hay N conductores en una geometría fija. Consideremos que todos los conductores están descargados excepto el j , que tiene carga Q_j . La solución adecuada de la ecuación de Laplace en el espacio exterior a los conductores estará

El campo electrostático en medios dieléctricos

Hasta ahora hemos ignorado problemas en los que intervienen medios dieléctricos y hemos tratado casos en los que el campo eléctrico es producido exclusivamente por cargas en una distribución determinada o por cargas libres sobre la superficie de los conductores. En este capítulo trataremos de remediar esta situación considerando el caso más general.

Un *material dieléctrico ideal* es aquel que no tiene cargas libres. Sin embargo, todos los medios materiales se componen de moléculas; éstas a su vez se componen de entidades cargadas (núcleos atómicos y electrones) y las moléculas de los dieléctricos son, de hecho, afectadas por la presencia de un campo eléctrico. El campo eléctrico produce una fuerza que se ejerce sobre cada partícula cargada, empujando las partículas positivas en la dirección del campo y las negativas en sentido opuesto, de modo que las partes positivas y negativas de cada molécula se desplazan de sus posiciones de equilibrio en sentidos opuestos. Sin embargo, estos desplazamientos están limitados (en la mayoría de los casos, a fracciones muy pequeñas de un diámetro molecular) por intensas fuerzas recuperadoras que se forman al cambiar la configuración de las cargas de la molécula. El término "carga ligada", en contraste con el de "carga libre" de un conductor, se usa a veces para poner énfasis en el hecho de que tales cargas moleculares no son libres para moverse muy lejos o ser extraídas del material dieléctrico. El efecto total, desde el punto de vista macroscópico, es más fácil de visualizar como un desplazamiento de toda la carga positiva en el dieléctrico con respecto a la carga negativa. Se dice entonces que el dieléctrico está polarizado.

Un dieléctrico *polarizado*, aun cuando sea eléctricamente neutro en promedio, produce indudablemente un campo eléctrico en los puntos exteriores e interiores del dieléctrico. Como resultado, nos vemos en una situación que parece ser algo embarazosa: la polarización del dieléctrico depende del campo eléctrico total en el medio, pero una parte del campo eléctrico es producida por el dieléctrico mismo. Además, el campo eléctrico distante del dieléctrico puede modificar la distribución de carga libre sobre los cuerpos conductores y esto, a su vez, producirá

modificaciones en el campo eléctrico *en el dieléctrico*. El propósito principal de este capítulo es desarrollar métodos generales para manejar esta curiosa situación.

4.1

POLARIZACIÓN

En esta sección consideraremos un pequeño elemento de volumen Δv de un medio dieléctrico que, como un todo, es eléctricamente neutro. Si el medio está polarizado, entonces se ha producido una separación de cargas positivas y negativas y el elemento de volumen se caracteriza por un momento dipolar eléctrico

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta v} \mathbf{r} dq \quad (4-1)$$

Según la sección 2.9, esta cantidad determina el campo eléctrico producido por Δv en puntos distantes (es decir, a distancias grandes comparadas con las dimensiones del elemento de volumen).

Como $\Delta \mathbf{p}$ depende del tamaño del elemento de volumen, es más conveniente trabajar con \mathbf{P} , el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen. \mathbf{P} generalmente se llama *polarización eléctrica* o simplemente *polarización* del medio.

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta v} \quad (4-2)$$

Hablando estrictamente, \mathbf{P} debe definirse como el límite de esta cantidad a medida que Δv se hace muy pequeño desde el punto de vista macroscópico. De esta forma, \mathbf{P} se convierte en una función puntual $\mathbf{P}(x, y, z)$.

Las dimensiones de \mathbf{P} son carga por unidad de área; en unidades mks, C/m^2 .

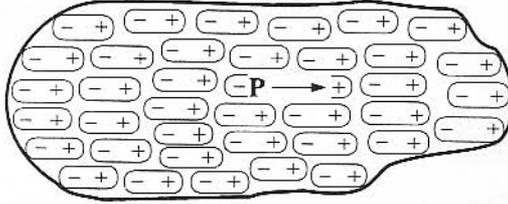
Es evidente que $\mathbf{P}(x, y, z)$ es una cantidad vectorial que, en cada elemento de volumen, tiene la dirección de $\Delta \mathbf{p}$. Esta cantidad, a su vez, tiene la dirección del desplazamiento de la carga positiva con respecto a la carga negativa (véase la Fig. 4.1).

Aun cuando Δv se considere muy pequeño desde el punto de vista macroscópico, contiene muchas moléculas. Puesto que una molécula es una de las pequeñas entidades eléctricamente neutras que forman el material dieléctrico, a veces conviene hablar del momento dipolar eléctrico \mathbf{p}_m de una sola molécula; esto es,

$$\mathbf{p}_m = \int_{\text{molécula}} \mathbf{r} dq \quad (4-3)$$

FIGURA 4.1

Porción de material dieléctrico polarizado. Cada elemento de volumen se representa como un dipolo $\Delta \mathbf{p}$.



Es evidente de la ecuación (4-1) que el momento dipolar asociado con Δv está dado por $\Delta \mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_m$, donde la suma incluye todas las moléculas contenidas en el elemento Δv . En consecuencia,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta v} \sum_m \mathbf{p}_m \quad (4-4)$$

Este enfoque se desarrollará con más detalle en el capítulo 5.

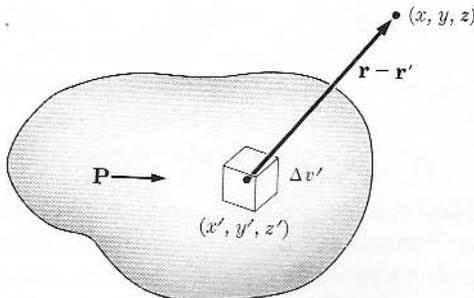
Aunque la figura 4.1 represente cada elemento de volumen del dieléctrico polarizado como un pequeño dipolo, puede ser más instructivo visualizar el dieléctrico en términos de sus moléculas e imaginar que cada dipolo de la figura 4.1 representa una sola molécula.

4.2 CAMPO FUERA DE UN MEDIO DIeléctrico

Consideremos una porción finita de material dieléctrico polarizado, es decir, que está caracterizada en cada punto \mathbf{r}' por una polarización $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$. La polarización da origen a un campo eléctrico, y nuestro problema es calcular este campo en un punto \mathbf{r} que está fuera de la masa del dieléctrico (véase la Fig. 4.2). Como en el capítulo 2, encontraremos más conveniente calcular primero el potencial $\phi(\mathbf{r})$ y luego obtener el campo eléctrico como menos el gradiente de ϕ .

FIGURA 4.2

El campo eléctrico en (x, y, z) se puede calcular sumando las contribuciones debidas a los diversos elementos de volumen $\Delta v'$ en V_0 . La superficie de V_0 se denota con S_0 .



Cada elemento de volumen $\Delta v'$ del medio dieléctrico se caracteriza por un momento dipolar $\Delta = \mathbf{P} \Delta v'$ y, como la distancia entre (x, y, z) y $\Delta v'$ es grande comparada con las dimensiones de $\Delta v'$, este momento dipolar determina completamente la contribución de las cargas en $\Delta v'$ al potencial:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\Delta\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Delta v'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4-5)$$

Aquí, $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ es el vector, dirigido hacia afuera de $\Delta v'$, cuya magnitud está dada por

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (4-6)$$

El potencial total en el punto \mathbf{r} se obtiene sumando las contribuciones de todas las partes del dieléctrico:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4-7)$$

Este resultado es correcto, y φ puede calcularse directamente a partir de la ecuación (4-7) si se conoce la forma funcional de \mathbf{P} . Sin embargo, nos interesa expresar la ecuación (4-7) en una forma diferente por medio de una transformación matemática sencilla.

Si $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ está dado por la ecuación (4-6), entonces

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4-8)$$

como puede verse por la aplicación directa del operador gradiente en coordenadas cartesianas. El operador ∇' contiene derivadas con respecto a las coordenadas primas. En ciertas circunstancias, es conveniente efectuar un operador gradiente con respecto a las coordenadas no primas; esto se indicará en la forma usual con ∇ . Evidentemente, ∇' operando sobre una función de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es igual a $-\nabla$ operando sobre la misma función. Necesitaremos el operador ∇ más adelante para obtener el campo eléctrico en un punto \mathbf{r} . Sin embargo, al resolver la integral (4-7) sobre el volumen dieléctrico V_0 , el punto \mathbf{r} se mantiene fijo. Por tanto, el integrando de (4-7) puede transformarse mediante la ecuación (4-8):

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (4-9)$$

La ecuación (4-9) puede transformarse aún más mediante la identidad vectorial (1.1.7) de la tabla 1.1:

$$\nabla' \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla' \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla' f \quad (4-10)$$

donde f es cualquier función puntual escalar y \mathbf{F} es una función puntual vectorial arbitraria. Aquí, nuevamente, la prima indica derivación con respecto a las coordenadas primas. Si $f = (1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ y $\mathbf{F} = \mathbf{P}$, el integrando, o sea, la ecuación (4-9), se convierte en

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P} \quad (4-11)$$

Finalmente, el potencial, (Ec. 4-7), puede expresarse como

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4-12)$$

donde la integral de volumen de $\nabla' \cdot (\mathbf{P}/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ha sido sustituida por una integral de superficie aplicando el teorema de la divergencia, y \mathbf{n} es la normal hacia afuera del elemento de superficie da' (hacia afuera significa fuera del dieléctrico).

Las cantidades $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ y $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ que aparecen en las integrales de la ecuación (4-12) son dos funciones escalares obtenidas a partir de la polarización \mathbf{P} . Es conveniente asignar a estas cantidades símbolos especiales. Como tienen las dimensiones de carga por unidad de área y carga por unidad de volumen, respectivamente, escribiremos

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n \quad (4-13)$$

y

$$\rho_P \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4-14)$$

Llamaremos a σ_P y ρ_P *densidades de carga de polarización*.

La densidad superficial de carga de polarización está dada por la componente de polarización normal a la superficie, y la densidad de carga volumétrica de la polarización es una medida de la no uniformidad de la polarización dentro del material.

El potencial debido al material dieléctrico

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S_0} \frac{\sigma_P da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_P dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (4-15)$$

se expresa ahora de tal manera que es evidente que proviene de una distribución de carga. En otras palabras, el material dieléctrico se ha sustituido por una distribución adecuada de cargas de polarización.

Aunque la ecuación (4-15) se ha obtenido por medio de una transformación matemática, debería ser posible entender σ_P y ρ_P con argumentos puramente físicos. Que existe una densidad de carga superficial σ_P es evidente de la figura 4.1, en la que se ve que esta carga se forma a partir de los extremos de dipolos con igual orientación. De este modo, se crea una densidad de carga en cada superficie que no sea paralela al vector de polarización. Volviendo ahora a ρ_P , es de esperar que $\rho_P \Delta v'$ represente el *exceso de carga* o la *carga neta* del elemento de volumen $\Delta v'$. Puede verse que éste es realmente el caso de la siguiente manera: definamos dos densidades de carga

ρ^+ y ρ^- como representantes de la carga total positiva y de la carga total negativa por unidad de volumen, respectivamente. Esto es, ρ^+ representa todos los núcleos atómicos por unidad de volumen del dieléctrico y, de forma similar, ρ^- representa todos los electrones. En el estado no polarizado, cada elemento de volumen del dieléctrico es eléctricamente neutro. Por tanto,

$$\rho_0^+(x', y', z') + \rho_0^-(x', y', z') = 0 \quad (4-16)$$

donde el subíndice cero representa las densidades en la configuración no polarizada. Supongamos que, como consecuencia de la polarización, la carga positiva es desplazada un $\delta^+(x, y, z)$ y la negativa un $\delta^-(x, y, z)$. La carga positiva que atraviesa un elemento de área da' es $\rho_0^+ \delta^+ \cdot \mathbf{n} da'$. Por tanto la ganancia de carga positiva del elemento de volumen $\Delta v'$ durante el proceso de polarización es

$$-\oint_{\Delta S} \rho_0^+ \delta^+ \cdot \mathbf{n} da' \quad (4-17)$$

donde ΔS es la superficie que limita $\Delta v'$. Análogamente, el desplazamiento de la carga negativa aumenta la carga (disminuye la carga negativa) en $\Delta v'$ en

$$\oint_{\Delta S} (-\rho_0^-) \delta^- \cdot \mathbf{n} da \quad (4-18)$$

La ganancia total en la carga del elemento de volumen $\Delta v'$ es la suma de las ecuaciones (4-17) y (4-18) y, como consecuencia de (4-16), puede expresarse en la forma

$$-\oint_{\Delta S} \rho_0^+ (\delta^+ - \delta^-) \cdot \mathbf{n} da' = -\nabla \cdot [\rho_0^+ (\delta^+ - \delta^-)] \Delta v' \quad (4-19)$$

Pero $\delta^+ - \delta^-$ es sólo el desplazamiento relativo de las densidades de carga positiva y negativa y, por tanto, $\rho_0^+ (\delta^+ - \delta^-)$ es equivalente a lo que hemos llamado polarización \mathbf{P} . Así pues, $\rho_p \Delta v'$ es la carga neta en un elemento de volumen del dieléctrico polarizado.

A primera vista puede parecer bastante extraño que, habiendo empezado con elementos de volumen eléctricamente neutros de material dieléctrico, finalicemos con elementos de volumen que tienen una carga neta. Según nuestro punto de vista original, el dieléctrico se compone de dipolos elementales $\Delta \mathbf{p}$, y era esencial que cada $\Delta \mathbf{p}$ fuera eléctricamente neutro para que la ecuación (4-5) diera el potencial correctamente. Ahora vemos que mientras $\nabla \cdot \mathbf{P}$ no se anule, los elementos de volumen individuales parecen estar cargados. El origen de esta aparente paradoja se encuentra en la transformación matemática (4-11). La contribución de cada elemento de volumen se transforma en un término de volumen diferente y en un término de superficie. La carga total del volumen y de la superficie del elemento es aún cero, pero cuando reunimos varios elementos de volumen para formar una pieza macroscópica de material dieléctrico, encontramos que las contribuciones al potencial de las diversas "superficies internas" se eliminan. Nos quedan efectivamente elementos de volumen cargados y una contribución superficial de la frontera real del cuerpo dieléctrico.

La carga de polarización total de un cuerpo dieléctrico,

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dv' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da' \quad (4-20)$$

debe ser igual a cero, ya que nuestra premisa fue que el dieléctrico, como un todo, era eléctricamente neutro. Este resultado es evidente de la forma de la ecuación (4-20), que claramente se anula como consecuencia del teorema de la divergencia.

Tenemos ahora dos expresiones distintas para el potencial electrostático $\varphi(\mathbf{r})$ generado por una muestra de dieléctrico polarizado, es decir, las ecuaciones (4-7) y (4-15). Ambas son correctas, pero veremos que la última expresión es la más conveniente en la mayoría de los casos. El campo eléctrico \mathbf{E} puede obtenerse como menos el gradiente de la ecuación (4-15). Como φ es una función de las coordenadas (x, y, z) , el gradiente adecuado es $-\nabla$. Las coordenadas no primas aparecen sólo en la función $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. En consecuencia, observando que $\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla'(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ y empleando la ecuación (4-8), obtenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{S_0} \sigma_P \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' + \int_{V_0} \rho_P \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \right] \quad (4-21)$$

4.3

EL CAMPO ELÉCTRICO DENTRO DE UN DIELECTRICO

Antes de que podamos escribir una expresión para el campo eléctrico dentro de un medio polarizado, es necesario definir este campo eléctrico con precisión. Lo que nos interesa es el *campo eléctrico macroscópico*, es decir, el campo eléctrico promedio en una pequeña región del dieléctrico que, sin embargo, contiene un gran número de moléculas. Un enfoque alternativo, y tal vez preferible, es definir el campo eléctrico directamente en términos de un experimento macroscópico.

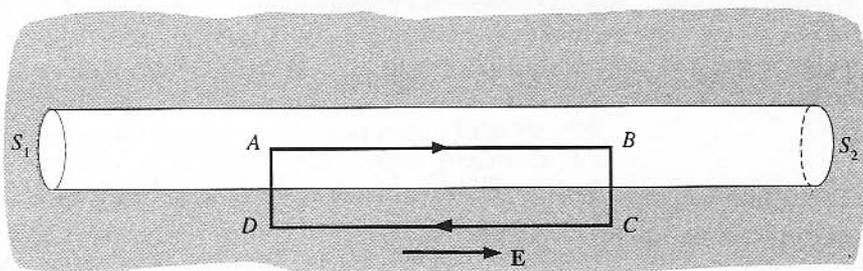
El *campo eléctrico (macroscópico)* es la fuerza por unidad de carga sobre una carga de prueba sumergida en el dieléctrico, en el límite en el que la carga de prueba es tan pequeña que no afecta, por sí misma, la distribución de carga.

Esta carga de prueba debe ser dimensionalmente pequeña desde el punto de vista macroscópico (lo que llamaremos carga "puntual"), pero será grande comparada con el tamaño de una molécula.

Aunque el enunciado anterior es la definición fundamental del campo eléctrico macroscópico \mathbf{E} , es difícil emplear esta definición directamente para obtener una expresión para el campo, puesto que tendríamos que calcular la fuerza sobre un cuerpo cargado de gran tamaño y luego ir al límite a medida que disminuya el tamaño del objeto. En consecuencia, vemos que conviene emplear otra propiedad del campo eléctrico para ayudarnos a obtener la expresión analítica que estamos buscando.

FIGURA 4.3

La trayectoria $ABCD$ está contenida parcialmente en la cavidad en forma de aguja y parcialmente en el dieléctrico. En un dieléctrico isótropo (véase la Sec. 4.5) la polarización \mathbf{P} tiene la dirección de \mathbf{E} , de modo que, para la orientación mostrada de la aguja, $\sigma_p = 0$ sobre las paredes cilíndricas. En un dieléctrico anisótropo, σ_p no es necesariamente cero, pero su valor no influye en la componente longitudinal del campo eléctrico en la cavidad.



De esta forma, obtendremos \mathbf{E} en función de las cargas de polarización del medio. Posteriormente, en la sección 4.9, se demostrará que la cantidad que hemos llamado \mathbf{E} concuerda realmente con la fundamental “definición de fuerza”.

El campo electrostático en un dieléctrico debe tener las mismas propiedades básicas que encontramos válidas para \mathbf{E} en el vacío; en particular, \mathbf{E} es un campo conservativo y, en consecuencia, puede derivarse de un potencial escalar. Así pues,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

o, en forma equivalente,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Aplicaremos esta última ecuación a la trayectoria $ABCD$ mostrada en la figura 4.3, en la que el segmento AB está en una cavidad con forma de aguja sacada del dieléctrico, y el segmento CD está dentro del dieléctrico mismo. Como los segmentos AD y BC pueden hacerse arbitrariamente pequeños, la integral de línea se reduce a

$$\mathbf{E}_v \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{l} = 0$$

o, en forma equivalente,

$$E_{vt} = E_{dt} \quad (4-22)$$

donde los subíndices v y d se refieren, respectivamente, al vacío y al dieléctrico, y el subíndice t indica la componente tangencial.

La ecuación (4-22) es válida independientemente de la orientación de la cavidad en forma de aguja. Si la “aguja” se orienta hacia la dirección de \mathbf{E} , entonces $E_{dt} = E_d'$

Además, por simetría, el campo dentro de la cavidad es paralelo a la dirección de la aguja, esto es, $E_{\text{int}} = E_{\text{ext}}$. Esto nos conduce a la siguiente conclusión importante*:

El *campo eléctrico en un dieléctrico* es igual al campo eléctrico dentro de una cavidad en forma de aguja contenida en el dieléctrico, con el eje de la cavidad orientado paralelamente a la dirección del campo eléctrico.

Evidentemente, el problema de calcular el campo eléctrico dentro de un dieléctrico se reduce a calcular el campo eléctrico en el interior de una cavidad en forma de aguja en el dieléctrico. Pero el campo eléctrico en dicha cavidad es un campo externo y, en consecuencia, puede calcularse mediante los resultados de la sección 4.2. Como en la sección 4.2, supondremos ahora que la polarización del dieléctrico es una función dada $\mathbf{P}(x', y', z')$ y calcularemos el potencial y el campo eléctrico que se originan de esta polarización. Tomando el punto \mathbf{r} del campo en el centro de la cavidad y empleando la ecuación (4-15), obtenemos para el potencial

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0-V_1} \frac{\rho_P(x', y', z') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_0+S'} \frac{\sigma_P(x', y', z') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (4-23)$$

donde $V_0 - V_1$ es el volumen del dieléctrico excluyendo la "aguja", S_0 es la superficie exterior del dieléctrico, y $S' = S_1 + S_2 + S_c$ son las superficies de la aguja. Pero de la figura 4.3 se ve que $\sigma_p = 0$ sobre la superficie cilíndrica S_c de la aguja. Además, la aguja puede hacerse arbitrariamente delgada, de modo que las superficies S_1 y S_2 tengan un área despreciable. Así pues, sólo las superficies exteriores del dieléctrico contribuyen y la integral de superficie de la ecuación (4-23) se vuelve idéntica en forma a la integral de superficie de la ecuación (4-15). La integral de volumen de la ecuación (4-23) excluye la cavidad. Sin embargo, la contribución de la cavidad a esta integral es despreciable, como puede verse fácilmente. La densidad de carga σ_p está limitada; la cantidad $dv'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ no diverge en el punto del campo (es decir, cuando $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$) porque el volumen en el punto es un cero de orden más alto que el límite $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$; y finalmente el volumen V_1 de la aguja puede hacerse arbitrariamente pequeño haciendo más fina la cavidad. Así pues, no necesitamos excluir el volumen V_1 y la ecuación (4-23) se vuelve semejante en la forma a la ecuación (4-15). En otras palabras, la ecuación (4-15) da el potencial $\varphi(\mathbf{r})$ independientemente de que el punto \mathbf{r} se localice dentro o fuera del dieléctrico.

* Este enunciado es estrictamente válido sólo para los dieléctricos isotrópicos (véase la Sec. 4.5). Para dieléctricos anisótropos, este argumento no es aplicable y nuestra conclusión debe generalizarse: el campo eléctrico dentro de un dieléctrico es igual a la componente longitudinal del campo eléctrico dentro de una cavidad en forma de aguja en el dieléctrico, siempre y cuando el eje de la cavidad esté orientado paralelamente a la dirección del campo eléctrico en el dieléctrico.

El campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ puede calcularse como menos el gradiente de la ecuación (4-23). Pero este campo difiere de la ecuación (4-21) sólo en una cantidad despreciable. Así pues, la ecuación (4-21) da la contribución del medio al campo eléctrico en \mathbf{r} , independientemente de si \mathbf{r} está dentro o fuera del medio.

Los cálculos indicados en las ecuaciones (4-15) y (4-21) son directos para los casos en que $\mathbf{P}(x, y, z)$ es una función de posición conocida. (Algunos ejemplos de este tipo se encuentran entre los problemas del final de este capítulo.) Sin embargo, en la mayoría de los casos la polarización se origina como respuesta a un campo eléctrico que se ha impuesto sobre el medio dieléctrico, esto es, $\mathbf{P}(x', y', z')$ es una función del campo eléctrico macroscópico total $\mathbf{E}(x', y', z')$ y, en estas condiciones, la situación es mucho más complicada. Primero, si bien es necesario conocer la forma funcional de $\mathbf{P}(\mathbf{E})$, esta forma se conoce experimentalmente en la mayoría de los casos y, por tanto, no causa dificultad. La complicación real se debe a que \mathbf{P} depende del campo eléctrico total, incluyendo la contribución del dieléctrico mismo, y esta contribución es la que deseamos evaluar. Así pues, no podemos determinar \mathbf{P} porque no conocemos \mathbf{E} , y viceversa.

Es evidente que se necesita un enfoque distinto del problema y éste se proporcionará en las siguientes secciones.

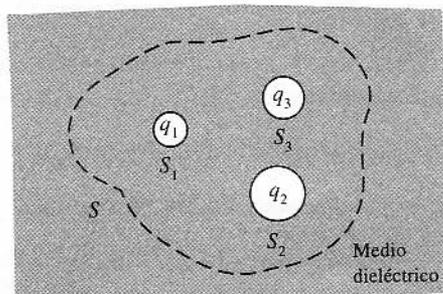
4.4 LEY DE GAUSS EN UN DIELECTRICO: EL DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

En el capítulo 2 dedujimos una relación importante entre el flujo eléctrico y la carga, es decir, la ley de Gauss. Esta ley establece que el flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada arbitraria es proporcional a la carga total encerrada por la superficie. Al aplicar la ley de Gauss a una región que contiene cargas inmersas en un dieléctrico, debemos tener cuidado en incluir todas las cargas dentro de la superficie gaussiana, tanto la carga de polarización como la carga que está inmersa.

En la figura 4.4, la superficie punteada S es una superficie cerrada imaginaria colocada dentro de un medio dieléctrico. Consideremos cierta cantidad de carga Q ,

FIGURA 4.4

Construcción de una superficie gaussiana S en un medio dieléctrico.



contenida en el volumen limitado por S , y supongamos que esta carga se encuentra en las superficies de los tres conductores en las cantidades q_1 , q_2 , y q_3 . Por la ley de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_P) \quad (4-24)$$

donde Q es la carga libre neta,

$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$

y Q_P es la carga de polarización neta:

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) \, dv \quad (4-25a)$$

Aquí V es el volumen del dieléctrico encerrado por S . No hay frontera del material dieléctrico en S , de modo que la integral de superficie en la ecuación (4-25a) *no contiene* una contribución de S .

Si transformamos la integral de volumen de (4-25a) en una integral de superficie por medio del teorema de la divergencia, debemos tener cuidado en incluir las contribuciones de todas las superficies que limitan V , es decir, S , S_1 , S_2 , y S_3 . Es evidente que las tres últimas contribuciones cancelarán el primer término de la ecuación (4-25a), de modo que

$$Q_P = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (4-25b)$$

Al combinar este resultado con (4-24), obtenemos

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} \, da = Q \quad (4-26)$$

La ecuación (4-26) establece que el flujo del vector $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, que pasa por una superficie cerrada, es igual a la carga neta inmersa en el volumen encerrado por la superficie. Esta cantidad vectorial es lo suficientemente importante como para merecer un nombre y un símbolo especial.

Por tanto, definiremos un nuevo campo vectorial macroscópico, \mathbf{D} , el *desplazamiento eléctrico*:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4-27)$$

el cual evidentemente tiene las mismas unidades que \mathbf{P} , carga por unidad de área.*

En función de \mathbf{D} , la ecuación (4-26) se convierte en

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = Q \quad (4-28)$$

* En unidades gaussianas, \mathbf{D} se define como $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$; \mathbf{D} , \mathbf{E} y \mathbf{P} tienen las mismas unidades de carga por unidad de área, y en el vacío $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

Este resultado se conoce generalmente como *ley de Gauss* para el desplazamiento eléctrico o, simplemente, *ley de Gauss*.

La ecuación (4-28) es aplicable a una región del espacio limitada por cualquier superficie cerrada S ; si la aplicamos a una pequeña región en la que toda la carga encerrada está distribuida como una densidad de carga ρ , entonces la ley de Gauss se convierte en

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = \rho \Delta V$$

Al dividir esta ecuación entre ΔV y tomar el límite, obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4-29)$$

Este resultado se llama a veces forma diferencial de la ley de Gauss.

La ventaja de expresar las formas integral y diferencial de la ley de Gauss, ecuaciones (4-28) y (4-29), en términos del vector \mathbf{D} , consiste en que sólo aparece explícitamente la carga Q o la densidad de carga ρ contenida en el medio dieléctrico. De aquí en adelante, llamaremos a la carga Q (o ρ) simplemente carga (o densidad de carga). Cuando sea necesario distinguirla de la carga de polarización Q_p del medio o de la carga *total* $Q + Q_p$, la carga Q se llamará *carga externa*. Por “externa” no queremos decir que esté necesariamente fuera del límite físico del material, sino que se añade a las cargas que forman la constitución atómica del material neutral.* Ya que en muchos problemas la carga externa es conocida, es una ventaja que el campo electrostático total en cada punto del medio dieléctrico se exprese como la suma de dos partes,

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}(x, y, z) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}(x, y, z) \quad (4-30)$$

donde el primer término, $(1/\epsilon_0)\mathbf{D}$, se relaciona con la densidad de carga externa mediante su divergencia, y el segundo término, $(-1/\epsilon_0)\mathbf{P}$, es proporcional a la polarización del medio. En el vacío, el campo eléctrico está dado completamente por el primer término de la ecuación (4-30).

* La carga externa se llama con mucha frecuencia carga “libre”, y la carga de polarización se usa algunas veces como sinónimo de carga ligada. En electrostática, esta confusión no causa problema alguno, ya que la carga externa en un conductor es libre (es decir, libre para moverse en los alrededores) y la carga de polarización está ligada. Sin embargo, la carga externa en un dieléctrico no es libre; si lo fuera, se movería rápidamente hacia la superficie y escaparía. Por lo demás, la mayoría de los medios conductores contienen, además de las cargas libres que determinan el comportamiento electrostático de un conductor, algunas cargas ligadas, que en otras circunstancias contribuyen a la polarización (Cap. 7). Con campos dependientes del tiempo (Cap. 19), es muy importante no confundir la diferencia entre carga externa y carga de polarización con la diferencia entre cargas libres y cargas ligadas. Por tanto, usaremos exclusivamente el término *carga externa* en este contexto.

4.5 SUSCEPTIBILIDAD ELÉCTRICA Y CONSTANTE DIELECTRICA

En la introducción de este capítulo se estableció que la polarización de un medio dieléctrico ocurre como respuesta al campo eléctrico en el medio. El grado de polarización depende no sólo del campo eléctrico, sino también de las propiedades de las moléculas que forman el material dieléctrico. Desde el punto de vista macroscópico, el comportamiento del material está completamente especificado por una relación, que se determina de forma experimental, llamada *ecuación constitutiva*, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$, donde \mathbf{E} es el campo eléctrico macroscópico. Esta expresión es una relación puntual, y si \mathbf{E} varía de un punto a otro en el material, entonces \mathbf{P} variará igualmente.

Para la mayoría de los materiales, \mathbf{P} se anula cuando \mathbf{E} se anula, lo cual es el comportamiento más común. En consecuencia, limitaremos nuestra explicación ahora a materiales de este tipo. (Los dieléctricos con una polarización permanente se estudiarán brevemente en la sección 5.4.) Además, si el material es isótropo, la polarización deberá tener el mismo sentido que el campo eléctrico que la provoca.

Estos resultados se resumen en la ecuación constitutiva

$$\mathbf{P} = \chi(E)\mathbf{E} \quad (4-31)$$

donde la cantidad escalar $\chi(E)$ se llama *susceptibilidad eléctrica* del material.

Gran variedad de materiales son eléctricamente isótropos; esta categoría incluye fluidos, sólidos policristalinos, sólidos amorfos y algunos cristales. Un tratamiento de las propiedades eléctricas de los materiales anisótropos está más allá del alcance de este texto.

Al combinar las ecuaciones (4-31) y (4-27), obtenemos una expresión para \mathbf{D} en medios isótropos:

$$\mathbf{D} = \epsilon(E)\mathbf{E} \quad (4-32)$$

$$\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E) \quad (4-33)$$

donde $\epsilon(E)$ es la *permitividad* del material. Es evidente que ϵ , ϵ_0 y χ tienen las mismas unidades.

Aunque hemos tenido el cuidado de expresar χ y ϵ en la forma $\chi(E)$ y $\epsilon(E)$, experimentalmente se encuentra que χ y ϵ son *a menudo* independientes del campo eléctrico, excepto quizá para campos muy intensos.

En otras palabras, χ y ϵ son a menudo constantes características del material. Materiales de este tipo se llamarán *dieléctricos lineales* y obedecen las relaciones

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad (4-31a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4-32a)$$

El comportamiento eléctrico de un material queda ahora especificado completamente, ya sea por la permitividad ϵ o por la susceptibilidad χ . Sin embargo, es más conveniente trabajar con una cantidad adimensional K definida como

$$\epsilon = K\epsilon_0 \quad (4-34)$$

K se llama coeficiente dieléctrico, o simplemente *constante dieléctrica*. De la ecuación (4-33) es evidente que

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad (4-35)$$

Las constantes dieléctricas para algunos materiales que se encuentran normalmente se dan en la tabla 4.1. Excepto para algunos ejemplos en los que se especifica la polarización \mathbf{P} del material, los problemas de este libro se refieren a dieléctricos lineales.

Si el campo eléctrico en un dieléctrico se hace muy intenso, empezará a sacar electrones de las moléculas y el material se convertirá en conductor. El máximo campo eléctrico que un dieléctrico puede soportar sin perforarse se llama *rigidez dieléctrica*. La rigidez dieléctrica $E_{\text{máx}}$ de algunas sustancias también se da en la tabla 4.1.

4.6 CARGA PUNTUAL EN UN FLUIDO DIELECTRICO

Uno de los problemas más sencillos que podríamos considerar en el que interviene un dieléctrico es el de una carga puntual q en un medio isótropo homogéneo de extensión infinita. El medio dieléctrico se supondrá lineal y se caracterizará por una constante dieléctrica K . Aunque este problema es bastante sencillo, veremos que es instructivo.

EJEMPLO 4.1 Campo eléctrico de una carga puntual en un fluido dieléctrico

Sea una carga puntual q colocada en el origen en un fluido dieléctrico con constante dieléctrica K . Encuentre el campo \mathbf{E} en el fluido.

Solución: Si la carga puntual q estuviera en el vacío, el campo eléctrico sería un campo radial puro. Pero ya que \mathbf{E} , \mathbf{D} y \mathbf{P} son paralelos entre sí en cada punto, la naturaleza radial del campo no cambia por la presencia del medio. Además, de la simetría del problema, \mathbf{E} , \mathbf{D} y \mathbf{P} pueden depender sólo de la distancia a partir

TABLA 4.1

Propiedades de materiales dieléctricos

Material	Constante dieléctrica K	Rigidez dieléctrica $E_{\text{máx}}$ (V/m)
Óxido de Aluminio	4.5	6×10^6
Vidrio*	5-10	9×10^6
Nylon	3.5	19×10^6
Polietileno	2.3	18×10^6
Cuarzo (SiO ₂)	4.3	
Cloruro de sodio	6.1	
Azufre	4.0	
Madera*	2.5-8.0	
Alcohol etílico (0°C)	28.4	
Benceno (0°C)	2.3	
Agua (destilada, 0°C)	87.8	
Agua (destilada, 20°C)	80.1	
Aire (1 atm)	1.00059	3×10^6
Aire (100 atm)	1.0548	
CO ₂ (1 atm)	1.000985	

* Para materiales como vidrio y madera, la composición química varía; de ahí el intervalo de constantes dieléctricas. No debe deducirse que el material es no lineal.

Fuente: Datos tomados de *Handbook of Chemistry and Physics*, 58ª ed., Cleveland, Ohio, CRC Press, Inc., 1978.

de la carga puntual y no de alguna coordenada angular. Apliquemos la ley de Gauss, ecuación (4-28), a una superficie esférica de radio r que se localice concéntricamente con respecto a q . Entonces

$$4\pi r^2 D = q$$

y

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

o

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r} \quad (4-36)$$

El campo eléctrico y la polarización pueden calcularse ahora con bastante facilidad:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi K \epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (4-37)$$

$$\mathbf{P} = \frac{(K - 1)q}{4\pi K r^3} \mathbf{r} \quad (4-38)$$

Por tanto, el campo eléctrico es menor en un factor K de lo que sería si no hubiera medio.

A estas alturas, convendrá mirar el problema con más detalle y tratar de ver por qué el dieléctrico ha debilitado el campo eléctrico. El campo eléctrico es originado por toda la carga, la de polarización y la externa. La carga externa es sólo la carga puntual q . Sin embargo, la carga de polarización se forma de dos contribuciones: una densidad volumétrica $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, y una densidad superficial $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ sobre la superficie del dieléctrico en contacto con la carga puntual. Empleando la ecuación (4-38) vemos que $\nabla \cdot \mathbf{P}$ se anula para $r \neq 0$, de modo que no hay densidad volumétrica de carga de polarización en este caso.

Nuestra carga puntual q es un punto en el sentido macroscópico. Si suponemos que es grande, tomando como base una escala molecular, podemos asignarle un radio b que, posteriormente, se hará tender a cero. La carga total superficial de polarización está dada entonces por

$$Q_p = \lim_{b \rightarrow 0} 4\pi b^2 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})_{r=b} = -\frac{(K - 1)q}{K} \quad (4-39)$$

La carga total,

$$Q_p + q = \frac{1}{K} q \quad (4-40)$$

aparece como una carga puntual desde el punto de vista macroscópico, y ahora se ve claro por qué el campo eléctrico es menor en un factor K de lo que sería si no hubiera medio. Un diagrama esquemático de la *carga puntual* q en un medio dieléctrico se ilustra en la figura 4.5

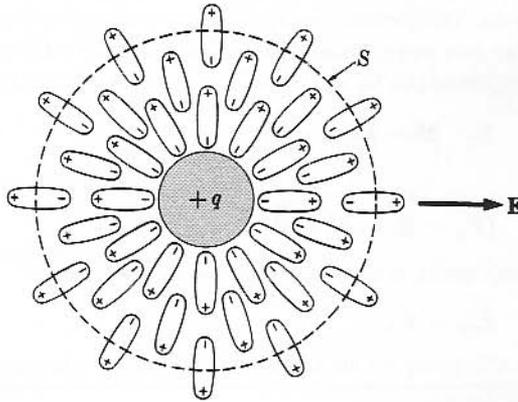
4.7 CONDICIONES EN LA FRONTERA PARA LOS VECTORES DE CAMPO

Antes de que podamos resolver problemas más complicados, debemos saber cómo varían los vectores de campo \mathbf{E} y \mathbf{D} al pasar por una zona interfacial entre dos medios. Los medios pueden ser dos dieléctricos con diferentes propiedades, o un dieléctrico y un conductor. El vacío puede considerarse como un dieléctrico de permitividad ϵ_0 .

Consideremos dos medios en contacto, 1 y 2, como se ilustra en la figura 4.6. Supondremos que hay una densidad superficial de carga externa, σ , que puede variar de un punto a otro en la zona interfacial. Construyamos ahora una pequeña superficie S en forma de caja de pastillas, que corta a la zona interfacial y encierra un área ΔS de dicha zona, siendo la altura de la caja de pastillas despreciablemente pequeña comparada con el diámetro de las bases. La carga encerrada por S es

FIGURA 4.5

Diagrama esquemático que muestra la orientación de las moléculas polarizadas en un medio dieléctrico que rodea una "carga puntual" q .



$$\sigma \Delta S + \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \times \text{volumen}$$

pero el volumen de la caja de pastillas es despreciablemente pequeño, de modo que el último término puede despreciarse. Aplicando la ley de Gauss a S , vemos que

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = \sigma \Delta S$$

o

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma \quad (4-41a)$$

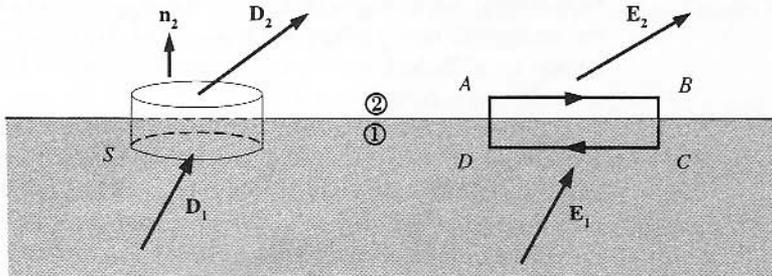
Puesto que \mathbf{n}_2 puede servir como la normal a la zona interfacial,

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (4-41b)$$

Así pues, la discontinuidad en la componente normal de \mathbf{D} está dada por la densidad superficial de la carga externa sobre la zona interfacial. O, dicho de otra forma, si no hay carga en la zona interfacial entre dos medios, la componente normal de \mathbf{D} es continua.

FIGURA 4.6

Las condiciones en la frontera para los vectores de campo en la zona interfacial entre dos medios pueden obtenerse aplicando la ley de Gauss a S e integrando $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ a lo largo de la trayectoria ABCDA.



Debido a que el campo electrostático \mathbf{E} puede obtenerse como menos el gradiente de un potencial, la integral de línea de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada se anula. Apliquemos este resultado a la trayectoria rectangular $ABCD$ de la figura 4.6. Sobre esta trayectoria, las longitudinales AB y CD se considerarán iguales a Δl y los segmentos AD y BC se supondrán despreciablemente pequeños. Por consiguiente,

$$\mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} + \mathbf{E}_1 \cdot (-\Delta \mathbf{l}) = 0$$

o

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0 \quad (4-42a)$$

En consecuencia, el resultado deseado es

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (4-42b)$$

Por tanto, la componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar una zona interfacial.

Los resultados anteriores se han obtenido para dos medios dieléctricos arbitrarios, pero vale la pena ver lo que predicen las ecuaciones para el caso en el que uno de los medios fuere un conductor. Como no hay una fuerza molecular recuperadora sobre las cargas libres de un conductor, parecería que para un conductor se tendría $\chi = \infty$ en la ecuación (4-31), y $\epsilon = \infty$ según la ecuación (4-33). Si el medio 1 se considera conductor, entonces concluimos que $\mathbf{E}_1 = 0$ cualesquiera que sean los valores (finitos) de \mathbf{P}_1 y \mathbf{D}_1 , como ya hemos deducido por diferentes razonamientos en el capítulo 2. Como \mathbf{E}_1 se anula, la ecuación (4-42b) resulta ser

$$E_{2t} = 0 \quad (4-43)$$

Sin embargo, el desplazamiento \mathbf{D}_1 no queda determinado por estas consideraciones. Si para nuestros propósitos lo fijáramos arbitrariamente en cero, la ecuación (4-41b) se convertiría en

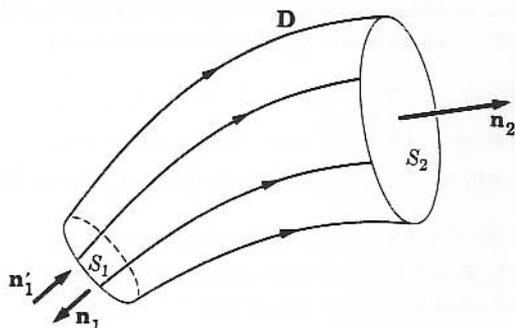
$$D_{2n} = \sigma \quad (4-44)$$

donde σ representa la densidad de carga superficial *total* sobre el conductor, pero no incluye la carga superficial de polarización en el dieléctrico. Un enfoque alternativo es resolver el problema del dieléctrico y luego considerar que K_1 tiende hacia infinito (véanse los problemas 4.12 y 4.14). Entonces σ representa la carga de polarización del conductor (más cualquier carga externa sobre el conductor). Físicamente, el resultado es el mismo. La ecuación (4-44) también se deduce de la ecuación (4-28) con el mismo argumento que condujo a la ecuación (2-31) (véase la Fig. 2.10). Observe que el campo en el dieléctrico es siempre perpendicular a la superficie del conductor, de acuerdo con la ecuación (4-43).

Basándose en argumentos puramente físicos, se hace evidente que el potencial ϕ debe ser continuo al atravesar una zona interfacial. Esto se debe a que la diferencia de potencial, $\Delta\phi$, entre dos puntos muy próximos es $-\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{l}$, donde $\Delta \mathbf{l}$ es la separación de los dos puntos, y de lo que ya se ha dicho anteriormente, no hay motivo para que \mathbf{E} sea infinito en una zona interfacial. En realidad, la continuidad del potencial

FIGURA 4.7

Tubo de flujo de desplazamiento.



es una condición en la frontera, pero no independiente de las ya deducidas. En la mayoría de los casos es equivalente a la ecuación (4-42b).

De este análisis y de los desarrollados en anteriores secciones se puede concluir que el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} está íntimamente relacionado con la carga externa. Nos gustaría demostrar ahora una propiedad importante de \mathbf{D} : que el flujo de \mathbf{D} es continuo en regiones que no contienen cargas externas. Para hacer esto, recurriremos nuevamente a la ley de Gauss. Enfoquemos nuestra atención en una región del espacio y construyamos *líneas de desplazamiento*, que son líneas imaginarias trazadas de tal manera que la dirección de una de ellas en cualquier punto es la dirección de \mathbf{D} en dicho punto. A continuación imaginemos un tubo de desplazamiento, un volumen limitado en sus lados por las líneas de \mathbf{D} , pero que no es cortado por éstas (véase la Fig. 4.7). El tubo está limitado en sus extremos por las superficies S_1 y S_2 . Al aplicar la ley de Gauss, obtenemos

$$\int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' \, da = Q \quad (4-45)$$

Si no hay carga externa en la región, entonces $Q = 0$ y la misma cantidad de flujo que entra al tubo por S_1 sale por S_2 . Cuando está presente la carga externa, ésta determina la discontinuidad en el flujo de desplazamiento. Por tanto, las líneas de desplazamiento terminan en las cargas externas. Las líneas de fuerza, por otra parte, terminan en las cargas externas o en las cargas de polarización.

4.8

PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN LOS QUE INTERVIENEN DIELECTRICOS

La ecuación fundamental que se ha estudiado en este capítulo es

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4-46)$$

donde ρ es la densidad de carga externa. Si los dieléctricos con los que estamos trabajando son lineales, isótropos y homogéneos, entonces $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, siendo ϵ una constante característica del material, y podemos escribir

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad (4-47)$$

Pero el campo electrostático \mathbf{E} puede deducirse de un potencial escalar φ , es decir,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

de modo que

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (4-48)$$

Por tanto, el potencial en el dieléctrico satisface la ecuación de Poisson. La única diferencia entre la ecuación (4-48) y la ecuación correspondiente para el potencial en el vacío consiste en que ϵ reemplaza a ϵ_0 (ρ significa densidad de carga externa en lugar de densidad de carga total).

En la mayoría de los casos de interés, el dieléctrico no contiene cargas distribuidas en todo su volumen, es decir, $\rho = 0$ dentro del material dieléctrico. La carga está sobre las superficies de los conductores o se concentra en forma de cargas puntuales que pueden, por cierto, estar dentro del dieléctrico. En estas circunstancias, el potencial satisface la ecuación de Laplace en todo el dieléctrico:

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (4-49)$$

En algunos problemas puede haber una densidad superficial de carga, σ , sobre la superficie de un cuerpo dieléctrico o en la zona interfacial entre dos materiales dieléctricos, pero esto no altera la situación y la ecuación (4-49) sigue siendo aplicable mientras $\rho = 0$.

Un problema electrostático en el que intervienen dieléctricos lineales, isótropos y homogéneos se reduce, por tanto, a hallar las soluciones de la ecuación de Laplace en cada medio y relacionar las soluciones en los diversos medios con las condiciones en la frontera de la sección anterior. Hay muchos problemas que pueden resolverse con este método; un ejemplo se expondrá aquí y otros adicionales se hallarán entre los problemas del final del capítulo.

EJEMPLO 4.2
Esfera dieléctrica
en un campo
eléctrico uniforme

Nos gustaría determinar cómo se modifican las líneas de fuerza cuando una esfera dieléctrica de radio a se coloca en una región del espacio que contiene un campo eléctrico *inicialmente* uniforme, \mathbf{E}_0 . Supongamos que el dieléctrico es lineal, isótropo y homogéneo, y que se caracteriza por la constante dieléctrica K . Además, no tiene carga. El origen de nuestro sistema de coordenadas puede tomarse en el centro de la esfera y la dirección de \mathbf{E}_0 como la dirección polar (dirección z).

Solución: El potencial puede expresarse entonces como una suma de los armónicos esféricos. Igual que en la sección 3.5, todas las condiciones en la frontera pueden satisfacerse por medio de los dos armónicos de menor orden, y escribimos

$$\varphi_1(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad (4-50)$$

para la región en el vacío (1) en el exterior de la esfera, y

$$\varphi_2(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad (4-51)$$

para la región del dieléctrico (2). Las constantes A_1, A_2, C_1 y C_2 no se conocen y deben determinarse a partir de las condiciones en la frontera. No es necesario el armónico r^{-1} , puesto que su presencia implica una carga neta en la esfera. Puede sumarse un término constante a las ecuaciones (4-50) y (4-51), pero como se necesita la misma constante en ambas ecuaciones, podemos, sin pérdida de generalidad, considerarla cero.

Lejos de la esfera, el campo eléctrico conservará su carácter uniforme y $\varphi_1 \rightarrow -E_0 r \cos \theta$. Por tanto, $A_1 = -E_0$. Además, a menos que $C_2 = 0$, el potencial y el campo eléctrico asociado se volverían infinitos en el centro de la esfera y esto implicaría la existencia de un dipolo puntual en el centro, esto es, un dipolo cuyo momento no es proporcional a ΔV . Aquí no existen dipolos puntuales *macroscópicos*, ya que como se ha analizado en la sección 4.3, el potencial y el campo macroscópico no se vuelven infinitos en un dieléctrico desprovisto de cargas puntuales. En consecuencia, $C_2 = 0$, y las constantes restantes, A_2 y C_1 , pueden obtenerse de las condiciones en la frontera de la sección 4.7.

La continuidad del potencial a través de la zona interfacial entre el dieléctrico y el vacío requiere que $\varphi_1 = \varphi_2$ en $r = a$, o sea:

$$-E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a \quad (4-52)$$

Puesto que la componente normal de \mathbf{D} en la zona interfacial es $D_r = -\epsilon(\partial\varphi/\partial r)$, la continuidad de D_r (no hay carga sobre la superficie del dieléctrico) requiere que $D_{1r} = D_{2r}$ en $r = a$, o sea:

$$E_0 + 2C_1 a^{-3} = -KA_2 \quad (4-53)$$

La continuidad de E_r en $r = a$ es equivalente a la ecuación (4-52).

Al combinar las ecuaciones (4-52) y (4-53), obtenemos

$$A_2 = \frac{3E_0}{K + 2} \quad (4-54)$$

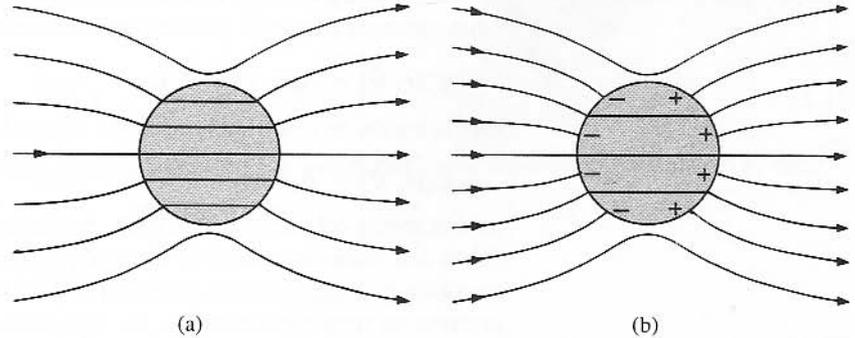
y

$$C_1 = \frac{(K - 1)a^3 E_0}{K + 2} \quad (4-55)$$

Así pues, se ha resuelto el problema. El potencial está dado por (4-50) o (4-51), y las constantes A_1, C_1, A_2 y C_2 son todas conocidas. Las componentes de \mathbf{E} y \mathbf{D} pueden obtenerse en cualquier punto (r, θ, ϕ) por derivación. Es evidente, de la

FIGURA 4.8

Campo eléctrico uniforme distorsionado por la presencia de una esfera dieléctrica: a) líneas de desplazamiento eléctrico, b) líneas del campo eléctrico.



ecuación (4-54) y de que $C_2 = 0$, que el campo eléctrico dentro de la esfera tiene el sentido de \mathbf{E}_0 y está dado por

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3}{K + 2} \mathbf{E}_0 \quad (4-56)$$

Las líneas de desplazamiento y las líneas de fuerza se ilustran en la figura 4.8.

*4.9 FUERZA SOBRE UNA CARGA PUNTUAL SUMERGIDA EN UN DIELECTRICO

Estamos ahora en condiciones de determinar la fuerza sobre un pequeño conductor esférico cargado sumergido en un dieléctrico lineal isótropo. En el límite para el cual el conductor es despreciablemente pequeño desde el punto de vista macroscópico, este cálculo da la fuerza sobre una carga puntual.

El campo eléctrico y la densidad de carga superficial en un punto representativo de la superficie del conductor se obtendrán por el procedimiento del valor en la frontera de la sección anterior y la fuerza \mathbf{F} puede entonces obtenerse a partir de la integral sobre la superficie:

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{E}' \sigma da \quad (4-57)$$

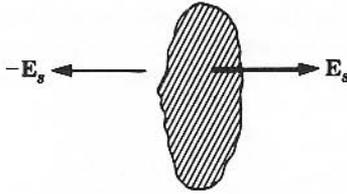
Aquí \mathbf{E}' representa el campo eléctrico en el elemento de superficie da , menos la parte del campo producida por el propio elemento. En otras palabras,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}_s \quad (4-58)$$

donde \mathbf{E}_s es el campo eléctrico producido por el elemento superficial de carga, σda . Es importante que \mathbf{E}_s no se incluya en el campo \mathbf{E}' , porque la cantidad $\mathbf{E}_s \sigma da$ representa la interacción del elemento de carga σda con su propio campo. Esta

FIGURA 4.9

Campo propio de un elemento superficial cargado.



autointeracción no produce evidentemente fuerza neta sobre el elemento, pero da origen a un esfuerzo o tensión superficial que se debe a la repulsión mutua de los

$$\mathcal{F}_s = \sigma \mathbf{E}_s \quad (4-59)$$

electrones (o del exceso de iones positivos) en la capa superficial. Este esfuerzo se compensa con intensas fuerzas de cohesión en el material del que está compuesto el elemento. Deberá señalarse que cuando calculamos las fuerzas sobre los objetos cargados en los capítulos 2 y 3, implícitamente restamos el campo propio \mathbf{E}_s . Por tanto, cuando calculamos la fuerza sobre una carga puntual, el campo producido *por* la carga puntual no fue incluido. Un estudio más detallado de las fuerzas sobre los objetos cargados se considerará en la sección 6.8.

Puede parecer que el campo propio del elemento de superficie cargado σda es despreciable porque el elemento es de magnitud infinitesimal. Sin embargo, este campo es finito. Sin duda alguna, el elemento es pequeño desde el punto de vista macroscópico, pero nunca se llega al límite. En un punto directamente sobre su superficie, el elemento aparece como una sección de un plano (Fig. 4.9). El campo \mathbf{E}_s es perpendicular al elemento pero tiene sentido opuesto en cada uno de los lados. El campo total dentro del elemento es cero. En consecuencia,

$$\mathbf{E}' - \mathbf{E}_s = 0 \quad (\text{dentro del conductor}) \quad (4-60)$$

Esta ecuación nos proporciona una relación entre \mathbf{E}' y \mathbf{E}_s sobre la superficie y, por tanto, entre \mathbf{E}' y el campo eléctrico macroscópico \mathbf{E} en la superficie:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}_s = \frac{1}{2} \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \mathbf{n} \quad (4-61)$$

La fuerza sobre el conductor se convierte en

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \int_s \mathbf{E} \sigma da \quad (4-57a)$$

Fijemos ahora nuestra atención en un pequeño conductor esférico sumergido en un dieléctrico de extensión infinita. La carga total sobre el conductor es Q y su radio es a . Ya que al final tomaremos el límite en el que a se hace muy pequeño, y como las variaciones del campo eléctrico (si existen) son a una escala macroscópica, será suficiente considerar el caso en el que el campo eléctrico es inicialmente uniforme en la vecindad del conductor. Representemos este campo uniforme con el símbolo \mathbf{E}_0 . La

descripción es semejante al problema con valor en la frontera que resolvimos en la sección 3.5, excepto que aquí la esfera conductora se sumerge (o está inmersa) en un dieléctrico de permitividad ϵ y además tiene una carga neta Q .

Por analogía con la sección 3.5 determinamos fácilmente lo siguiente. El potencial,

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (4-62)$$

El campo eléctrico,

$$\begin{aligned} E_r &= E_0(1 + 2a^3/r^3) \cos \theta + Q/4\pi\epsilon r^2 \\ E_\theta &= -E_0(1 - a^3/r^3) \sin \theta \end{aligned} \quad (4-63)$$

La densidad de carga superficial sobre la superficie de la esfera,

$$\sigma(\theta) = \epsilon E_r|_{r=a} = 3\epsilon E_0 \cos \theta + Q/4\pi a^2 \quad (4-64)$$

La fuerza puede ahora determinarse a partir de la ecuación (4-57a). Por simetría, la única componente distinta de cero de la fuerza es la que tiene la dirección $\theta = 0$, es decir, en la dirección z :

$$F_z = \frac{1}{2} \int_0^\pi (E_r)_{r=a} \cos \theta \sigma(\theta) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = E_0 Q \quad (4-65a)$$

o

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_0 \quad (4-65b)$$

Este resultado no varía cuando tomamos el límite para a pequeño. Por tanto, el campo eléctrico en el dieléctrico \mathbf{E}_0 concuerda con la definición fundamental, es decir, la fuerza sobre una pequeña carga de prueba Q dividida por la magnitud de Q .

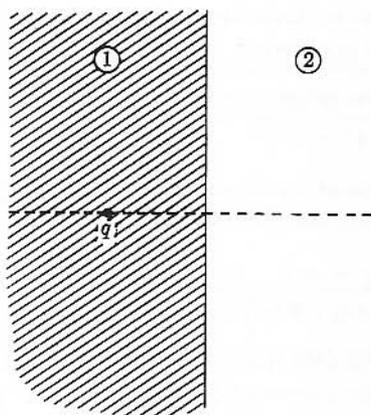
4.10 MÉTODO DE IMÁGENES PARA PROBLEMAS EN LOS QUE INTERVIENEN DIELECTRICOS

El método de imágenes estudiado en el capítulo anterior puede generalizarse para obtener las soluciones de la ecuación de Laplace para los casos en los que hay dos o más medios dieléctricos en el problema. Recordemos que cuando empleamos la técnica de la carga imagen, el potencial en una región del espacio se visualiza como si fuera producido por cargas "puntuales" y conductores cargados en la región, así como por cargas imagen ficticias fuera de la región. Las cargas imagen parecen localizarse *dentro* de uno o más conductores.

La única diferencia cuando tenemos uno o más dieléctricos presentes es que las cargas imagen ficticias pueden también estar localizadas dentro de uno de los otros dieléctricos (no en el que el potencial está siendo calculado), y las condiciones en la frontera en cada zona interfacial dieléctrico-dieléctrico deben satisfacerse.

FIGURA 4.10

Dos medios dieléctricos con una carga puntual en el medio 1.



EJEMPLO 4.3

Campo de una carga puntual cercana a una zona interfacial dieléctrico-dieléctrico

Considere dos medios dieléctricos con permitividades constantes, ϵ_1 y ϵ_2 , que están separadas por una zona interfacial plana. No hay carga externa sobre la zona interfacial. Una carga puntual q está inmersa en el medio caracterizado por ϵ_1 a una distancia d de la zona interfacial (Fig. 4.10). El problema propuesto es: ¿Cuáles son los campos eléctricos en los medios 1 y 2?

Solución: Por conveniencia, podemos tomar el plano yz que pasa por el origen como la zona interfacial y situar q sobre el eje x en $x = -d$. Si utilizamos el problema descrito en la sección 3.9 como guía, podemos esperar que el potencial en cada medio pueda expresarse como la suma del potencial de la carga puntual q y el de una carga imagen. Además, suponemos que la carga imagen está localizada a la misma distancia d de la zona interfacial, como lo está la carga puntual original. Sea

$$r = \sqrt{(x + d)^2 + y^2 + z^2} \quad \text{y} \quad r' = \sqrt{(x - d)^2 + y^2 + z^2}$$

Entonces en el medio 1,

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right] \quad (4-66)$$

En otras palabras, la carga imagen q' se localiza en el medio 2 en la posición $(d, 0, 0)$.

Para el potencial φ_2 en el medio 2, la carga imagen debe estar situada en el medio 1, tal como lo está la carga original q , ambas en la posición $(-d, 0, 0)$. Llamaremos q'' a la suma de las cargas. Entonces, en el medio 2,

$$\varphi_2 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 r} \quad (4-67)$$

Las cantidades q' y q'' pueden obtenerse de las condiciones en la frontera en la zona interfacial. Calculamos $D_{1n} = -\epsilon_1 \partial \varphi_1 / \partial x \Big|_{x=0}$, y calculamos $D_{1n} = D_{2n}$ de acuerdo con la ecuación (4-41b):

$$\frac{(q - q')d}{[d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{q''d}{[d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (4-68)$$

A continuación calculamos $E_{1y} = -\partial \varphi_1 / \partial y \Big|_{x=0}$ y luego calculamos $E_{1y} = E_{2y}$ de acuerdo con la ecuación (4.42b):

$$\frac{(q + q')y}{\epsilon_1 [d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{q''y}{\epsilon_2 [d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (4-69)$$

No se obtiene nada nuevo de la continuidad de φ en la zona interfacial. Resolviendo las ecuaciones (4-68) y (4-69) para q' y q'' , obtenemos

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (4-70)$$

La ecuación de Laplace se satisface en ambos medios y las condiciones en la frontera también se satisfacen. La solución es única.

4.11 RESUMEN

El comportamiento electrostático de un medio dieléctrico está caracterizado completamente por su momento dipolar por unidad de volumen o **polarización**:

$$\mathbf{P} = \lim \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta v}$$

Este procedimiento genera la **densidad de carga de polarización**

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (\sigma_P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P})$$

y nos da el potencial

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iint \frac{\rho_P(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \oint \frac{\sigma_P(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

El campo total E debido a las cargas externas más la carga de polarización satisface

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_P)$$

Es conveniente definir el campo vectorial, **desplazamiento eléctrico**,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

de tal forma que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

con sólo las cargas externas como fuentes. La ecuación rotacional

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

no cambia, ya que no contiene la densidad de carga. Con el fin de resolver las ecuaciones de los campos, la **ecuación constitutiva**

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$$

debe también conocerse para el material particular. Entonces, las últimas cuatro ecuaciones, sujetas a las **condiciones en la frontera**

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad \text{y} \quad E_{2t} - E_{1t} = 0$$

son suficientes para determinar \mathbf{E} y \mathbf{D} en el interior y exterior de los dieléctricos.

- La forma integral de la **ley de Gauss** se convierte en

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = Q$$

donde Q incluye sólo la carga *externa* localizada en el interior de la superficie S . (Consecuentemente, justo afuera de la superficie de un conductor sumergido en un medio dieléctrico, $D_n = \sigma$.) El rotacional permite todavía definir el potencial como

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

- La mayoría de los materiales dieléctricos son lineales, con una **susceptibilidad** χ constante:

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$$

Esta **ecuación constitutiva**, combinada con la definición de \mathbf{D} , da

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$$

donde

$$\epsilon = \epsilon_0 + \chi$$

La **constante dieléctrica**

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

vale entre 1 y 100 para la mayoría de los dieléctricos más comunes; para todos los dieléctricos $K \geq 1$ ($\chi \geq 0$). Para el vacío $K = 1$ ($\chi = 0$). El comportamiento electrostático de un conductor puede obtenerse haciendo K infinita.

- En un medio lineal

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad \text{y} \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Las técnicas matemáticas para resolver las ecuaciones de Poisson y de Laplace son semejantes a las del capítulo 3, con las condiciones en la frontera apropiadas en la zona interfacial entre dieléctricos,

Teoría microscópica de los dieléctricos

En el capítulo anterior consideramos los aspectos macroscópicos de la polarización dieléctrica. Se demostró cómo, en muchos casos, la polarización puede tenerse en cuenta mediante la introducción de una constante dieléctrica. De esta forma, el campo eléctrico podría calcularse directamente a partir de la consideración de la distribución de carga externa. Aunque se hizo referencia a las moléculas del dieléctrico varias veces en el capítulo 4, no se llevó a cabo detalladamente un tratamiento microscópico del material y el panorama general se presentó realmente desde el punto de vista macroscópico. En este capítulo examinaremos la naturaleza molecular del dieléctrico y veremos de qué manera el campo eléctrico responsable de la polarización de la molécula se relaciona con el campo eléctrico macroscópico. Además, basándose en un modelo molecular sencillo, es posible entender el comportamiento lineal característico de una gran cantidad de materiales dieléctricos.

CAMPO MOLECULAR EN UN DIELECTRICO

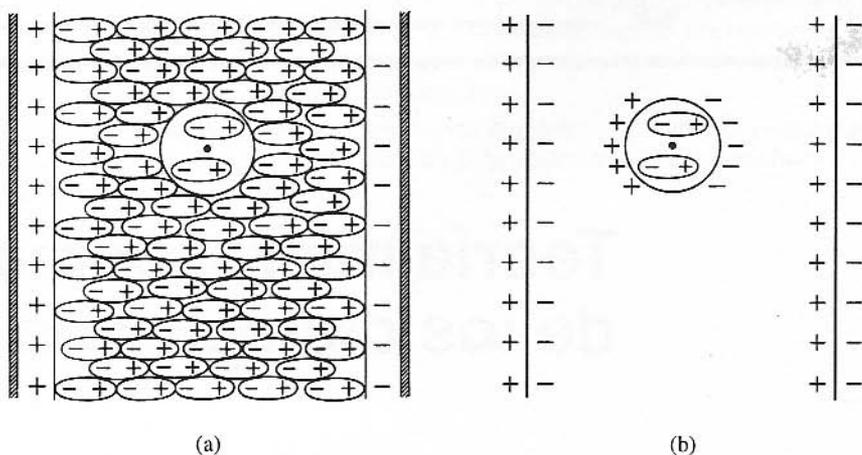
El campo eléctrico responsable de la polarización de una molécula del dieléctrico se llama campo molecular, E_m .

El *campo molecular* es el campo eléctrico en una posición molecular del dieléctrico; es producido por todas las fuentes externas y por todas las moléculas polarizadas del dieléctrico *con excepción* de la molécula en el punto en consideración.

Es evidente que E_m no es necesariamente el mismo que el campo eléctrico macroscópico porque, como se expuso en la sección 4.3, esta última cantidad se

FIGURA 5.1

Sustitución del dieléctrico exterior a la "cavidad" por un sistema de cargas de polarización.



relaciona con la fuerza sobre una carga de prueba que es grande comparada con las dimensiones moleculares.

El campo molecular puede calcularse en la siguiente forma. Primero eliminemos una porción pequeña de dieléctrico, dejando una cavidad esférica que rodee el punto en el que va a calcularse el campo molecular. El dieléctrico que queda se considerará como un continuo, es decir, desde el punto de vista macroscópico. Volvemos a poner ahora la porción de dieléctrico en la cavidad, molécula a molécula, excepto la molécula del centro de la cavidad donde deseamos calcular el campo molecular. Las moléculas que acabamos de volver a colocar no deben tratarse como un continuo, sino como dipolos individuales. El procedimiento que se ha utilizado puede justificarse sólo si el resultado del cálculo es independiente del tamaño de la cavidad, lo que, como veremos, es precisamente el caso en ciertas condiciones.

Supongamos que una muestra delgada de dieléctrico se ha polarizado al colocarla en el campo eléctrico uniforme entre dos placas paralelas que están opuestamente cargadas, como se ilustra en la figura 5.1(a). Se supondrá que la polarización es uniforme a escala macroscópica (esto es, $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$), y que \mathbf{P} es paralelo al campo que lo produce. La parte del dieléctrico exterior a la cavidad puede sustituirse por un sistema de cargas de polarización, como se ve en la figura 5.1(b), por lo cual el campo eléctrico en el centro de la cavidad puede expresarse como

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}' \quad (5-1)$$

Aquí, \mathbf{E}_x es el campo eléctrico primario debido a las placas paralelas cargadas; \mathbf{E}_d es el campo despolarizante debido a la carga de polarización en las superficies exteriores del dieléctrico; \mathbf{E}_s se debe a la carga de polarización sobre la superficie de la cavidad S y \mathbf{E}' se debe a todos los dipolos que están en el interior de S . Aunque no estamos considerando la forma explícita de \mathbf{E}_x , es evidente que si las dimensiones de

las placas son grandes comparadas con su separación, $\mathbf{E}_x = (1/\epsilon_0)\sigma$, siendo σ la densidad de carga superficial. El campo despolarizante también se produce por dos planos paralelos de carga, esta vez con densidad σ_p . Puesto que $\sigma_p = P_n = \pm P$,

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (5-2)$$

Expresaremos el campo eléctrico macroscópico *en el dieléctrico* sin subíndice, esto es, \mathbf{E} . Como la componente normal del desplazamiento eléctrico \mathbf{D} es continua al atravesar la zona interfacial entre el vacío y el dieléctrico, y como $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_x$ en el vacío que queda exactamente en el exterior de la plancha dieléctrica,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_d \quad (5-3)$$

Al combinar las ecuaciones (5-1), (5-2) y (5-3), se tiene

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}' \quad (5-4)$$

Esta ecuación relaciona el campo molecular con el campo eléctrico macroscópico en el material dieléctrico. El resultado es bastante general y no está restringido a la cavidad esférica y a la geometría de los electrodos planos de la figura 5.1. Sin embargo, la derivación anterior es instructiva y será útil para el problema que se expondrá en la sección 5.4.

El campo \mathbf{E}_s proviene de una densidad de carga de polarización, $\sigma_p = P_n$, sobre la superficie esférica S . Utilizando coordenadas esféricas y tomando la dirección polar a lo largo de la dirección de \mathbf{P} , como en la figura 5.2, obtenemos

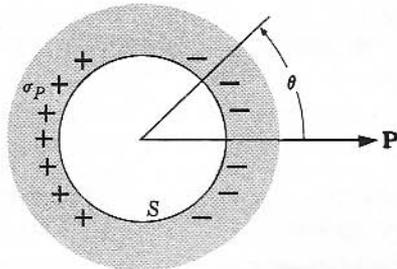
$$d\mathbf{E}_s = \frac{(-P \cos \theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} da \quad (5-5)$$

siendo \mathbf{r} el vector que va de la superficie al centro de la esfera. De la simetría, es evidente que sólo la componente de $d\mathbf{E}_s$ en la dirección de \mathbf{P} contribuirá a la integral de la ecuación (5-5) sobre la superficie completa. Como $da = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$,

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (5-6)$$

FIGURA 5.2

Cálculo de la contribución de la superficie de la "cavidad" a \mathbf{E}_m .



Finalmente, llegamos al último término de la ecuación (5-4), el que se debe a los dipolos eléctricos en el interior de S . Hay muchos casos importantes para los cuales este término se anula. Si hay muchos dipolos en la cavidad, si están orientados paralelamente pero distribuidos al azar en su posición y si no hay correlaciones entre las posiciones de los dipolos, entonces $\mathbf{E}' = 0$.* Ésta es la situación que puede prevalecer, por ejemplo, en un gas o en un líquido. De manera similar, si los dipolos en la cavidad están situados en las posiciones atómicas regulares de un cristal cúbico, entonces nuevamente $\mathbf{E}' = 0$. En relación con esto, el lector debe consultar el problema 5.2.

En el caso general, \mathbf{E}' no es cero, y si el material contiene varios tipos de moléculas \mathbf{E}' puede cambiar en diferentes posiciones moleculares. Esto es lo que da origen al comportamiento eléctrico anisótropo de la calcita, por ejemplo. No obstante, nuestro propósito no es desarrollar una teoría para materiales anisótropos; por tanto, limitaremos el análisis a los materiales de mayor abundancia en los cuales $\mathbf{E}' = 0$. Así, la ecuación (5-4) se reduce a

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (5-7)$$

Es interesante observar que este resultado podría obtenerse directamente por el método anterior si la cavidad esférica fuera generada al quitar sólo una molécula. Pero en estas condiciones la cavidad sería tan pequeña que la sustitución del resto del dieléctrico por un sistema de cargas de polarización no podría justificarse.

El momento dipolar de una molécula es proporcional al campo eléctrico (campo polarizante) que actúa sobre ella.

La razón del momento dipolar de una molécula al campo polarizante se llama *polarizabilidad molecular*, α . En otras palabras,†

$$\mathbf{p}_m = \alpha \mathbf{E}_m \quad (5-8)$$

Si hay N moléculas por unidad de volumen, entonces la polarización $\mathbf{P} = N\mathbf{p}_m$. Combinando este resultado con las ecuaciones (5-7) y (5-8), obtenemos

$$\mathbf{P} = N\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right) \quad (5-9)$$

Esta ecuación puede expresarse en función de la constante dieléctrica, K , ya que $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = (K - 1)\epsilon_0 \mathbf{E}$.

* Véase W. Panofsky y M. Philips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2da ed. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1962, Cap. 2.

† El concepto de polarizabilidad puede utilizarse también para describir moléculas polares, como veremos en la sección 5.3.

De este modo, la ecuación (5-9) se convierte en

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0(K-1)}{N(K+2)} \quad (5-10)$$

que se conoce como *ecuación de Clausius-Mossotti*.

Es evidente que la ecuación (5-10) define una propiedad molecular, que es la polarizabilidad molecular, en términos de cantidades que pueden determinarse sobre bases macroscópicas.

5.2

DIPOLOS INDUCIDOS: UN MODELO SENCILLO

Las moléculas de un dieléctrico pueden clasificarse en polares y no polares. Una *molécula polar* es aquella que tiene un momento dipolar permanente, aun en ausencia de un campo polarizante \mathbf{E}_m . En la siguiente sección se estudiará la respuesta de un dieléctrico polar a un campo eléctrico externo. Aquí trataremos el problema algo más sencillo en el que intervienen *moléculas no polares* y en el que los “centros de gravedad” de las distribuciones de carga positivas y negativas coinciden normalmente. Las moléculas simétricas, tales como H_2 , N_2 u O_2 , o las moléculas monoatómicas, tales como He, Ne y Ar, se encuentran dentro de esta categoría.

La aplicación de un campo eléctrico provoca un desplazamiento relativo de las cargas positivas y negativas en moléculas no polares, y los dipolos moleculares así formados se llaman *dipolos inducidos*. El tipo más sencillo de molécula que puede imaginarse es el formado por un solo átomo. Es posible construir un modelo clásico sencillo para el átomo y de este modelo obtener una expresión para el momento dipolar inducido y, en consecuencia, para su polarizabilidad. Aunque fue diseñado específicamente para tratar moléculas monoatómicas, el modelo puede utilizarse para moléculas diatómicas simétricas, aplicándolo por separado a cada uno de los átomos de la molécula para obtener las polarizabilidades atómicas. La polarizabilidad molecular es entonces la suma de éstas, o el doble de la polarizabilidad atómica.

Un átomo está formado por un núcleo extremadamente pequeño cargado positivamente, rodeado por electrones orbitales que están en un estado de movimiento continuo. Como los electrones recorren sus órbitas en un tiempo sumamente corto, del orden de 10^{-15} segundos, es evidente que en el átomo “estático” equivalente cada carga electrónica está “repartida” sobre su órbita. La mecánica cuántica nos dice que, aunque este panorama es esencialmente correcto, es algo ingenuo; los electrones no se localizan realmente en órbitas, sino que tienen una probabilidad finita de estar situados en cualquier parte del átomo. Así pues, la respuesta del átomo a un campo electrostático o a campos eléctricos que varían lentamente puede enfocarse considerando que el electrón está distribuido sobre su órbita en el átomo y que cada órbita está extendida sobre una parte considerable del volumen atómico. En resumen, un

modelo clásico sencillo del átomo compatible con esto es una carga positiva puntual (el núcleo) rodeada por una nube esféricamente simétrica de carga negativa en la cual la densidad es esencialmente uniforme hasta el radio atómico R_0 y cero a radios mayores.

Estamos ahora en posición de calcular la polarizabilidad de este "átomo". Se asignará la carga Ze al núcleo, siendo e el valor absoluto de la carga electrónica y Z el número atómico. Como el átomo es eléctricamente neutro, la carga total de la nube electrónica es $-Ze$. Si el átomo se coloca en un campo polarizante \mathbf{E}_m , el núcleo se desplazará *respecto* al centro de la nube de carga una distancia que llamaremos x . Este desplazamiento se dará en la dirección de \mathbf{E}_m . Supondremos que la nube de carga se mueve rígidamente durante este desplazamiento, es decir, no hay distorsión de la nube por el campo polarizante. El desplazamiento x puede determinarse a partir del equilibrio de fuerzas sobre el núcleo: la fuerza ZeE_m actúa en la dirección del campo, mientras que una fuerza electrostática entre el núcleo y la nube de carga tiende a restaurar la configuración inicial. Por la ley de Gauss, la carga negativa que atrae al núcleo es la parte de la nube dentro de la esfera de radio x , y si la densidad electrónica en la nube es uniforme, entonces esta carga es Zex^3/R_0^3 . En consecuencia,

$$\frac{(Ze)(Zex^3/R_0^3)}{4\pi\epsilon_0x^2} = ZeE_m \quad (5-11)$$

o

$$Zex = 4\pi\epsilon_0R_0^3E_m \quad (5-12)$$

Como el dipolo atómico formado en este proceso es $\mathbf{p}_m = Zex$, la última ecuación puede compararse con (5-8), de donde

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0R_0^3 \quad (5-13)$$

El modelo atómico que acaba de describirse puede probarse comparando los resultados obtenidos a partir de él con los resultados deducidos de otras fuentes. Por ejemplo, la ecuación (5-13) puede combinarse con la ecuación de Clausius-Mossotti (Ec. 5-10) para eliminar α . La ecuación resultante predice el radio atómico R_0 en términos de cantidades determinadas experimentalmente. La R_0 obtenida de este modo concuerda razonablemente bien con los resultados de otros experimentos en aquellos casos para los cuales el modelo es particularmente adecuado. R_0 es del orden de magnitud de 1 angstrom, es decir, 10^{-10} m (véase el problema 5.1).

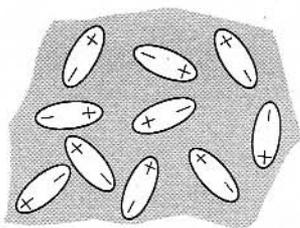
La polarizabilidad deducida en la ecuación (5-13) es una constante, independiente del campo polarizante. En consecuencia, la ecuación (5-13) nos conduce a un valor constante de K y el dieléctrico así descrito es lineal.

5.3 MOLÉCULAS POLARES: LA FÓRMULA DE LANGEVIN-DEBYE

Como se mencionó en la sección anterior, una molécula polar tiene un momento dipolar permanente. Una molécula polar está formada por al menos dos especies

FIGURA 5.3

Distribución aleatoria de dipolos permanentes.



distintas de átomos. Durante la formación de moléculas, algunos de los electrones pueden transferirse completa o parcialmente de una especie atómica a otra; la disposición electrónica resultante es tal que los centros de carga positivos y negativos no coinciden en la molécula. En ausencia de un campo eléctrico, una porción macroscópica del dieléctrico polar no está polarizada, ya que los dipolos individuales están orientados al azar, como en la figura 5.3. La polarización se ha definido como

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta v} \sum \mathbf{p}_m \quad (5-14)$$

donde la suma se efectúa sobre todas las moléculas del elemento de volumen Δv . Cuando los \mathbf{p}_m se orientan al azar, la suma se anula.

Si el dieléctrico polar se somete a un campo eléctrico, los dipolos individuales experimentan momentos de rotación que tienden a alinearlos con el campo. Si el campo es suficientemente intenso, los dipolos pueden alinearse por completo y la polarización alcanza el valor de saturación

$$\mathbf{P}_s = N\mathbf{p}_m \quad (5-15)$$

donde N es el número de moléculas por unidad de volumen. Este efecto de orientación se suma a los efectos dipolares inducidos, que generalmente también están presentes. Por el momento despreciaremos la contribución dipolar inducida, pero su efecto se tendrá en cuenta más adelante.

A las intensidades de campo que se encuentran normalmente, la polarización de un dieléctrico polar generalmente está lejos de su valor de saturación y, si la temperatura de la muestra se eleva, la polarización se vuelve aún menor. La falta de una alineación dipolar completa se debe a la energía térmica de las moléculas, que tiende a producir orientaciones aleatorias de los dipolos. El momento dipolar efectivo promedio por molécula puede calcularse mediante un principio de mecánica estadística que establece que a la temperatura T la probabilidad de encontrar una energía molecular E determinada es proporcional al factor de Boltzmann

$$e^{-E/kT} \quad (5-16)$$

siendo k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. No se hará aquí una exposición completa de la base de este principio; el lector familiarizado con la distribución de velocidades de Maxwell en un gas perfecto ya lo ha visto anteriormente.

Según la ley de distribución de Maxwell, la probabilidad de una velocidad molecular v es proporcional a $e^{-mv^2/2kT}$. Pero en el gas perfecto de Maxwell, las moléculas tienen sólo energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$. En el caso general, E en la ecuación (5-16) debe incluir tanto la energía cinética E_k como la energía potencial U , y el factor se convierte en

$$e^{-E_k/kT} e^{-U/kT} \quad (5-17)$$

La energía potencial de un dipolo permanente p_0 en un campo eléctrico \mathbf{E}_m es

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_m = -p_0 E_m \cos \theta \quad (5-18)$$

siendo θ el ángulo entre \mathbf{p}_0 y el campo eléctrico. Como las energías cinéticas moleculares no dependen del campo eléctrico, podemos despreciar por completo la distribución de velocidades en el siguiente cálculo. El momento dipolar *efectivo* de un dipolo molecular es su componente en la dirección del campo, es decir, $p_0 \cos \theta$. Empleando la relación de Boltzmann, resulta que el valor promedio de esta cantidad es

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle = \frac{\int p_0 \cos \theta e^{+p_0 E_m \cos \theta / kT} d\Omega}{\int e^{+p_0 E_m \cos \theta / kT} d\Omega} \quad (5-19)$$

donde $d\Omega$ es un elemento de ángulo sólido que puede sustituirse por $2\pi \sin \theta d\theta$ y donde los límites de θ son 0 y π . Como p_0 , E_m y kT son constantes de integración, las integrales pueden efectuarse directamente. Conviene definir

$$y = \frac{p_0 E_m}{kT} \quad (5-20)$$

La ecuación (5-19) da entonces

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle = p_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (5-21)$$

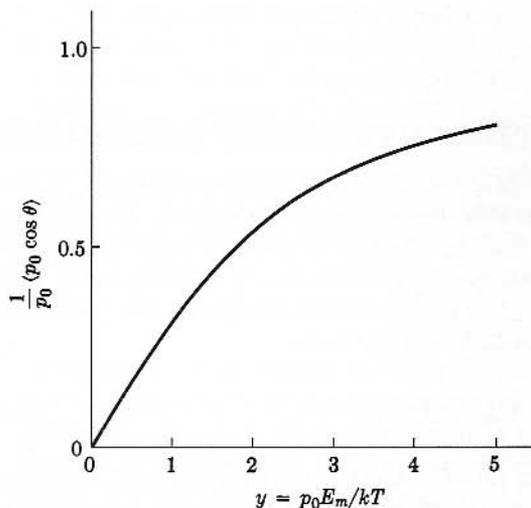
que se conoce como *fórmula de Langevin*. La curva que presenta esta función se muestra en la figura 5.4.

Puede verse en la figura que la ecuación (5-21) da realmente un efecto de saturación para campos de gran intensidad. Sin embargo, para pequeños valores de y , la gráfica es lineal, y esta región lineal es importante a temperaturas ordinarias. El momento dipolar molecular p_0 de la mayoría de los materiales polares es tal que $y \ll 1$ para un intervalo completo de intensidades de campo, aun para aquellas que se aproximan al valor de la rigidez dieléctrica del material, mientras la temperatura esté por encima de 250 K, aproximadamente. Así pues, un material dieléctrico que contiene moléculas polares en general es *lineal*.

Como la región lineal de la ecuación (5-21) es la importante, es apropiado desarrollar $\coth y$ en serie de potencias y conservar sólo los primeros términos (véase

FIGURA 5.4

Gráfica de la función de Langevin. El valor asintótico cuando $y \rightarrow \infty$ es uno.



el problema 5.4). El primer término cancela el último de la ecuación (5-21), con el resultado de que

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle \approx \frac{1}{3} p_0 y = \frac{p_0^2 E_m}{3kT} \quad (5-22a)$$

El término $\langle p_0 \cos \theta \rangle$ es el momento dipolar efectivo promedio; por tanto, la polarización $P = N \langle p_0 \cos \theta \rangle$ y tiene la dirección de \mathbf{E}_m . En consecuencia, la ecuación (5-22a) puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{N} \mathbf{P} = \frac{p_0^2}{3kT} \mathbf{E}_m \quad (5-22b)$$

Comparando esta ecuación con (5-8), es evidente que la polarizabilidad α (es decir, el momento dipolar molecular por unidad de campo polarizante) es

$$\alpha = \frac{p_0^2}{3kT} \quad (5-23)$$

Este resultado se ha deducido despreciando los momentos dipolares inducidos y representa lo que podríamos llamar polarizabilidad *por orientación*. Los efectos dipolares inducidos, tales como los considerados en la sección anterior, dan origen a lo que podría llamarse polarizabilidad *por deformación*, α_0 . Entonces, en el caso general, la polarizabilidad molecular total es

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3kT} \quad (5-24)$$

Esta expresión se conoce como *ecuación de Langevin-Debye* y tiene gran importancia en la interpretación de estructuras moleculares.

*5.4 POLARIZACIÓN PERMANENTE: FERROELECTRICIDAD

Se vio en la sección 5.1 que el campo molecular \mathbf{E}_m es el responsable de polarizar las moléculas individuales. La relación entre \mathbf{E}_m y el campo eléctrico macroscópico \mathbf{E} se dio en la ecuación (5-7). En la mayoría de los casos, la polarización es proporcional a \mathbf{E} , de modo que \mathbf{E}_m se anula cuando \mathbf{E} tiende a cero. Pero en ciertas condiciones, la ecuación (5-7) también es compatible con una polarización permanente (o espontánea). Cuando \mathbf{E} se iguala a cero,

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}_0 \quad (5-25)$$

o, en otras palabras, si existe una polarización \mathbf{P}_0 , ésta creará en la molécula un campo eléctrico que tiende a polarizarla. Con toda seguridad existe un campo polarizante; pero si este campo da origen a una polarización distinta de \mathbf{P}_0 , entonces la solución no es autoconsistente. Por tanto, si N es el número de moléculas por unidad de volumen,

$$\mathbf{P}_0 = N\alpha\mathbf{E}_m = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \mathbf{P}_0 \quad (5-26)$$

Este resultado se satisface cuando

$$\mathbf{P}_0 = 0$$

o bien cuando

$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = 1 \quad (5-27)$$

Por consiguiente, la condición para que se dé una polarización permanente es la ecuación (5-27).*

Para la mayoría de los materiales, $N\alpha/3\epsilon_0$ es menor que uno, y aparece el comportamiento dieléctrico ordinario. Sin embargo, en algunos sólidos cristalinos se cumple la condición (5-27). Dichos materiales se llaman *ferroeléctricos* porque sus propiedades eléctricas son análogas a las propiedades magnéticas de los materiales ferromagnéticos. El ejemplo más conocido de un material ferroeléctrico es el titanato de bario, BaTiO_3 , que presenta un momento dipolar espontáneo a temperaturas

* Hablando estrictamente, la ecuación (5-27) se ha deducido para materiales compuestos por un solo tipo de moléculas y para los cuales el término \mathbf{E}' de la sección 5.1 se anula. En una teoría cuantitativa aplicable al caso general, la ecuación (5-27) se sustituye por un sistema de ecuaciones simultáneas. Tales complicaciones no son necesarias para una comprensión fundamental del origen de la ferroelectricidad y, en consecuencia, no se analizarán aquí.

inferiores a 120°C. Esta temperatura se llama *punto de Curie* del material.

El estado polarizado de un material ferroeléctrico es relativamente estable y puede persistir durante largos periodos de tiempo. Esto puede sorprendernos hasta cierto punto, porque una muestra polarizada está sujeta a su propio campo despolarizante y, dependiendo de la forma geométrica de la muestra, este campo despolarizante puede ser bastante grande. El campo despolarizante es mayor para una muestra que tiene la forma de una lámina plana polarizada en la dirección normal a sus caras. Como se vio en la sección 5.1, si las dimensiones de la cara de la lámina son grandes comparadas con su espesor, entonces

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (5-28)$$

En realidad, la alta estabilidad de un ferroeléctrico polarizado se debe al hecho de que *no* hay campo despolarizante sobre la muestra, aun para el caso en el que la forma geométrica sea la de la lámina. La muestra se polariza colocándola entre placas conductoras paralelas a las que posteriormente se aplica una gran diferencia de potencial. En este proceso la carga *libre* de las placas se neutralizará en gran parte por la carga de polarización superficial, como sucede también durante la polarización de un dieléctrico común. Si las placas paralelas se ponen ahora al mismo potencial, en cortocircuito, el estado polarizado del ferroeléctrico es todavía energéticamente favorable, de modo que la *carga libre permanece en su lugar*, neutralizando todavía la carga de polarización. La situación es algo parecida a la mostrada en la figura 5.5, en la que la *carga libre* es mantenida en su lugar por la carga de polarización superficial. El campo macroscópico dentro del ferroeléctrico es cero. Además, el campo eléctrico externo es cero y es difícil distinguir la muestra polarizada de la de un material dieléctrico común no polarizado.

Si se aplica ahora una gran diferencia de potencial de signo contrario a las placas que rodean el ferroeléctrico polarizado, la muestra cambiará su polarización y las cargas libres de signo opuesto fluirán a las placas desde el circuito externo en cantidad suficiente para neutralizar no sólo la *carga libre* que ya está allí, sino también

FIGURA 5.5

Muestra polarizada de material ferroeléctrico.

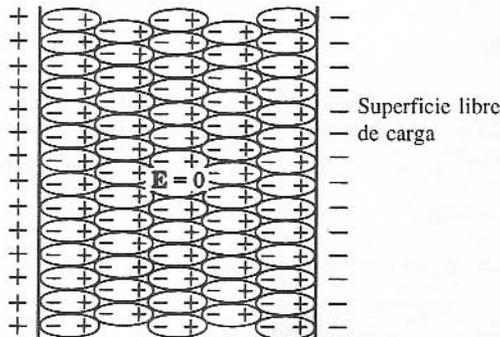
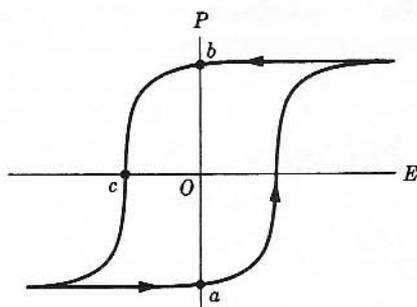


FIGURA 5.6

Curva de histéresis para una muestra ferroeléctrica.



la nueva carga de polarización. Por tanto, una lámina ferroeléctrica entre dos placas paralelas puede servir como elemento básico de un dispositivo para memoria. Éste es capaz de almacenar cargas sobre las placas que rodean el ferroeléctrico como \pm o \mp y su polarización persiste en ausencia de un campo eléctrico externo. El “número” \pm o \mp puede leerse al aplicar una diferencia de potencial a través de la muestra. Si el campo aplicado está en la dirección de la polarización original, no pasará ninguna carga a través del circuito externo: si la diferencia de potencial es opuesta a la polarización original, fluirá una carga por el circuito externo al cambiar de sentido la polarización del ferroeléctrico.

Un ferroeléctrico polarizado es estable frente a un campo eléctrico con sentido inverso siempre y cuando este campo eléctrico no sea demasiado grande. La figura 5.6 muestra la curva completa de polarización en función del campo eléctrico. Es evidente que para campos bajos hay dos valores de P para cada valor de E . Una curva tal como la de la figura 5.6 se llama *curva de histéresis*. Histéresis significa “quedarse atrás” y es evidente que el vector de polarización se retrasa con respecto al vector del campo eléctrico. Los puntos b y a son las configuraciones estables en $E = 0$; representan las polarizaciones \pm y \mp , respectivamente. El punto c es el campo eléctrico que hay que superar para invertir la polarización.

5.5

RESUMEN

La polarización macroscópica \mathbf{P} de un material dieléctrico isótropo depende del momento dipolar molecular (o de su componente efectiva) \mathbf{p}_m , que aparece en respuesta al campo eléctrico local en la molécula, el **campo molecular** \mathbf{E}_m :

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}_m$$

Generalmente, \mathbf{p}_m es proporcional a \mathbf{E}_m en una buena aproximación,

$$\mathbf{p}_m = \alpha\mathbf{E}_m$$

donde α es la **polarizabilidad molecular**. El campo molecular depende del campo aplicado \mathbf{E} y también de la misma polarización (es decir, del campo dipolar de todas las otras moléculas). En los casos más sencillos

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

En el caso más general, \mathbf{E}_m puede eliminarse de estas ecuaciones para dar

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$$

con la constante de susceptibilidad

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}$$

Pero si las moléculas son muy polarizables ($N\alpha > 3\epsilon_0$), es posible otra solución con $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{P} \neq 0$ (es decir, el material puede ser polarizado espontáneamente en un campo aplicado cero, como ocurre en un ferroeléctrico).

- Todas las moléculas presentan un **momento dipolar inducido** en un campo eléctrico a causa de la deformación de la distribución de carga electrónica. Un modelo lineal sencillo conduce a una constante de polarizabilidad atómica proporcional al volumen atómico,

$$\alpha_0 = 4\pi\epsilon_0 R_0^3$$

- Las *moléculas polares*, que tienen un momento dipolar permanente p_0 , presentan además una **polarizabilidad por orientación** que se describe mediante la función de Langevin deducida por la mecánica estadística. A una temperatura elevada T , esta contribución también es lineal con

$$\alpha = \frac{p_0^2}{3kT}$$

- La **ecuación de Langevin-Debye** combina la polarizabilidad por orientación y por deformación.

- Unos cuantos materiales, por ejemplo el titanato de bario, presentan **ferroelectricidad**.

PROBLEMAS

5.1 (a) Utilice la ecuación de Clausius-Mossotti para determinar la polarizabilidad de los átomos en las moléculas de aire: N_2 , O_2 . (Observe que sólo puede obtenerse de la ecuación 5-10 el promedio ponderado de las polarizabilidades para el nitrógeno y el oxígeno.) (b) Combine este resultado con la teoría de la sección 5.2 para determinar el radio promedio del átomo de la molécula de aire.

5.2 La figura 5.7 muestra una red cúbica simple de moléculas, todas las cuales tienen el mismo momento dipolar \mathbf{p}_m (en dirección y magnitud). Fijemos nuestra atención en una molécula particular, digamos la j . Es evidente que la j tiene seis primeros vecinos a una distancia

Energía electrostática

Muchos problemas de mecánica se simplifican enormemente gracias a consideraciones de energía. En consecuencia, cuando debe estudiarse el comportamiento mecánico de un sistema eléctrico, puede ser ventajoso usar métodos de energía. En general, la energía de un sistema de cargas, como la de cualquier otro sistema mecánico, puede dividirse en sus contribuciones potencial y cinética. Sin embargo, en condiciones estáticas la energía total del sistema de cargas existe como energía potencial, y en este capítulo tendremos un interés particular en la energía potencial que surge de la interacción entre las cargas, la llamada *energía electrostática*.

En la sección 2.4 se mostró que la energía electrostática U de una carga puntual está estrechamente relacionada con el potencial electrostático φ en la posición de la carga puntual. De hecho, si q es la magnitud de determinada carga puntual, entonces el trabajo realizado por la fuerza sobre la carga cuando ésta se mueve desde la posición A a la posición B es

$$\begin{aligned}\text{Trabajo} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -q \int_A^B \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B - \varphi_A)\end{aligned}\tag{6-1}$$

Aquí se considera que la fuerza \mathbf{F} es solamente la fuerza eléctrica $q\mathbf{E}$ en cada punto a lo largo de la trayectoria. En estas condiciones, la partícula cargada se aceleraría. Si no se acelera, la fuerza eléctrica debe estar equilibrada en cada punto por una fuerza de la misma magnitud y de sentido contrario, aplicada mediante algún otro agente, de tal modo que el trabajo *total* es cero y la energía cinética no cambia. El trabajo efectuado por esta *otra* fuerza es

$$W = q(\varphi_B - \varphi_A)\tag{6-2}$$

Este resultado es igual al incremento producido en la energía electrostática de la carga a lo largo de la trayectoria $A \rightarrow B$.

Consideraciones semejantes pueden aplicarse a sistemas de cargas más complejos. De hecho, la energía electrostática de una distribución arbitraria de carga puede calcularse como el trabajo necesario para reunir dicha distribución de carga en contra de la interacción de Coulomb de las cargas sin considerar otras formas de energía. Este cálculo y algunas de sus consecuencias son la materia de este capítulo.

6.1

ENERGÍA POTENCIAL DE UN GRUPO DE CARGAS PUNTALES

Por energía electrostática de un grupo m de cargas puntuales entenderemos la energía potencial de un sistema en relación con el estado en que todas las cargas puntuales están infinitamente separadas unas de otras. Esta energía puede obtenerse muy fácilmente calculando el trabajo para reunir las cargas de acuerdo con la ecuación (6-2), trayendo una sola a la vez. La primera carga q_1 puede ser colocada sin trabajo alguno, $W_1 = 0$. Para colocar la segunda, q_2 , se requiere

$$W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}$$

donde $r_{21} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Para la tercera carga, q_3 ,

$$W_3 = q_3 \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right]$$

El trabajo necesario para traer la cuarta carga, la quinta carga, etc., puede expresarse de forma semejante. La energía electrostática total del sistema de m cargas es la suma de los W ; es decir,

$$U = \sum_{j=1}^m W_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \quad (6-3)$$

Abreviaremos esta expresión de U como

$$U = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{j-1} W_{jk}$$

Si ahora ordenamos W_{jk} en forma de matriz, teniendo en cuenta que $W_{jk} = W_{kj}$ y poniendo $W_{jj} = 0$, es evidente que podemos escribir U también como

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m W_{jk} \quad (W_{jj} = 0)$$

El factor $\frac{1}{2}$ de esta suma, que resulta ser más simétrica, aparece debido a que la interacción entre cada par de cargas no debe considerarse dos veces. De este modo, una forma alternativa más conveniente de la ecuación (6-3) es

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum'_{k=1}^m \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (6-4)$$

donde la prima de la segunda sumatoria significa que el término $k = j$ se excluye específicamente.

La ecuación (6-4) puede escribirse en forma diferente si notamos que el valor final del potencial φ para la j -ésima carga puntual debido a otras cargas del sistema está dado por

$$\varphi_j = \sum'_{k=1}^m \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (6-5)$$

Por tanto, la energía electrostática del sistema es

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_j \varphi_j \quad (6-6)$$

Si las cargas puntuales se reunieran en un medio dieléctrico lineal de extensión infinita, en lugar del vacío, entonces la permitividad ϵ sustituiría a ϵ_0 en las ecuaciones (6-4) y (6-5), pero la ecuación (6-6) permanecería inalterada. En la siguiente sección se mostrará que esta última ecuación tiene una validez de carácter general. Se puede aplicar a un grupo de cargas puntuales que se encuentran en más de un medio dieléctrico e incluso se aplica a conductores de tamaño finito. La única restricción para la validez de la ecuación (6-6) es que todos los dieléctricos en el sistema eléctrico deben ser lineales.

6.2 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

En esta sección calcularemos la energía electrostática de una distribución de cargas arbitraria con densidad de volumen ρ y densidad de superficie σ . Parte de la carga puede estar localizada sobre las superficies de conductores. De hecho, se considerará explícitamente que hay conductores en el sistema. Además, se considerará que los dieléctricos en el sistema son *lineales*. Esta restricción es necesaria para que el trabajo efectuado al traer el sistema a su estado de carga final sea independiente de la forma en que se alcance dicho estado final.

Supongamos que reunimos la distribución de carga trayendo incrementos de carga δq desde un potencial de referencia $\varphi_A = 0$. Si la distribución de carga está parcialmente formada y el potencial en un punto particular del sistema es $\varphi'(x, y, z)$, entonces, de la ecuación (6-2), el trabajo necesario para colocar δq en este punto es

$$\delta W = \varphi'(x, y, z) \delta q \quad (6-7)$$

El incremento de carga δq puede añadirse a un elemento de volumen localizado en (x, y, z) , de tal forma que $\delta q = \delta \rho \Delta v$, o δq puede añadirse a un elemento de superficie en el punto en cuestión, en este caso $\delta q = \delta \sigma \Delta a$. La energía electrostática total de la distribución de carga reunida se obtiene sumando las contribuciones que tienen la forma de la ecuación (6-7).

Dado que el trabajo necesario para reunir las cargas es independiente del orden en el cual se realice esta acción, podemos escoger un procedimiento particular para reunir las cargas en el que la suma de los δW se calcule convenientemente. Este procedimiento es aquel en el que todas las partes del sistema son traídas a su estado final de carga al mismo tiempo, es decir que en cualquier etapa del proceso, todas las densidades de carga están a la misma fracción de sus valores finales. Llamaremos a esta fracción α . Si los valores finales de las densidades de carga están dados por las funciones $\rho(x, y, z)$ y $\sigma(x, y, z)$, entonces las densidades de carga en una etapa arbitraria son $\alpha\rho(x, y, z)$ y $\alpha\sigma(x, y, z)$. Además, los incrementos de estas densidades son $\delta\rho = \rho(x, y, z) d\alpha$ y $\delta\sigma = \sigma(x, y, z) d\alpha$. La energía electrostática total, que se obtiene sumando la ecuación (6-7), es

$$U = \int_0^1 \delta d \int_V \rho(x, y, z) \varphi'(\alpha; x, y, z) dv \\ + \int_0^1 \delta d \int_S \sigma(x, y, z) \varphi'(\alpha; x, y, z) da$$

Pero como todas las cargas están a la misma fracción, α , de sus valores finales, el potencial $\varphi(\alpha; x, y, z) = \alpha\varphi(x, y, z)$, donde φ es el valor final del potencial en (x, y, z) . Si sustituimos esta expresión, encontramos que la integración sobre α es directa y da

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dv + \frac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) da \quad (6-8)$$

Esta ecuación da el resultado deseado para la energía de una distribución de carga. Es importante hacer notar que el volumen de integración V debe ser lo suficientemente grande como para incluir *toda* la densidad de carga en el problema, y que el potencial φ es sólo el debido a la propia densidad de carga ρ (y σ). Generalmente las densidades de carga se anulan fuera de alguna región limitada, en cuyo caso puede considerarse que V abarca todo el espacio. Si el espacio total se llena con un solo medio dieléctrico excepto en ciertos conductores, el potencial está dado por

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6-9)$$

Si se presentan varios dieléctricos, deben cumplirse las condiciones apropiadas en la frontera, por ejemplo sumando soluciones adecuadas de la ecuación de Laplace a la ecuación (6-9). Las ecuaciones (6-8) y (6-9) son generalizaciones de las ecuaciones (6-6) y (6-5) para cargas puntuales. Estas últimas ecuaciones pueden recuperarse como caso especial si

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{k=1}^m q_k \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k)$$

donde la prima en la segunda sumatoria indica que el término $k = j$ no debe ser considerado cuando se tiene una doble suma. Cuando ρ es una distribución continua, la anulación del denominador en la ecuación (6-9) no causa que la integral diverja, de tal forma que no es necesario excluir el punto $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$.

Se estableció que hay conductores presentes en el sistema. Aun cuando la ecuación (6-8) cubre este caso bastante bien, es conveniente separar explícitamente la contribución de los conductores. La última integral incluye, en parte, integraciones sobre las superficies de estos conductores. Puesto que un conductor es una región equipotencial, cada una de estas integraciones puede realizarse:

$$\frac{1}{2} \int_{\text{conductor } j} \sigma \varphi da = \frac{1}{2} Q_j \varphi_j \quad (6-10)$$

donde Q_j es la carga sobre el j -ésimo conductor.

La ecuación (6-8) para la *energía electrostática de una distribución de carga*, que incluye conductores, se convierte en

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dv + \frac{1}{2} \int_{S'} \sigma \varphi da + \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_j \quad (6-11)$$

donde la última suma se efectúa sobre todos los conductores y la integral de superficie se restringe a superficies no conductoras.

Como vimos en el capítulo 3, en muchos problemas de interés práctico todas las cargas permanecen en la superficie de los conductores. En estas circunstancias, la ecuación (6-11) se reduce a

$$U = \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_j \quad (6-12)$$

Tendremos ocasión de desarrollar esta ecuación en una sección posterior de este capítulo.

Por ahora, nos gustaría comparar la ecuación (6-12) con la ecuación (6-6), que fue deducida para una agrupación de cargas puntuales. A primera vista parece que las dos ecuaciones son idénticas. Sin embargo, hay una diferencia importante. La ecuación

(6-12) se obtuvo a partir de conductores macroscópicos descargados que fueron cargados gradualmente trayendo incrementos de carga. De esta forma, la energía descrita por la ecuación (6-12) incluye tanto la interacción energética entre los diferentes conductores como la energía propia de la carga para cada conductor individual. Si sólo hay un conductor, su energía propia $U = \frac{1}{2} Q_1 \varphi_1$ se debe a la interacción energética de la agrupación de cargas en el conductor. Sin embargo, para la derivación de la ecuación (6-6) cada carga puntual se trabajó como una unidad. De aquí que no esté incluida la energía para traer la carga puntual a partir de incrementos más *pequeños* de carga, la llamada energía propia de la carga puntual. Un intento de calcularla daría un resultado infinito si la carga fuera un punto en el sentido matemático, pero no está incluida en la formulación de la ley de Coulomb de la fuerza entre las cargas puntuales y no debe considerarse ahora. Para mostrar que la ecuación (6-12) proporciona el mismo resultado en el límite cuando los conductores llegan a ser muy pequeños, aproximándose a cargas "puntuales", el potencial del j -ésimo conductor puede expresarse como la suma de dos términos

$$\varphi_j = \varphi_{j1} + \varphi_{j2} \quad (6-13)$$

donde φ_{j1} es la contribución al potencial debida a la carga sobre el mismo conductor j , y φ_{j2} es la contribución de la carga sobre otros conductores. Así, la ecuación (6-12) se convierte en

$$U = \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_{j1} + \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_{j2} \quad (6-14)$$

El primer término de esta ecuación representa las diferentes energías propias de los conductores. Cada energía propia, $\frac{1}{2} Q_j \varphi_{j1}$, depende de los alrededores del conductor (ya que la distribución de carga en cada conductor se ajusta a su medio ambiente). Además, el único potencial físicamente significativo y asociado al conductor j es el potencial total φ_j . De este modo, la descomposición de la ecuación (6-14) *no* tiene mucho sentido en general. Sin embargo, si los conductores son tan pequeños que pueden tratarse como cargas puntuales desde el punto de vista macroscópico, la redistribución de la carga en el "punto" no es importante y cada energía propia puede considerarse independiente de su entorno. Además, ya que por potencial de la carga puntual j entendemos φ_{j2} , la segunda suma de la ecuación (6-14) representa la energía necesaria para colocar en una posición determinada un grupo de *conductores muy pequeños previamente cargados*, lo que es equivalente a la ecuación (6-6).

6.3 DENSIDAD DE ENERGÍA DE UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

En la sección precedente se desarrolló una expresión para la energía electrostática de una distribución arbitraria de carga. Esta expresión, ecuación (6-8), contiene una integración explícita sobre la distribución de carga. Sin embargo, es posible expresar la

energía electrostática del sistema de forma diferente, una forma alternativa frecuentemente más útil. Por medio de transformaciones matemáticas (integración por partes), convertimos la ecuación (6-8) en una integral que contiene los campos vectoriales \mathbf{E} y \mathbf{D} del sistema.

Consideremos nuevamente una distribución de carga arbitraria caracterizada por las densidades ρ y σ . Por conveniencia, se considerará que el sistema de cargas está limitado, es decir, que es posible construir una superficie cerrada S' de dimensiones finitas que encierre toda la carga. Por otra parte, todas las densidades superficiales de carga σ se considerarán situadas en las superficies de los conductores. Este último enunciado no es una restricción en absoluto, ya que la densidad de carga superficial sobre una zona interfacial entre dos dieléctricos puede extenderse ligeramente y entonces considerarse como una densidad volumétrica ρ . Las densidades ρ y σ están relacionadas con el desplazamiento eléctrico:

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

en todas las regiones del dieléctrico, y

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$$

sobre las superficies del conductor. De aquí que la ecuación (6-8) se convierte en

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (6-15)$$

Aquí, la integral de volumen se refiere a la región en la que $\nabla \cdot \mathbf{D}$ es diferente de cero, y ésta es la región externa a los conductores. La integral de superficie se efectúa sobre los conductores.

El integrando de la primera integral de la ecuación (6-15) puede transformarse mediante una identidad vectorial que ya hemos tenido ocasión de usar varias veces, la ecuación (1.1.7) de la tabla 1.1:

$$\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varphi \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi$$

De las dos integrales de volumen resultantes de esta transformación, la primera puede convertirse en una integral de superficie empleando el teorema de la divergencia. Finalmente, usando el hecho de que $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ podemos escribir la ecuación (6-15) como

$$U = \frac{1}{2} \int_{S+S'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' \, da + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (6-16)$$

Esta ecuación puede simplificarse considerablemente. La superficie $S + S'$ sobre la cual se calcula la primera integral de la ecuación (6-16) es la superficie total que limita el volumen V . Ésta se compone de S (las superficies de todos los conductores del

sistema) y de S' (una superficie que limita nuestro sistema exteriormente y que podemos suponer que se localiza en el infinito). En ambos casos, la normal \mathbf{n}' está dirigida *hacia afuera* del volumen V . En la última integral, la normal \mathbf{n} está dirigida hacia afuera del conductor y, en consecuencia, *hacia el interior de V* . De este modo, las dos integrales de superficie sobre S se cancelan. Sólo queda demostrar que la integral sobre S' se anula.

Si nuestra distribución de carga, que es arbitraria pero limitada, contiene una carga neta, entonces a grandes distancias del sistema de carga el potencial decae inversamente con la distancia, es decir, como r^{-1} . \mathbf{D} decae como r^{-2} . El área de una superficie cerrada que pasa por un punto a una distancia r es proporcional a r^2 . En consecuencia, el valor de la integral sobre S' , que limita nuestro sistema a la distancia r , es proporcional a r^{-1} y, cuando S' se traslada al infinito, su contribución se anula.

Si la distribución de carga tiene una carga neta cero, entonces el potencial a grandes distancias actúa como algún multipolo y decae *más* rápidamente que r^{-1} . Nuevamente, puede verse que la contribución de S' se anula. Así pues, para la energía electrostática tenemos

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv \quad (6-17)$$

donde la integración se realiza sobre el volumen del sistema exterior a los conductores, es decir, sobre los diversos dieléctricos del sistema. Por supuesto, la integración puede extenderse para incluir todo el espacio, ya que el campo eléctrico \mathbf{E} es igual a cero en el interior de un conductor. Si se aplica esta formulación a campos que están producidos en parte por cargas puntuales, es necesario restar explícitamente sus "energías propias" infinitas. (Véase el problema 6-7.)

¿Dónde está localizada la energía electrostática del sistema eléctrico? Ésta es una pregunta cuyo significado preciso es difícil de averiguar; no obstante, es conveniente imaginar que la energía está almacenada en el campo eléctrico. La ecuación (6-17) muestra que dicho procedimiento no es del todo irrazonable y, además, prescribe que la energía puede distribuirse con una densidad $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ por unidad de volumen.

Esto nos conduce al concepto de *densidad de energía* en un campo electrostático:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (6-18a)$$

Ya que la ecuación (6-17) se dedujo con base en dieléctricos lineales, cada dieléctrico está caracterizado por una permitividad constante ϵ . Además, el análisis de los capítulos anteriores se ha limitado a dieléctricos isótropos. Por tanto, la ecuación (6-18a) es equivalente a

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad (6-18b)$$

6.4

ENERGÍA DE UN SISTEMA DE CONDUCTORES CARGADOS: COEFICIENTES DE POTENCIAL

En la sección 3.12 se mostró que existe una relación lineal entre los potenciales y las cargas de un conjunto de conductores. De hecho, en un sistema formado por N conductores, el potencial de uno de ellos está dado por

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j \quad (3-52)$$

La derivación de la ecuación (3-52) se llevó a cabo para N conductores en el vacío. Sin embargo, está claro que esta derivación también es válida cuando se presentan dieléctricos en el sistema, siempre y cuando estos dieléctricos sean lineales y estén desprovistos de carga externa. El coeficiente p_{ij} es el potencial del i -ésimo conductor debido a una unidad de carga sobre el conductor j . Estos coeficientes se llaman generalmente *coeficientes de potencial*.

En la sección 6.2 se desarrolló una expresión para la energía electrostática de un conjunto de N conductores cargados, es decir, la ecuación (6-12). Combinando este resultado con la ecuación (3-52), obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_i Q_j \quad (6-19)$$

Así pues, la energía es una función cuadrática de las cargas en los diversos conductores.

Se pueden establecer tres enunciados generales acerca de los coeficientes p_{ij} : (1) $p_{ij} = p_{ji}$; (2) todas las p_{ij} son positivas, y (3) $p_{ii} \geq p_{ij}$ para toda j . El primero de estos enunciados se obtiene a partir de la ecuación (6-19), que expresa U como $U(Q_1 \dots Q_N)$. Por tanto,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial Q_1} \right) dQ_1 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial Q_N} \right) dQ_N$$

Si solamente se varía dQ_1 , entonces

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial Q_1} \right) dQ_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (p_{1j} + p_{j1}) Q_j dQ_1 \quad (6-20)$$

Este incremento en la energía electrostática también puede calcularse directamente de la ecuación (6-2). Trayendo dQ_1 desde una región a potencial cero, obtenemos

$$dU = dW = \varphi_1 dQ_1 = \sum_{j=1}^N p_{1j} Q_j dQ_1 \quad (6-21)$$

Las ecuaciones (6-20) y (6-21) deben ser equivalentes para todos los valores posibles de Q_j , lo que implica que

$$\frac{1}{2}(p_{1j} + p_{j1}) = p_{1j}$$

o

$$p_{j1} = p_{1j} \quad (6-22)$$

Para demostrar el segundo y tercer enunciados, consideremos que todos los potenciales se miden desde una región a potencial cero. Además, supongamos que el conductor i tiene una carga positiva Q_i y que todos los demás conductores están descargados. Ya que el origen del flujo de desplazamiento es la carga sobre i , es posible seguir cada línea de desplazamiento que sale del i -ésimo conductor, tal vez vía otros conductores, hasta dicha región. De este modo, $\phi_i > 0$, y $p_{ii} > 0$. De forma semejante, a menos que el j -ésimo conductor esté cubierto por uno de los otros conductores, todas las líneas de desplazamiento que invadan j pueden trazarse de regreso hasta el i -ésimo conductor y todas las líneas que salen del j -ésimo conductor pueden trazarse hasta la región a potencial cero. Por tanto,

$$p_{ii} > p_{ij} > 0$$

Sólo queda considerar el caso de un conductor que está completamente cubierto por otro conductor. Supongamos que el j -ésimo conductor, el que está descargado, se encuentra totalmente dentro de la cáscara conductora que encierra el i -ésimo conductor. El campo eléctrico en la región interior es obviamente cero; en consecuencia, los potenciales de los dos conductores son los mismos, y $P_{ij} = P_{ii}$. Este análisis prueba los enunciados (2) y (3) que pueden combinarse en

$$p_{ii} \geq p_{ij} > 0 \quad (6-23)$$

La utilidad de los coeficientes p_{ij} puede ilustrarse mediante un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 6.1

Uso del coeficiente de potencial para calcular el potencial electrostático

El problema es encontrar el potencial de un conductor esférico *descargado* en presencia de una carga puntual q a una distancia r del centro de la esfera, siendo $r > R$, y R el radio del conductor esférico.

Solución: La carga puntual y la esfera se consideran como un sistema de dos conductores, y se utiliza la igualdad $p_{12} = p_{21}$. Si la esfera está cargada (Q) y el "punto" está descargado, entonces el potencial del "punto" es $q/4\pi\epsilon_0 r$. Por tanto,

$$p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Evidentemente, cuando el "punto" tiene una carga q y la esfera está descargada, el potencial de esta última es $q/4\pi\epsilon_0 r$.

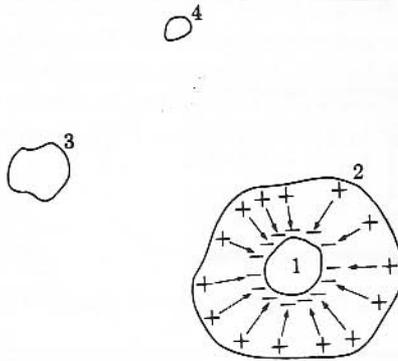
6.5

COEFICIENTES DE CAPACIDAD E INDUCCIÓN

La ecuación (3-52), deducida en el capítulo 3 y analizada nuevamente en la sección 6.4, es un sistema de N ecuaciones lineales que nos da los potenciales de los conductores en función de sus cargas. Este sistema de ecuaciones puede resolverse para las Q_i de tal forma que

FIGURA 6.1

Los conductores 1 y 2 forman un condensador. Aquí $p_{13} = p_{23}$, ya que, por la ley de Gauss, cuando 1 y 2 están descargados deben estar al mismo potencial, independientemente de la carga sobre 3. Análogamente, $p_{14} = p_{24}$.



$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_j \tag{6-24}$$

donde c_{ii} se llama *coeficiente de capacidad* y c_{ij} ($i \neq j$) es un *coeficiente de inducción*. La solución a la ecuación (3-52), expresando cada una de las c en términos de las p_{ij} , puede llevarse a cabo mediante la inversión de matrices.

Las propiedades de las c se deducen de aquellas de las p , que ya se han analizado. Así pues, (1) $c_{ij} = c_{ji}$; (2) $c_{ii} > 0$; (3) los coeficientes de inducción son negativos o cero. (Véase el problema 6.10.)

La ecuación (6-24) puede combinarse con la ecuación (6-12) para dar una expresión alternativa de la energía electrostática de un sistema de N conductores:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_i \varphi_j \tag{6-25}$$

6.6 CONDENSADORES

En esta sección analizaremos un dispositivo importante para almacenar energía electrostática, llamado condensador.

Dos conductores que pueden almacenar cargas iguales y opuestas ($\pm Q$), con una diferencia de potencial entre sí que es independiente de que los demás conductores del sistema tengan carga o no, forman lo que se llama un *condensador*.

Esta independencia de otras cargas* implica que uno de los conductores del par que forma el condensador está cubierto por el otro. En otras palabras, el potencial aportado a *cada uno* de los conductores del par por otras cargas debe ser el mismo. Dicha situación se ilustra en la figura 6.1, en la que los conductores 1 y 2 forman un dispositivo de este tipo. En general, si dos conductores, 1 y 2, forman un condensador, podemos escribir

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= p_{11}Q - p_{12}Q + \varphi_x \\ \varphi_2 &= p_{12}Q - p_{22}Q + \varphi_x\end{aligned}\tag{6-26}$$

donde $+Q$ es la carga en 1, $-Q$ es la carga en 2 y φ_x es el potencial común aportado por otras cargas.

Si las ecuaciones (6-26) se restan, encontramos que

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q\tag{6-27}$$

De esta forma, la diferencia de potencial entre los conductores de un condensador es proporcional a la carga almacenada Q . (Evidentemente, la carga total almacenada es cero, pero, por convenio, el valor absoluto de la carga sobre uno de los dos conductores se llama *carga* del condensador.)

La ecuación (6-27) puede escribirse como

$$Q = C \Delta\varphi\tag{6-28}$$

donde $C = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})^{-1}$ se llama *capacidad* del condensador.

Evidentemente, C es la carga almacenada por unidad de diferencia de potencial. En el sistema mks, C se mide en coulombs por volt, o farads ($1 \text{ F} \equiv 1 \text{ C/V}$).

De la ecuación (6-12) con la ecuación (6-28), la energía de un condensador cargado puede expresarse como

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}\tag{6-29}$$

Si los dos conductores que forman el condensador tienen formas geométricas sencillas, la capacidad puede obtenerse analíticamente. Así, por ejemplo, es fácil calcular la capacidad de dos placas paralelas, dos cilindros coaxiales, dos esferas concéntricas, o la de un cilindro y un plano. La capacidad de un condensador de placas paralelas (Fig. 6.2) se deducirá aquí; otros casos sencillos se han dejado para los ejercicios al final del capítulo.

* Lo que hemos descrito es un condensador ideal. En la práctica, los condensadores son afectados hasta cierto punto por las cargas en sus alrededores.

FIGURA 6.2

Campo eléctrico entre placas paralelas de área finita cargadas opuestamente.

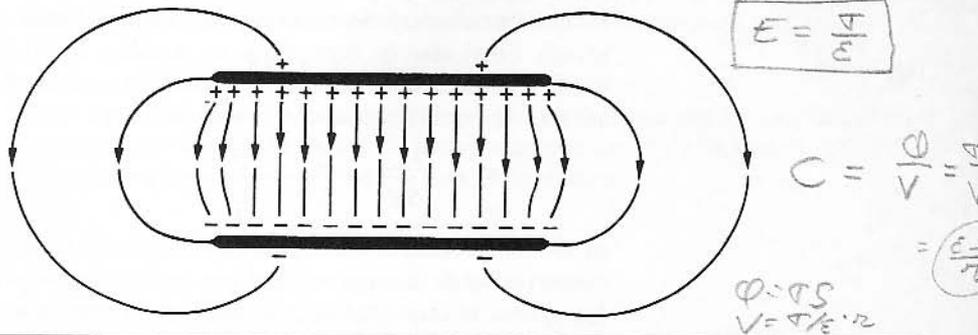
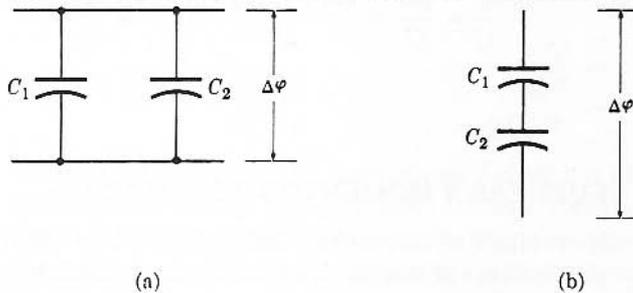


FIGURA 6.3

Conexión de condensadores (a) en paralelo y (b) en serie.



Con excepción del campo deformado en el borde de las placas paralelas, el campo eléctrico entre ellas es uniforme. Un condensador ideal de placas paralelas es aquel que tiene una separación d muy pequeña entre las placas comparada con las dimensiones de las mismas. De esta forma, el campo deformado puede despreciarse en el caso ideal. Si la región entre las placas se llena con un dieléctrico de permitividad ϵ , entonces el campo eléctrico entre las placas es

$$E = \frac{1}{\epsilon} \sigma = \frac{Q}{\epsilon A} \longrightarrow V = E \cdot d$$

donde A es el área de una placa. La diferencia de potencial $\Delta\varphi = Ed$. Por tanto,

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon A}{d} \longrightarrow \frac{Q}{V} = \frac{QS}{Ed} = \frac{\frac{QS}{\epsilon}}{\frac{Q}{\epsilon} d} = \frac{\epsilon S}{d} \quad (6-30)$$

es la capacidad de este condensador.

Cuando un condensador se considera parte de un circuito eléctrico, generalmente se representa con el símbolo $\text{—}\epsilon\text{—}$. Dos o más condensadores pueden unirse conectando uno de los conductores del primer condensador a un conductor del segundo. Las maneras posibles en las que se pueden unir dos condensadores son por conexión en

paralelo (Fig. 6.3a) o por conexión en serie (Fig. 6.3b). Después de que se han unido los condensadores, generalmente es conveniente hablar de la capacidad de la combinación. En el caso de la conexión en paralelo, el mismo voltaje $\Delta\varphi$ que aparece a través de cada condensador aparece también a través de la combinación. En consecuencia, la capacidad equivalente está dada por

$$C = \frac{Q_{\text{total}}}{\Delta\varphi} = \frac{Q_1}{\Delta\varphi} + \frac{Q_2}{\Delta\varphi} = C_1 + C_2 \quad (6-31a)$$

Si dos condensadores descargados se conectan en serie y posteriormente se cargan, la *conservación de la carga* requiere que cada condensador adquiera la misma carga. De esta forma, la capacidad equivalente C de la combinación se relaciona con C_1 y C_2 mediante la expresión

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta\varphi}{Q} = \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (6-31b)$$

6.7

FUERZAS Y MOMENTOS DE ROTACIÓN

Hasta ahora, en este capítulo hemos desarrollado varios procedimientos alternativos para calcular la energía electrostática de un sistema de cargas. Mostraremos ahora cómo la fuerza sobre uno de los elementos del sistema de cargas puede calcularse a partir del conocimiento de la energía electrostática.

Supongamos que tenemos un sistema aislado formado por varias partes (conductores, cargas puntuales, dieléctricos) y permitimos que una de estas partes haga un pequeño desplazamiento, $d\mathbf{r}$, debido a la influencia de las fuerzas eléctricas \mathbf{F} que actúan sobre ella. En estas circunstancias, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre el sistema es

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (6-32)$$

Debido a que el sistema está aislado, el trabajo se hace a costa de la energía electrostática U . En otras palabras, de acuerdo con la ecuación (6-1),

$$dW = -dU \quad (6-33)$$

Combinando las ecuaciones (6-32) y (6-33) se obtiene

$$-dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

y

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (6-34)$$

con expresiones semejantes para F_y y F_z . Esto es, en este caso \mathbf{F} es una fuerza conservativa y $\mathbf{F} = -\nabla U$.

Si el elemento considerado está restringido a moverse de tal forma que gire alrededor de un eje, entonces la ecuación (6-32) puede ser reemplazada por

$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \quad (6-35)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el momento de rotación eléctrico y $d\boldsymbol{\theta}$ es el diferencial del desplazamiento angular. Al escribir $\boldsymbol{\tau}$ y $d\boldsymbol{\theta}$ en función de sus componentes (τ_1, τ_2, τ_3) y $(d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3)$, y al combinar las ecuaciones (6-33) y (6-35) obtenemos

$$\tau_1 = - \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \quad (6-36)$$

y así sucesivamente.

De esta forma hemos alcanzado nuestro objetivo:

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_Q \quad (6-34a)$$

$$\tau_1 = - \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_Q \quad (6-36a)$$

donde el subíndice Q se ha añadido para indicar que el sistema está aislado y, en consecuencia, su carga total permanece constante durante el desplazamiento $d\mathbf{r}$ o $d\boldsymbol{\theta}$. Para aprovechar este método, es necesario expresar U de forma analítica y conocer la dependencia específica de U con respecto a la coordenada x o θ_1 . Más adelante se dará un ejemplo que muestra la utilidad del método.

Sin embargo, las ecuaciones (6-34a) y (6-36a) no cubren todos los casos de interés ya que, como se mencionó en su deducción, se limitan a sistemas aislados en los que la carga del sistema permanece constante. En otro tipo importante de problemas, todas las cargas se encuentran en las superficies de los conductores y se mantienen a potenciales fijos por medio de fuentes de energía externas (es decir, por medio de baterías). Aquí nuevamente podemos permitir que una de las partes del sistema se mueva bajo la influencia de las fuerzas eléctricas que actúan sobre ella y el trabajo realizado (esta vez por el sistema y las baterías) estará aún relacionado con la fuerza por la ecuación (6-32). En este caso, el trabajo se convierte en

$$dW = dW_b - dU \quad (6-37)$$

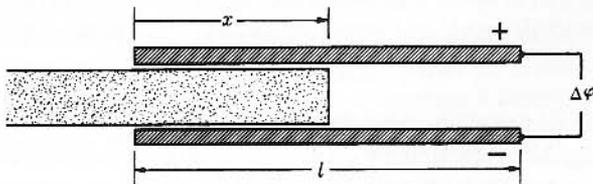
donde dW_b es el trabajo suministrado por las baterías. Antes de que procedamos a encontrar una expresión para U y la fuerza sobre alguna parte del sistema para este caso, será necesario eliminar dW_b de la ecuación (6-37).

La energía electrostática U de un sistema de conductores cargados ya se ha dado en la ecuación (6-12). Si ahora parte del sistema se desplaza mientras el potencial de todos los conductores permanece fijo,

$$dU = \frac{1}{2} \sum_j \varphi_j dQ_j \quad (6-38)$$

FIGURA 6.4

Bloque de dieléctrico sacado parcialmente de entre dos placas cargadas.



Además, el trabajo proporcionado por las baterías, dW_b , es el necesario para mover cada uno de los incrementos de carga dQ_j desde el potencial cero hasta el potencial del conductor apropiado. Por la ecuación (6-2) este trabajo es

$$dW_b = \sum_j \varphi_j dQ_j \quad (6-39)$$

Por tanto,

$$dW_b = 2 dU \quad (6-40)$$

Al usar esta ecuación para eliminar dW_b de la ecuación (6-37) y al combinar el resultado con la ecuación (6-32), obtenemos

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

o

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_\varphi \quad (6-41)$$

Aquí el subíndice φ se usa para indicar el hecho de que los potenciales se mantienen constantes durante el desplazamiento virtual $d\mathbf{r}$. De manera semejante, podemos derivar

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_\varphi \quad (6-42)$$

Para ilustrar el método de la energía, consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.2

Fuerza recuperadora sobre un bloque dieléctrico parcialmente sacado de un condensador

Un condensador de placas paralelas separadas una distancia d tiene la región entre las placas llena de un bloque de sólido dieléctrico de permitividad ϵ . Las dimensiones de cada una de las placas son: l de largo y w de ancho. Las placas se mantienen a una diferencia de potencial constante $\Delta\varphi$. Si el bloque de dieléctrico se saca a lo largo de la dimensión l hasta que sólo la longitud x permanece entre las placas (véase la Fig. 6.4), calcule la fuerza que tiende a arrastrar el bloque a su posición inicial.

Solución. La energía del sistema puede calcularse por varios métodos. Así, por ejemplo, ya que $E = Dj/d$ es igual en todas partes entre las placas, podemos usar

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv$$

donde la región de integración debe incluir sólo aquellas partes del espacio en las que $E \neq 0$. Despreciando los efectos de deformación en el borde del condensador, encontramos

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\Delta\varphi}{d} \right)^2 dwx + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\Delta\varphi}{d} \right)^2 dw(l-x)$$

La fuerza puede calcularse a partir de la ecuación (6-41):

$$F_x = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) w \frac{(\Delta\varphi)^2}{d} = \frac{1}{2} (K - 1) \epsilon_0 E^2 wd$$

en la dirección en que se incrementa x .

El caso en el que las placas están aisladas (carga constante Q) se trata en los problemas 6.19 y 6.24.

6.8

RESUMEN

La **energía potencial electrostática** de un sistema de cargas puntuales se calcula como el trabajo que tendría que hacer un agente externo en contra de las fuerzas de Coulomb entre las cargas para reunir las en la configuración dada. Esto se expresa como

$$U = \frac{1}{2} \sum q_j \varphi_j$$

donde φ_j el potencial en la posición de la carga q_j debido a todas las *otras* cargas, es

$$\varphi_j = \sum' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}$$

con el término $k = j$ excluido. Para una distribución general de carga, la energía electrostática, siempre y cuando todos los dieléctricos presentes sean lineales, se convierte en

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dv$$

donde el potencial φ es el producido por la densidad de carga externa ρ en presencia de un medio dieléctrico (ρ puede incluir la carga concentrada en una distribución superficial o en cargas puntuales). La integración por partes transforma la energía que está en dieléctricos lineales en una integral,

$$U = \int u dv$$

de la **densidad de energía** del campo eléctrico,

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

Cuando esta fórmula se aplica a cargas puntuales, la “energía propia” infinita de éstas debe restarse.

- Cuando toda la carga es una distribución superficial sobre conductores, cuyas superficies son equipotenciales, la energía electrostática se expresa como

$$U = \frac{1}{2} \sum Q_j \varphi_j$$

Se encuentra entonces que los coeficientes en las funciones lineales

$$\varphi_i = \sum p_{ij} Q_j$$

y en las funciones inversas

$$Q_i = \sum c_{ij} \varphi_j$$

satisfacen las condiciones

$$p_{ij} = p_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}$$

(Además, $p_{ii} \geq p_{ij} > 0$ y $c_{ii} > 0 \geq c_{ij}$.)

- En el caso especial en el que dos conductores forman un **condensador**,

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta \varphi$$

con

$$Q = C \Delta \varphi$$

Para un **condensador de placas paralelas**,

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

- La **fuerza eléctrica** sobre una parte de un sistema aislado, con carga constante en cada conductor, es menos el gradiente de la energía electrostática,

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_Q$$

Si el sistema no está aislado, pero el potencial de cada conductor se mantiene constante por un agente externo (batería), la fuerza está dada por

$$F_x = + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_\varphi$$

Corriente eléctrica

Hasta ahora hemos tratado con cargas en reposo; ahora deseamos considerar cargas en movimiento uniforme. Esto implica estudiar conductores de electricidad, ya que, por definición, un conductor es un material en el que los portadores de carga son libres de moverse bajo campos eléctricos estacionarios (véase la Sec. 2.5). La definición anterior incluye no sólo los conductores convencionales, tales como metales y aleaciones, sino también los semiconductores, electrólitos, gases ionizados, dieléctricos imperfectos y aun el vacío en las proximidades de un cátodo emisor termoiónico. En muchos conductores, los portadores de carga son electrones; en otros casos, la carga puede ser conducida por iones positivos o negativos.

La carga en movimiento constituye una *corriente* y el proceso por el cual la carga se transporta se llama *conducción*. Para ser precisos, la corriente I se define como la velocidad a la que se transporta la carga a través de una superficie dada en un sistema conductor (por ejemplo, a través de una sección transversal determinada de un alambre). De este modo,

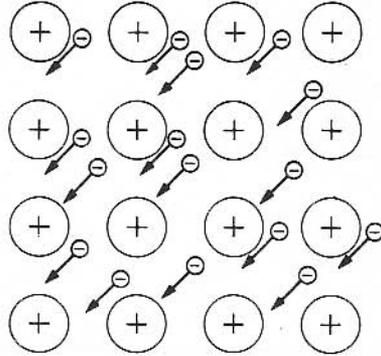
$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{7-1}$$

donde $Q = Q(t)$ es la carga neta transportada en el tiempo t . La unidad de corriente en el sistema mks es el ampere (A), llamado así en honor del físico francés André Marie Ampère. Evidentemente,

$$1 \text{ ampere} = 1 \frac{\text{coulomb}}{\text{segundo}}$$

FIGURA 7.1

Diagrama esquemático del movimiento de los electrones en un metal.



7.1

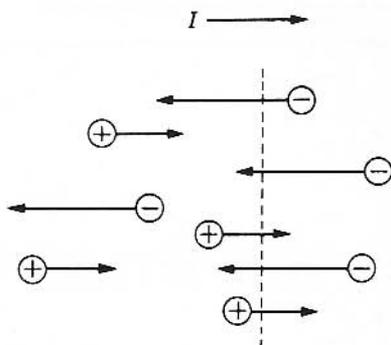
NATURALEZA DE LA CORRIENTE

En un metal la corriente es transportada completamente por electrones, mientras que los iones positivos pesados están fijos en posiciones regulares de la estructura cristalina (Fig. 7.1). Sólo los electrones atómicos de valencia (los más exteriores) tienen libertad para participar en el proceso de conducción. Los otros electrones están ligados fuertemente a sus iones. En condiciones de estado estacionario, los electrones pueden introducirse en el metal por un punto y extraerse por otro, produciéndose una corriente, pero el metal como un todo es electrostáticamente neutro. Fuerzas electrostáticas intensas impiden que un exceso de electrones se acumule en cualquier punto del metal. De forma semejante, una deficiencia de electrones es corregida por fuerzas electrostáticas de signo contrario. Veremos posteriormente que el exceso de carga se disipa con extremada rapidez en un conductor. Observemos, pues, que es posible estudiar el tema de la corriente eléctrica sin tener en cuenta los efectos electrostáticos detallados que estén asociados con los portadores de carga.

En un electrólito, la corriente es conducida tanto por iones positivos como por iones negativos, aunque, debido a que algunos iones se mueven más rápidamente que otros, la conducción por un tipo de ion predomina generalmente. Es importante hacer notar que iones positivos y negativos que viajan en sentidos *opuestos* (Fig. 7.2) contribuyen a producir corriente en el *mismo* sentido. La base de este hecho se evidencia a partir de la ecuación (7-1), ya que la carga neta transportada a través de una superficie dada depende tanto del signo del portador de carga como del sentido en el que se esté moviendo. Así pues, en la figura 7.2, tanto los grupos de portadores positivos como los negativos producen corrientes hacia la derecha. Por convenio, el sentido en que se mueve el portador positivo (o, de manera equivalente, el sentido opuesto a aquel en que se mueve el portador negativo) se toma como la dirección o *sentido* de la corriente. En general, una corriente eléctrica se origina como respuesta a un campo eléctrico. Si se establece un campo eléctrico en un conductor, dicho campo causa que

FIGURA 7.2

Corriente producida por el movimiento de portadores de carga negativos y positivos.



los portadores de carga positiva se muevan en el sentido general del campo y los portadores negativos en el sentido opuesto al del campo. En consecuencia, todas las corrientes producidas en el proceso tienen la misma dirección que el campo.

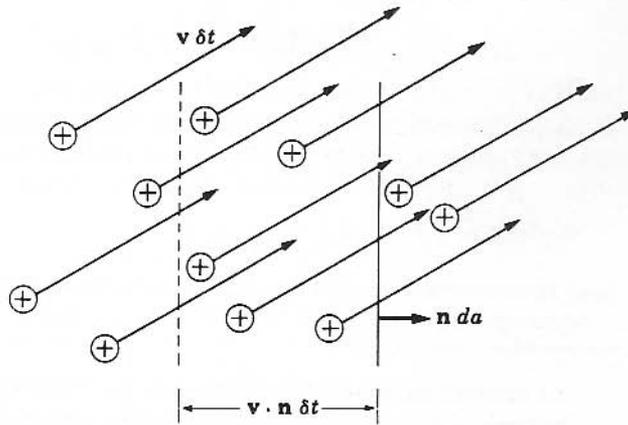
En una descarga en un gas, la corriente es transportada tanto por electrones como por iones positivos, pero como los electrones tienen mayor movilidad que los iones pesados, prácticamente toda la corriente es transportada por electrones. La conducción en gases es algo más complicada porque las poblaciones electrónica e iónica varían enormemente con las condiciones experimentales (están determinadas principalmente por la presión del gas y la caída de potencial a través del gas). En ciertas condiciones se originan *cascadas*, proceso en el que los pocos iones que están presentes inicialmente se aceleran y ocasionan colisiones inelásticas con átomos neutros, produciendo así iones y electrones adicionales. Los iones adicionales también pueden dar lugar a colisiones ionizadoras, con el resultado de que la densidad de portadores crece enormemente.

En las figuras 7.1 y 7.2 hemos representado los portadores de carga dividiéndolos en grupos, cada uno de los cuales tiene un movimiento común llamado *movimiento de deriva* del grupo. Sin embargo, la figura se ha simplificado sobremedida. Cada grupo de portadores de carga representa realmente un conjunto de partículas en equilibrio térmico con su medio ambiente, de manera que cada partícula tiene un movimiento térmico así como un movimiento de deriva. Pero el movimiento térmico, aunque puede ser grande, también es aleatorio y, en consecuencia, no da lugar a un transporte de carga organizado. Por otra parte, el movimiento de deriva no es aleatorio. Por consiguiente, al considerar estos procesos de conducción es admisible olvidar el movimiento aleatorio, que no contribuye a la corriente total, y utilizar la representación sencilla de las figuras 7.1 y 7.2. No obstante, para otros procesos de transporte, tales como la conducción en un gradiente térmico (que da lugar al efecto termoeléctrico), es necesario tener en cuenta el movimiento térmico en forma detallada para entender completamente el fenómeno.

Las corrientes que hemos descrito hasta ahora en esta sección se llaman corrientes de conducción. Estas *corrientes de conducción* representan el movimiento de deriva de los portadores de carga en un medio *neutro*, que como un todo, puede estar y

FIGURA 7.3

Movimiento de deriva de portadores de carga a través del plano da en un tiempo δt .



generalmente está en reposo. Los líquidos y los gases pueden además experimentar un movimiento hidrodinámico y, si el medio tiene una densidad de carga, este movimiento hidrodinámico producirá corrientes. Tales corrientes, que provienen del transporte masivo de un medio *cargado*, se llaman *corrientes de convección*. Las corrientes de convección son importantes en relación con la electricidad atmosférica. De hecho, las corrientes de convección ascendentes en las tormentas son suficientes para mantener el gradiente de potencial normal de la atmósfera por encima de la Tierra. El movimiento de partículas cargadas en el vacío (tales como electrones en un diodo al vacío) constituye también una corriente de convección. Una característica importante de la corriente de convección es que no es electrostáticamente neutra y su carga electrostática por lo general debe tomarse en cuenta.

En el resto de este capítulo trataremos exclusivamente con corrientes de conducción.

7.2

DENSIDAD DE CORRIENTE: ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En esta sección consideraremos primero un medio conductor que tiene sólo un tipo de portador de carga, cuya carga es q . El número de estos portadores por unidad de volumen se representará con N . De acuerdo con la sección anterior, despreciaremos su movimiento térmico aleatorio y asignaremos la misma velocidad de desplazamiento o deriva \mathbf{v} a cada portador. Estamos ahora en posición de calcular la corriente que pasa por un elemento de área da tal como el ilustrado en la figura 7.3. Durante el tiempo δt , cada portador recorre una distancia $\mathbf{v} \delta t$. Es evidente, a partir de la figura, que la carga δQ que atraviesa da durante el intervalo δt es q veces la suma de todos los portadores de carga en el volumen $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta t da$, donde \mathbf{n} es un vector unitario perpendicular al área da . De la ecuación (7-1), la corriente que pasa a través de da es:

$$dI = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{qN\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta t da}{\delta t} = Nq\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (7-2)$$

Si hay presente más de una clase de portadores de carga, habrá una contribución de la forma (7-2) para cada tipo de portador. En general, la corriente que pasa por el área da es

$$dI = \left[\sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i \right] \cdot \mathbf{n} da \quad (7-3)$$

Aquí la sumatoria se efectúa sobre los distintos tipos de portadores.

La cantidad entre corchetes es un vector que tiene dimensiones de corriente por unidad de área; esta cantidad se llama *densidad de corriente* y está dada por el símbolo \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i \quad (7-4)$$

La densidad de corriente puede definirse en cada punto de un medio conductor y es, por tanto, una función vectorial puntual. Es una cantidad útil, una cantidad que entra directamente en las ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría electromagnética. La unidad mks de \mathbf{J} es el amperio/metro² (A/m²). La ecuación (7-3) puede escribirse en la forma

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

y la corriente que pasa a través de la superficie S , que es un área superficial de forma arbitraria y de tamaño macroscópico, está dada por la integral

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (7-5)$$

La densidad de corriente \mathbf{J} y la densidad de carga ρ no son cantidades independientes, sino que están relacionadas en cada punto por una ecuación diferencial, la llamada *ecuación de continuidad*. Esta relación tiene su origen en el hecho de que la carga no puede crearse ni destruirse. La ecuación se deduce con mayor facilidad aplicando la ecuación (7-5) a una superficie S arbitraria *cerrada*. La corriente eléctrica que entra en V , el volumen encerrado por S , está dada por

$$I = -\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv \quad (7-6)$$

En esta ecuación, la última integral se obtiene utilizando el teorema de la divergencia. El signo menos aparece porque \mathbf{n} es la normal hacia afuera y deseamos considerar I positiva cuando el flujo neto de carga va del exterior de V hacia su interior. Pero de la ecuación (7-1), I es igual a la razón con que la carga se transporta al interior de V :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv \quad (7-7a)$$

Como estamos considerando un volumen fijo V , la derivada con respecto al tiempo opera sólo sobre la función ρ . Sin embargo, ρ es función tanto de la posición como del tiempo, de modo que la derivada con respecto al tiempo se convierte en derivada parcial con respecto al tiempo cuando pasa al interior de la integral. En consecuencia,

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv \quad (7-7b)$$

Las ecuaciones (7-6) y (7-7b) pueden ahora igualarse

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) \, dv = 0 \quad (7-8)$$

Pero V es completamente arbitrario y la única forma en que la ecuación (7-8) sea válida para un *elemento de volumen arbitrario* del medio es que el integrando se anule en cada punto, lo que conduce al siguiente resultado.

La ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (7-9)$$

7.3 LEY DE OHM: CONDUCTIVIDAD

Experimentalmente se encuentra que en un metal a temperatura constante la densidad de corriente \mathbf{J} es linealmente proporcional al campo eléctrico.

Por tanto, la ecuación constitutiva es

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (7-10)$$

La constante de proporcionalidad g se denomina *conductividad*. La ecuación (7-10), que se llama *ley de Ohm*, es una muy buena aproximación para un gran número de materiales conductores comunes.

Sin embargo, en el caso general, la ecuación (7-10) debe sustituirse por

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E})\mathbf{E}$$

donde $g(E)$ es función del campo eléctrico. Los materiales para los que la ecuación (7-10) es válida se llaman *medios lineales isótropos* o *medios óhmicos*. Aquí nuevamente, como con los dieléctricos, nos interesará principalmente el caso lineal.

El recíproco de la conductividad se llama *resistividad* η ;* así,

$$\eta = \frac{1}{g} \quad (7-11)$$

La unidad de η en el sistema mks es volt metro/ampere o simplemente ohm/metro,

TABLA 7.1

Resistividad η y
coeficiente de temperatura
de la resistencia α de
algunos materiales a
20 °C.

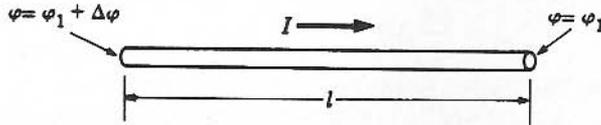
Material	$\eta, \Omega \text{ m}$	$\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dT}, (\text{°C})^{-1}$
Aluminio	2.65×10^{-8}	0.0043
Cobre	1.67×10^{-8}	0.0039
Oro	2.35×10^{-8}	0.004
Hierro	9.71×10^{-8}	0.0065
Níquel	6.84×10^{-8}	0.0069
Plata	1.59×10^{-8}	0.0041
Mercurio	95.8×10^{-8}	0.0009
Tungsteno	5.51×10^{-8}	0.0045
Constantán (Cu 60, Ni 40)	49.0×10^{-8}	0.0000
Nicromo	100.0×10^{-8}	0.0004
Germanio (puro)	0.46	-0.048
Germanio ($5 \times 10^{-6}\%$ As)	0.011	
Grafito	1.4×10^{-5}	
Solución saturada de NaCl	0.044	-0.005
Óxido de aluminio	1×10^{14}	
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	
Iodo	1.3×10^7	
Cuarzo (SiO_2)	1×10^{14}	
Azufre	2×10^{15}	
Madera	$10^8 - 10^{11}$	

Fuente: Datos tomados del *Handbook of Chemistry and Physics*, 58a. ed., Cleveland, Ohio, CRC Press Inc., 1978.

* Los símbolos comunes para la resistividad y la conductividad son ρ y σ , respectivamente, pero para evitar la posible confusión con la densidad volumétrica de carga ρ y la densidad de carga superficial σ , utilizaremos los símbolos η y g .

FIGURA 7.4

Geometría de un segmento de alambre recto.



donde el ohm (Ω) se define como

$$1 \text{ ohm} = \frac{1 \text{ volt}}{1 \text{ ampere}}$$

La unidad de conductividad g es $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$, o S/m . Un siemens (S) es el recíproco del ohm. (A un siemens antes se le decía mho.)

En la tabla 7.1 se dan las resistividades de algunos materiales comunes. Es evidente de esta tabla que todos los materiales conducen la electricidad hasta cierto grado, pero que los materiales que hemos llamado aislantes (dieléctricos) son conductores mucho peores que los metales en un factor enorme (tan grande como 10^{23}). La diferencia entre un conductor y un aislante se analizará de forma más cuantitativa en la sección 7.7.

Consideremos una muestra conductora, que obedece la ley de Ohm, en forma de un alambre recto de sección uniforme, cuyos extremos se mantienen a una diferencia de potencial constante $\Delta\phi$. (Véase la Fig. 7.4.) Se supone que el alambre es homogéneo y que está caracterizado por una conductividad constante g . En estas condiciones, existirá un campo eléctrico en el alambre que está relacionado con $\Delta\phi$ por la ecuación

$$\Delta\phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7-12a)$$

Es evidente que no puede haber componente de estado estacionario del campo eléctrico perpendicular al eje del alambre, ya que por la ecuación (7-10) esto produciría que la superficie del alambre se cargara continuamente. Por tanto, el campo eléctrico es puramente longitudinal.

Además, debido a la forma geométrica, el campo eléctrico debe ser el mismo en todos los puntos del alambre. Por consiguiente, la ecuación (7-12a) se reduce a

$$\Delta\phi = El \quad (7-12b)$$

donde l es la longitud del alambre. Pero un campo eléctrico implica una corriente de densidad $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. La corriente que pasa por una sección del alambre es

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = JA \quad (7-13)$$

siendo A el área de la sección transversal del alambre. Combinando la ecuación (7-13) con (7-10) y (7-12b), obtenemos

$$I = \frac{gA}{l} \Delta\varphi \quad (7-14)$$

que proporciona una relación lineal entre I y $\Delta\varphi$.

La cantidad l/gA se llama *resistencia* del alambre y se representará con el símbolo R . Utilizando R , podemos escribir de nuevo la ecuación (7-14):

$$\Delta\varphi = RI \quad (7-15)$$

que es la forma familiar de la ley de Ohm (R se mide evidentemente en ohms). La ecuación (7-15) puede considerarse como una definición de la resistencia de un objeto o dispositivo por el que pasa una corriente constante. En el caso general, R dependerá del valor de esta corriente. Sin embargo, como ya mencionamos, nos interesan principalmente los materiales lineales, llamados materiales óhmicos, y en éstos R es independiente de la corriente.

El trabajo realizado por el campo cuando una carga dQ se mueve a través de una diferencia de potencial $\Delta\varphi$ es $dW = dQ \Delta\varphi$. La potencia correspondiente es

$$P = I \Delta\varphi = I^2 R = (\Delta\varphi)^2 / R$$

donde las dos últimas formas se obtienen por combinación con la ley de Ohm. Esta potencia se disipa por calentamiento de Joule del material.

7.4

CORRIENTES ESTACIONARIAS EN MEDIOS CONTINUOS

Hay una analogía muy estrecha entre un sistema electrostático de dieléctricos limitado por superficies equipotenciales, por una parte, y un sistema que conduce una corriente estacionaria, por otra. Esta analogía es el tema de la presente sección.

Consideremos un medio conductor óhmico (lineal), homogéneo, en condiciones de conducción en estado estacionario. Puesto que estamos tratando específicamente con el estado estacionario, la densidad de carga local $\rho(x, y, z)$ está en su valor de equilibrio, y $\partial\rho/\partial t = 0$ para cada punto del medio. En consecuencia, la ecuación de continuidad (Ec. 7-9) se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{corrientes estacionarias}) \quad (7-16)$$

Utilizando la ley de Ohm en combinación con (7-16) obtenemos

$$\nabla \cdot g\mathbf{E} = 0$$

que para un medio homogéneo se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Pero ya que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ para un campo estático, \mathbf{E} puede derivarse de un potencial escalar:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

La combinación de las dos últimas ecuaciones da

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (7-17)$$

que es la ecuación de Laplace.

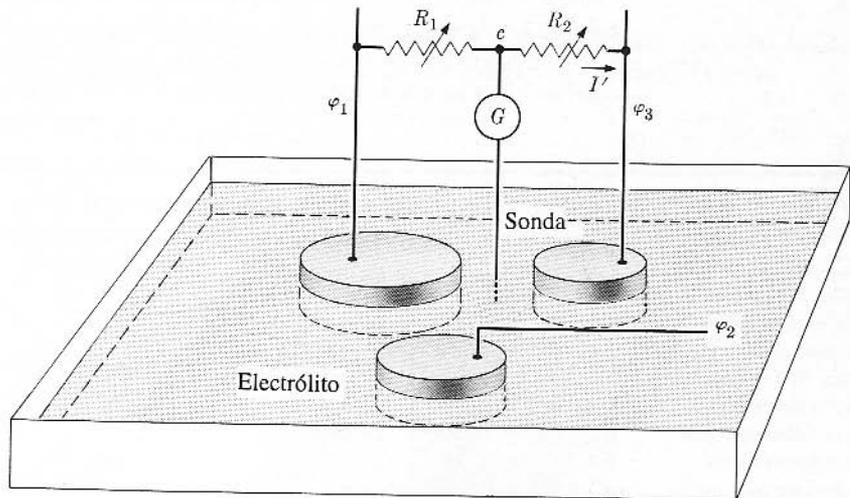
Por tanto, vemos que un problema de conducción en estado estacionario puede resolverse de la misma forma que los problemas electrostáticos. La ecuación de Laplace se resuelve con una de las técnicas analizadas en el capítulo 3, y la solución está determinada, como siempre, por las condiciones en la frontera. Las condiciones en la frontera que son suficientes para resolver el problema son aquellas que especifican ya sea φ o \mathbf{J} en cada punto de la superficie del medio conductor. Especificar \mathbf{J} en la superficie es equivalente a especificar \mathbf{E} , ya que los dos vectores están relacionados por la ley de Ohm. Una vez que se ha hallado la solución apropiada de la ecuación de Laplace, puede determinarse \mathbf{E} (y en consecuencia \mathbf{J}) en cada punto dentro del medio a partir de la operación gradiente.

En la conducción en estado estacionario, la corriente que atraviesa un área de la zona interfacial entre dos medios conductores puede calcularse en dos formas: en función de la densidad de corriente en el medio 1 o en función de la densidad de corriente en el medio 2. Como los dos procedimientos deben conducir al mismo resultado, la componente normal de \mathbf{J} debe ser continua al atravesar la zona interfacial:

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (7-18a)$$

FIGURA 7.5

Cuba electrolítica bidimensional. Los tres conductores metálicos se mantienen a los potenciales φ_1 , φ_2 y φ_3 , donde, por conveniencia, se supone que $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$. El símbolo \sim denota un resistor cuyo valor puede variarse y G es un galvanómetro. La resistencia de los alambres se considera despreciable. Si los resistores R_1 y R_2 se ajustan de tal modo que no pase corriente a través de G , entonces $\varphi_{\text{sonda}} = \varphi_c$ y la misma corriente I' pasa a través de R_1 y R_2 . En estas circunstancias, $\varphi_{\text{sonda}} = \varphi_1 - IR_1 = \varphi_3 + IR_2$, o $\varphi_{\text{sonda}} = \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_3)R_1/(R_1 + R_2)$.



que los mismos electrodos metálicos están rodeados por un medio dieléctrico (Fig. 7.6). El método de la "cuba electrolítica" se utilizó ampliamente en el pasado para resolver problemas electrostáticos con formas geométricas complicadas, pero actualmente estos problemas se suelen resolver con un computador.

Como un segundo ejemplo de la relación entre conducción y electrostática, consideremos dos electrodos metálicos en un medio infinito óhmico homogéneo, de conductividad moderada g . Si los electrodos metálicos se mantienen a los potenciales φ_1 y φ_2 , la corriente I entre ellos es

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$$

que define la resistencia R entre los dos electrodos*. Esta corriente puede expresarse en función de la densidad de corriente \mathbf{J} en el medio:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

donde S es cualquier superficie cerrada que rodea completamente uno de los electrodos (excepto por un alambre de metal aislado que conduce la corriente al electrodo para mantenerlo a potencial constante). Pero

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}$$

Combinando las tres últimas ecuaciones, obtenemos

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = g \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da \quad (7-20)$$

Si el mismo campo eléctrico se produjera por cargas electrostáticas sobre los dos electrodos metálicos en un medio *dieléctrico*, entonces, por la ley de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon} Q \quad (7-21)$$

donde Q es la carga sobre el electrodo metálico rodeado por la superficie S y ϵ es la permitividad del medio. En estas circunstancias, los dos electrodos formarán un condensador:

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (7-22)$$

Al sustituir las ecuaciones (7-21) y (7-22) en (7-20), obtenemos

$$RC = \frac{\epsilon}{g} \quad (7-23)$$

Este resultado relaciona la resistencia entre dos conductores en un medio conductor débil y la capacidad del problema electrostático equivalente.

* Ya que I es el equivalente a Q en el problema electrostático, I es proporcional a $\Delta\varphi$ y $1/R$ se define como la constante de proporcionalidad. Véase la ecuación (7-22).

De hecho, esta relación es más que una analogía entre medios dieléctricos y conductores. También es válida para cualquier medio que tenga conductividad g y permitividad ϵ . Ya que no existe un dieléctrico ideal, todo dieléctrico real tiene una g distinta de cero, aunque sea muy pequeña. Por otro lado, incluso un buen conductor tiene su propio valor de ϵ , por pequeño que sea. De aquí que un condensador tenga una resistencia de fuga y que una resistencia tenga una pequeña capacidad asociada, y en cada caso R y C del dispositivo están relacionados por la ecuación (7-23) (aproximadamente, ya que el medio no es infinito).

7.5 APROXIMACIÓN AL EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

En el capítulo 2 se demostró que el exceso de carga reside sobre la superficie de un conductor. Esta situación es el estado de equilibrio. La aproximación al equilibrio no se estudió en el capítulo 2, pero se estableció que para buenos conductores (metálicos) el equilibrio se alcanza muy rápidamente. Cuanto menos conductor sea el material, más lenta será la aproximación al equilibrio electrostático. De hecho, si la conductividad del material es extremadamente baja, puede tardar años o aun más en alcanzar el equilibrio electrostático.

Consideremos un medio isótropo homogéneo, caracterizado por una conductividad g y permitividad ϵ , así como por una densidad de carga volumétrica $\rho_0(x, y, z)$. Si este sistema conductor se aísla repentinamente de los campos eléctricos aplicados, tenderá hacia la situación de equilibrio en la que no hay exceso de carga en el interior del sistema. Según la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (7-9)$$

que, con ayuda de la ley de Ohm, se expresa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (7-24)$$

Pero $\nabla \cdot \mathbf{E}$ se relaciona con las fuentes del campo. De hecho, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$, de modo que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{\epsilon} \rho = 0 \quad (7-25)$$

La solución a esta ecuación diferencial parcial para g y ϵ constantes es

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z) e^{-gt/\epsilon} \quad (7-26)$$

y se ve que el estado de equilibrio se alcanza exponencialmente.

De la ecuación (7-26) es evidente que la cantidad ϵ/g tiene dimensiones de tiempo; se le llama *constante de tiempo* o tiempo de relajación t_c del medio:

$$t_c = \frac{\epsilon}{g} = \epsilon \eta \quad (7-27)$$

La constante de tiempo mide la velocidad a la que el medio se aproxima al equilibrio electrostático. Más precisamente, es el tiempo que ha de transcurrir para que la carga en una región determinada disminuya a $1/e$ de su valor original.

Un material mostrará su comportamiento como conductor en un campo particular aplicado si su constante de tiempo es mucho menor que el tiempo que caracteriza un cambio en el campo aplicado. Para algunas aplicaciones, una constante de tiempo menor que 0.1 segundos es suficiente, y como la mayoría de las permitividades no metálicas* caen en un intervalo de ϵ_0 a $10\epsilon_0$, se requiere un material de resistividad menor de 10^9 o $10^{10} \Omega \cdot m$. Para aplicaciones de alta frecuencia se necesita una constante de tiempo menor y, por consiguiente, una resistividad menor para que haya realmente un comportamiento como conductor. De hecho, la ecuación es

$$t_c \ll \frac{1}{f}$$

donde f es la frecuencia más alta que interviene en el experimento. Exactamente la condición opuesta se aplica para el comportamiento como dieléctrico.

7.6

REDES DE RESISTENCIAS Y LEYES DE KIRCHHOFF

Hasta aquí hemos analizado la conducción principalmente desde el punto de vista del transporte de carga en un medio conductor, y hemos enfocado el problema en términos de las ecuaciones diferenciales que deben aplicarse en cada punto. La cantidad importante por determinar en estos casos es la densidad de corriente \mathbf{J} . Pero en muchos problemas de interés práctico los portadores de carga están restringidos a seguir una trayectoria de baja resistencia, llamada *circuito*, y entonces las cantidades de interés son las *corrientes* en cada parte del circuito. En esta sección limitaremos nuestro análisis a circuitos por los que circulan corrientes estacionarias (constantes), es decir, *circuitos de corriente directa*. Un circuito puede estar formado por varias ramas; de hecho, es posible definir un circuito como una malla de varios caminos de conducción, cada uno de los cuales puede contener voltajes aplicados o fuentes de voltaje. El problema central para el análisis de circuitos es: *conocidas la resistencia y la fuente de voltaje en cada rama del circuito, encontrar la corriente en cada una de estas ramas*.

En el capítulo 2 se demostró que la integral de la componente tangencial de un campo electrostático alrededor de cualquier trayectoria cerrada se anula. Es decir, para un campo electrostático,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (7-28)$$

* No podemos aplicar la ecuación (7-27) a un metal, ya que no se conoce el valor apropiado de ϵ ; de hecho, $t_c = \tau = 10^{-14}$ s, donde τ es el tiempo de colisión que se discutirá en la sección 7.7. Como se verá, para tiempos más cortos que τ no es válido considerar que $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$.

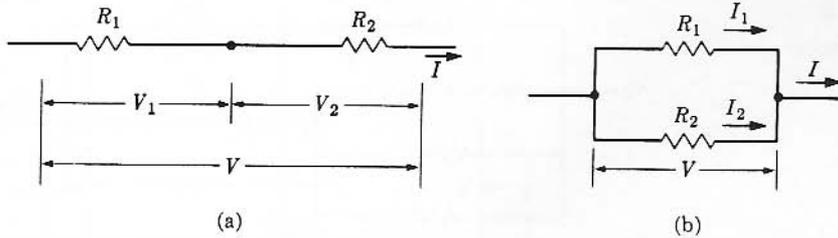
Para un material óhmico, $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. En general, en el caso isótropo esta expresión se modifica a $\mathbf{J} = g(E)\mathbf{E}$, pero $g(E)$ es siempre una cantidad positiva, de tal modo que la ecuación (7-28) implica que $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 0$. En consecuencia, se tiene que una fuerza puramente electrostática no puede hacer que una corriente circule en el mismo sentido alrededor de un circuito completo. O, dicho de otra manera, una corriente constante no puede ser mantenida solamente por fuerzas electrostáticas. Sin embargo, una partícula cargada q puede experimentar otras fuerzas (mecánicas, “químicas”, etc.) además de la fuerza electrostática macroscópica, de tal modo que, en parte del circuito, la carga se mueve en dirección opuesta a \mathbf{E} . En las secciones anteriores hemos dejado de lado la cuestión de la causa de la corriente eléctrica suponiendo que dos puntos en un objeto conductor se mantenían a una diferencia de potencial constante $\Delta\phi$ por medio de fuentes externas de energía. Hasta aquí, todavía es suficiente para nuestros propósitos suponer que existen tales *fuentes de voltaje*,* pero haremos una breve pausa para analizar cómo de hecho se pueden producir.

En el laboratorio, un voltaje constante es generalmente producido por una batería o por una fuente electrónica de alimentación (la cual rectifica y suaviza la señal de voltaje), pero podría producirse por una variedad de otros medios; por ejemplo, un generador de Van de Graaff. Este último es conceptualmente el caso más sencillo de analizar. En el generador de Van de Graaff las cargas se depositan literalmente en un extremo de una cinta móvil y se transportan a otro punto de energía potencial *superior* situado en el otro extremo, donde se quitan de la cinta. En una operación de estado estacionario, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ a lo largo de cualquier trayectoria cerrada. Por ejemplo, la integral es negativa a lo largo de la cinta e igualmente positiva a lo largo de una trayectoria exterior entre los extremos de la cinta. Puede haber un flujo de corriente constante externa a través de una resistencia conectada entre los extremos. La potencia aportada simplemente es la potencia mecánica necesaria para mover la cinta que transporta las cargas en dirección opuesta al campo eléctrico. La operación de una batería es similar (excepto que las “fuerzas” que intervienen en una batería dependen de la mecánica cuántica de la electroquímica), y $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada, aun cuando pase a través del electrolito de la batería. Sin embargo, lo que importa para el análisis de circuitos es simplemente que $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ alrededor de una trayectoria cerrada que contenga las *terminales* de la fuente de voltaje, pasando parte de la trayectoria a través de la red de resistencias y la otra parte directamente a través de las terminales, pero *por fuera* de la fuente. El objeto de la teoría de circuitos eléctricos es desarrollar un procedimiento para analizar la parte que atraviesa la red de resistencias; no necesitaremos analizar la causa (mecánica, química o la que sea) de la diferencia de potencial entre las terminales de la fuente de alimentación, sino simplemente referirnos a ésta como un voltaje aplicado, \mathcal{V} . Una fuente ideal proporcionaría un voltaje \mathcal{V}_0

* En otros textos, el voltaje aplicado por una fuente se llama generalmente *fuerza electromotriz* (o *fem*), aunque voltaje aplicado es el término que se usa en el laboratorio para esta diferencia de potencial. El término histórico *fem* y su concepto mismo son bastante confusos e innecesarios y, por tanto, no se emplearán aquí. Reservaremos el término *fem* para un concepto un poco diferente que estudiaremos más adelante (Cap. 11).

FIGURA 7.7

Conexión de dos resistores
(a) en serie y (b) en paralelo.



que sería independiente de la corriente proporcionada por la fuente, pero el voltaje en terminales de una fuente real depende en cierto grado de la corriente $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$. La suposición más sencilla que se aplica por lo general es que la dependencia es lineal:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 - R_I I$$

El coeficiente R_I se llama *resistencia interna* y \mathcal{V}_0 se llama *voltaje en circuito abierto* (o fem en la mayoría de los otros textos).

Antes de entrar en el problema general de las redes, veremos primero las conexiones elementales en serie y en paralelo de los resistores. La resistencia definida en la sección 7.3 es una propiedad del objeto material en consideración y depende tanto de la naturaleza del material que compone el objeto como de la forma que éste tiene. (En cambio, la resistividad depende sólo de la naturaleza del material conductor.) Un objeto conductor de forma adecuada que se caracteriza principalmente por su resistencia recibe el nombre de *resistor* y se representa generalmente con el símbolo $\sim\sim\sim$. Los resistores pueden conectarse para formar una red de resistencias y las formas en que dos resistores pueden combinarse se ilustran en la figura 7.7. La figura 7.7a muestra una conexión *en serie* en la que la misma intensidad de corriente I pasa por ambos resistores. Aplicando la ecuación (7-15) a cada resistor y observando que la diferencia de potencial* $V = V_1 + V_2$, encontramos que

$$V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

Por tanto, la resistencia equivalente de la combinación es

$$R = R_1 + R_2 \quad (\text{conexión en serie}) \quad (7-29)$$

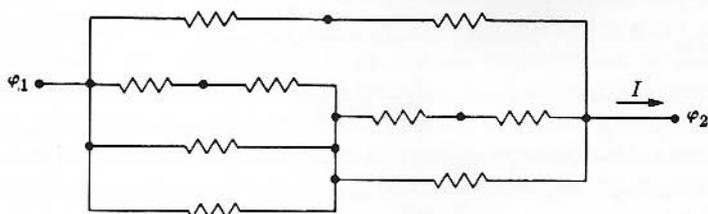
En la conexión *en paralelo* (Fig. 7.7b), la diferencia de potencial a través de cada resistor es la misma, y la corriente total que pasa por la combinación es $I = I_1 + I_2$. Aplicando la ecuación (7-15), vemos que

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V$$

* En esta sección usaremos el símbolo \mathcal{V} en lugar de $\Delta\phi$ para la diferencia de potencial, de acuerdo con la notación más común de circuitos eléctricos.

FIGURA 7.8

Red de resistores.



y la resistencia equivalente R de la combinación se obtiene de

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{combinación en paralelo}) \quad (7-30)$$

La resistencia equivalente de una red más complicada, como la de la figura 7.8, puede determinarse combinando los resistores por pares, de acuerdo con las ecuaciones (7-29) o (7-30), y repitiendo luego el procedimiento hasta que quede sólo una resistencia equivalente. Aunque este procedimiento no es aplicable a todas las redes, toda red que tenga dos terminales puede ser reducida a una resistencia equivalente por el procedimiento que se describe en el siguiente párrafo.

Cualquier problema de redes puede resolverse de una forma sistemática por medio de dos reglas llamadas leyes de Kirchhoff.* Antes de enunciar estas leyes, definiremos dos términos. Un *nodo* es un punto del circuito donde concurren tres o más conductores, tal como el punto *a*, *b*, *c* o *d* de la figura 7.9. Una *mall*a es cualquier trayectoria conductora cerrada en la red.

Podemos enunciar ahora las *leyes de Kirchhoff*:

- I. La suma algebraica de las corrientes que circulan hacia un nodo es cero; es decir,

$$\sum I_j = 0 \quad (\text{I})$$

- II. La suma algebraica de las diferencias de voltaje en cualquier malla de la red es cero; es decir,

$$\sum V_j = 0 \quad (\text{II})$$

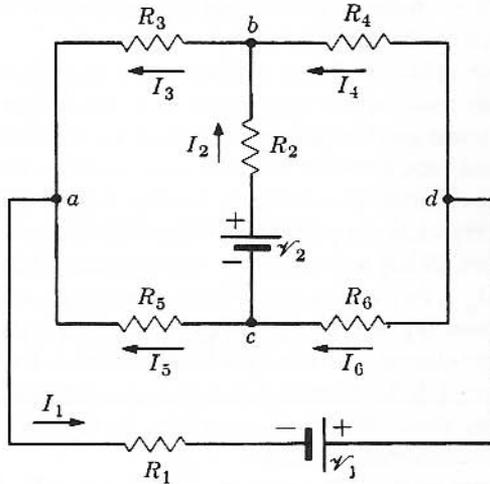
La primera ley es sólo un enunciado formal del hecho de que la carga no se acumula en ningún nodo del circuito como resultado de la corriente constante. Es una reformulación

* Llamadas así en honor de Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).

FIGURA 7.9

Circuito típico que requiere la aplicación de las leyes de Kirchhoff. El símbolo \mathcal{V} se emplea para representar una fuente de voltaje. En un problema típico de circuitos, se especifican las \mathcal{V} y las R , y hay que calcular las corrientes. Dos de las seis ecuaciones para las corrientes del circuito mostrado son:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_3 + I_5 &= 0 \text{ y } \mathcal{V}_1 \\ &= I_6 R_6 + I_5 R_5 + I_1 R_1. \end{aligned}$$



de la ecuación de continuidad en la forma de las ecuaciones (7-6) y (7-7), lo que es equivalente a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{corrientes estacionarias}) \quad (7-16)$$

La segunda ley es simplemente una reafirmación de

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{campos estáticos}) \quad (7-28)$$

Para aplicar las leyes de Kirchhoff necesitamos recordar la ley de Ohm:

La caída de potencial en una resistencia R_j es

$$V_j = I_j R_j \quad (\text{resistor}) \quad (7-15)$$

donde se considera que el potencial más alto está en el extremo por donde se supone que entra la corriente en la resistencia. La ecuación (7-15) es una forma equivalente de

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (\text{medio lineal}) \quad (7-10)$$

Finalmente identificaremos los voltajes aplicados

$$V_j = -\mathcal{V}_j \quad (\text{voltaje aplicado})$$

Combinando ésta y la ecuación (7-15) podemos reescribir la segunda ley de Kirchhoff como

$$\sum \mathcal{V}_j = \sum I_j R_j \quad (\text{IIa})$$

Si deben tenerse en cuenta las resistencias internas de la fuente, pueden transferirse al segundo miembro de (IIa).

Antes de aplicar las leyes de Kirchhoff a un problema específico, es necesario considerar los sentidos para las corrientes en cada uno de los ramales. Estos sentidos deberán indicarse en el esquema del circuito. La formulación de las ecuaciones (I) y (IIa) se lleva a cabo entonces tomando como base los sentidos asignados. Si la solución numérica de estas ecuaciones da un valor negativo para una corriente particular, el sentido correcto de esa corriente es el contrario al supuesto. En el problema ilustrado en la figura 7.9 hay seis corrientes desconocidas. Éstas se designan con los símbolos I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6 ; a cada una se le ha asignado un sentido.

La primera ley de Kirchhoff puede aplicarse a cada nodo del circuito, pero las ecuaciones así obtenidas no son todas independientes. La regla general es que si hay n nodos, sólo $n - 1$ de éstos producirán ecuaciones independientes. En el problema de la figura 7.9 hay seis corrientes desconocidas. La solución requiere tres ecuaciones de nodos y tres ecuaciones de mallas.

Las sumas en (I) y (IIa) son sumas algebraicas. En (I) la corriente se considera positiva si su sentido supuesto es hacia el nodo en cuestión, o negativa si se le ha asignado un sentido tal que se aleja de la unión. Al aplicar las ecuaciones de malla, algún sentido (ya sea el de las agujas del reloj o el contrario) debe tomarse como el sentido del recorrido. Una fuente de voltaje se toma con signo positivo si el voltaje (por sí mismo) produce una corriente positiva en el sentido del recorrido. Un término IR se toma con el signo positivo si la corriente a través de cada resistor en cuestión va en la dirección de recorrido de la malla.

EJEMPLO 7.1

Corriente en una red de resistencias con dos fuentes de voltaje

Considere la red de resistencias que se muestra en la figura 7.10. Los resistores R_1, R_3 y R_5 , así como los voltajes \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 , están especificados. El problema es encontrar las corrientes en los resistores.

Solución: La figura 7.10 se ha dibujado y señalado de modo semejante a la figura 7.9. Marcare las corrientes consideradas I_1, I_3 , e I_5 que pasan por los resistores de tal modo que estén de acuerdo con las de la figura 7.9. Aplicando las leyes de Kirchhoff encontramos que:

$$I_3 + I_5 - I_1 = 0$$

$$V_1 = I_1 R_1 + I_5 R_5$$

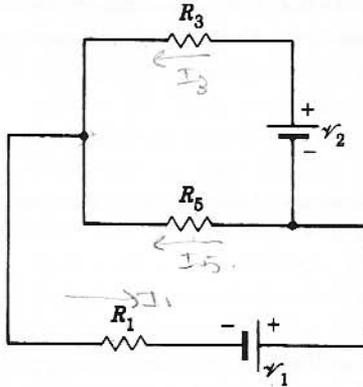
$$V_2 = I_3 R_3 - I_5 R_5$$

Utilizaremos la primera de estas ecuaciones para eliminar I_3 de la última. Luego, resolveremos cada una de las ecuaciones restantes para I_5 y las igualaremos. Despejando I_1 , obtenemos

$$I_1 = \frac{V_2 + fV_1}{R_3 + fR_1}$$

FIGURA 7.10

Red de resistencias para el ejemplo 7.1.



donde $f \equiv 1 + R_3/R_5$.

7.7 TEORÍA MICROSCÓPICA DE LA CONDUCCIÓN

Con base en un modelo microscópico de un conductor es posible entender el comportamiento lineal expresado como la ley de Ohm, así como otras características experimentales de la conducción. Consideremos una partícula libre del medio, con carga q y masa m . Bajo la influencia de la fuerza eléctrica local, $q\mathbf{E}$, su *velocidad de deriva* aumentará de acuerdo con $m \, dv/dt = q\mathbf{E}$. Si la partícula cargada se encontrara en el vacío, continuaría acelerándose. Sin embargo, en un medio material por el que pasa una corriente constante, la velocidad de deriva es constante y, por tanto, la fuerza total sobre la partícula debe ser cero. Otra fuerza, debida al medio, debe actuar además de la fuerza eléctrica. La suposición más sencilla posible es que esta fuerza de equilibrio sea proporcional a la velocidad, de modo que la ecuación del movimiento es

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - G\mathbf{v} \quad (7-31)$$

Puede verse inmediatamente que, cuando $dv/dt = 0$,

$$\mathbf{v}_d = \frac{q}{G} \mathbf{E} \quad (7-32)$$

Esta ecuación es la solución en estado estacionario para la velocidad de deriva. Sin embargo, es interesante examinar la solución completa de la ecuación (7-31):

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{G} \mathbf{E} (1 - e^{-Gt/m}) \quad (7-33)$$

si se toma la condición inicial $v(0) = 0$. Esta ecuación demuestra que la velocidad de deriva se aproxima exponencialmente a su valor estacionario, como $e^{-t/\tau}$, donde el tiempo de relajación τ es

$$\tau = \frac{m}{G} \quad (7-34)$$

Eliminando G de las ecuaciones (7-32) y (7-34) encontramos que la velocidad de deriva en estado estacionario es

$$v_d = \frac{q\tau}{m} \mathbf{E} \quad (7-35)$$

Combinando ésta con la ecuación (7-4) para un solo tipo de portador de carga, obtenemos la densidad de corriente

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v}_d = \frac{Nq^2\tau}{m} \mathbf{E} \quad (7-36)$$

que es proporcional al campo de acuerdo con la ley de Ohm. Comparando ésta con la ecuación (7-10), tenemos la conductividad

$$g = \frac{Nq^2\tau}{m} \quad (7-37)$$

o, en el caso de que haya varios tipos de portadores de carga,

$$g = \sum \frac{N_i q_i^2 \tau_i}{m_i}$$

Para un conductor electrónico razonablemente bueno, tal como un semiconductor o un metal (pero no un electrólito), podemos interpretar τ físicamente como el tiempo medio entre colisiones de un electrón de conducción. En tales materiales el electrón se acelera por un periodo corto, después del cual sufre una colisión con uno de los átomos del material. Como resultado de esta colisión el electrón se desvía en una dirección aleatoria, de modo que el efecto promedio de una colisión reduce la velocidad de deriva del electrón a cero otra vez. Si el tiempo medio entre colisiones es τ y la velocidad media neta es v , entonces el electrón pierde la cantidad de movimiento mv_d después de cada tiempo τ . En estado estacionario, el valor de la razón de momento perdido mv_d/τ es igual a la razón de momento ganado qE y el resultado es idéntico a la ecuación (7-35). El tiempo medio τ se relaciona con el recorrido libre medio del electrón mediante

$$l = v_T \tau \quad (7-38)$$

donde v_T es la velocidad térmica de los electrones. Es importante recalcar que v_T es mucho más grande* que la velocidad de deriva v_d (aunque su sentido es aleatorio). Para la mayoría de los metales, v_T es del orden de 10^6 m/s (casi independiente de la temperatura), y para un semiconductor es de cerca de un orden de magnitud más

* Sólo por este hecho, τ puede considerarse independiente del campo acelerador E .

pequeño a temperatura ambiente. Por otra parte, la velocidad media de deriva v_d no es superior a 10^{-2} m/s en metales normales. En los metales y semiconductores, el recorrido libre medio es típicamente del orden de 10^{-8} m a temperatura ambiente, de modo que $\tau \approx 10^{-14}$ s en los metales. En los semiconductores, τ puede ser de un orden de magnitud más grande. En uno u otro caso, τ es también el tiempo en que se inicia o decae una corriente óhmica. De este modo, la corriente cambia prácticamente de forma instantánea después de que el campo se aplica, o quita, en resistores hechos con estos materiales. Hacemos notar que en un metal el tiempo de relajación τ para el decaimiento de la corriente, el tiempo de colisión y la constante de tiempo t_c para disipar el exceso de densidad de carga, resultan ser los mismos aunque son conceptualmente diferentes*.

Es evidente, de la tabla 7.1, que el grupo de materiales de mayor conductividad eléctrica es el de los *metales*. Estos materiales tienen una alta conductividad porque contienen una gran densidad de portadores de carga, del orden de uno por cada átomo del metal, y porque su velocidad de deriva por unidad de campo eléctrico es alta. En los metales sólo consideramos un tipo de portador de carga, el electrón. En consecuencia, las ecuaciones de conducción son más sencillas en este caso:

$$\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v}_d \quad (7-39)$$

$$g = Ne(v/E) = Ne^2\tau/m \quad (7-40)$$

donde e es el valor absoluto de la carga electrónica. La velocidad de deriva del electrón por unidad de campo eléctrico (v_d/E) se llama *movilidad* del electrón. Una gran movilidad implica un tiempo de colisión τ largo o, lo que es equivalente, un recorrido libre medio grande. Para tener una idea del recorrido libre medio de los electrones de un metal, tendremos que considerar la dinámica de las colisiones de los electrones. Sabemos que el conductor es electrostáticamente neutro sólo en promedio, que hay grandes variaciones en el potencial en distancias del orden de un angstrom, y que una partícula cargada, como un electrón, deberá chocar o dispersarse por variaciones de potencial. Pero también sabemos que la naturaleza ondulatoria del electrón desempeña un papel importante en su movimiento a la escala atómica. Una solución del problema de las colisiones de los electrones empleando conceptos de mecánica ondulatoria está fuera del contexto de este libro. Simplemente enunciaremos el resultado: *En un cristal perfecto con un potencial periódico tridimensional, una onda electrónica no choca; su tiempo de colisión τ es infinito*. Así pues, la conductividad finita de los metales proviene de las imperfecciones en la estructura perfectamente periódica. Estas imperfecciones son de dos tipos: (1) impurezas e imperfecciones geométricas (tales como fronteras granulares en materiales policristalinos), y (2) imperfecciones térmicamente inducidas que provienen del movimiento térmico de los átomos en la estructura. Ambos tipos contribuyen independientemente a la resistividad (regla de Matthiessen), de modo que

* En un conductor malo, puede ser que el tiempo de colisión no tenga significado o t_c puede ser *inversamente* proporcional a τ de acuerdo con las ecuaciones (7-27) y (7-37).

$$\eta = \eta_1 + \eta_2(T) \quad (7-41)$$

donde T es la temperatura absoluta.

En metales muy puros, la contribución dominante a la resistividad a temperaturas ordinarias es la dispersión de las ondas electrónicas por los átomos desplazados térmicamente. Así, $\eta \approx \eta_2(T)$. La sección eficaz de dispersión de un átomo desplazado es proporcional al cuadrado de su amplitud de vibración (x^2), en otras palabras, a su energía potencial máxima. Suponiendo que las fuerzas elásticas recuperadoras actúan sobre los átomos desplazados,

$$(\text{Energía potencial})_{\text{máx}} = (\text{Energía cinética})_{\text{máx}} \propto kT$$

de modo que

$$\eta \approx \eta_2 \propto (\tau_2)^{-1} \propto x^2 \propto T \quad (7-42)$$

o, expresado en palabras, la resistividad de un metal puro es proporcional a la temperatura absoluta. El coeficiente de temperatura de la resistencia, $(1/\eta) d\eta/dT$, para un metal muy puro es, por tanto,

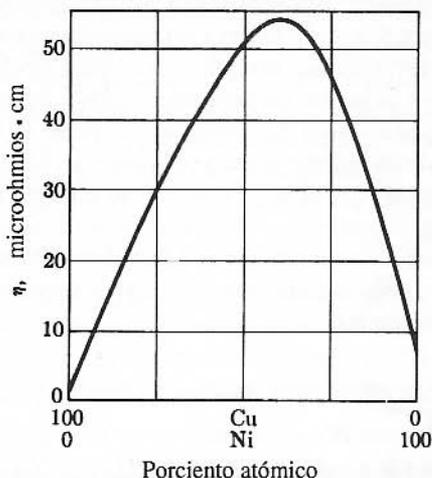
$$\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dT} \approx \frac{1}{T} \quad (7-43)$$

que concuerda aproximadamente con los valores para los metales de la tabla 7.1. Hablando estrictamente, el argumento anterior es válido sólo para temperaturas superiores a la temperatura de Debye del metal (la temperatura por encima de la cual se excitan todos los modos de vibración atómica). A temperaturas algo menores que la de Debye, η decae por debajo de la relación lineal predicha por la ecuación (7-42). A temperaturas muy bajas, la contribución de η_1 no puede despreciarse.

La adición de pequeñas cantidades de una impureza soluble siempre aumenta la resistividad. Una aleación, que puede considerarse como un metal impuro, tiene siempre mayor resistividad que la del metal base de menor resistividad (Fig. 7.11).

FIGURA 7.11

Resistividad de aleaciones de cobre-níquel en función de la composición a 20°C.



El coeficiente de temperatura α de una aleación es evidentemente menor que el de un metal puro, precisamente porque su resistividad es mayor, pero se han encontrado algunas aleaciones con coeficientes de temperatura extremadamente pequeños.

7.8

RESUMEN

Los principales usos tecnológicos de la electricidad dependen de las corrientes causadas por cargas en movimiento; éstas son importantes también para el magnetismo, como veremos en el próximo capítulo. Se define la **densidad de corriente** en un punto localizado del espacio como

$$\mathbf{J} = \sum N_i q_i \mathbf{v}_i$$

Puesto que la densidad de carga es

$$\rho = \sum N_i q_i$$

esta última puede hacerse cero, aunque no así la corriente. La corriente total a través de una superficie S es

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da$$

o

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

La conservación de carga se expresa localmente con la **ecuación de continuidad**

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(De momento, consideraremos principalmente corrientes estacionarias, para las cuales $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, así como $\partial \mathbf{J} / \partial t = 0$.) La corriente de conducción en un medio está dada por una ecuación constitutiva, que en el caso lineal más sencillo define la **conductividad** g :

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}$$

que es la **ley de Ohm**.

- La **resistencia** de un conductor recto y de sección transversal uniforme es

$$R = l/gA$$

- En un medio conductor continuo con corrientes estacionarias el potencial satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Las condiciones en la frontera que se aplican a \mathbf{E} son las mismas que en un medio dieléctrico, y aquellas que se aplican a \mathbf{J} son semejantes a las que se aplican a \mathbf{D} . Consecuentemente, entre dos conductores inmersos en un medio infinito,

$$RC = \frac{\epsilon}{g} \quad (\text{unidades mks})$$

• Si la densidad de carga volumétrica en un medio conductor no es inicialmente cero, desaparece con una **constante de tiempo**

$$t_c = \frac{\epsilon}{g} \quad (\text{unidades mks})$$

Para metales, este tiempo es del orden de 10^{-14} s; para malos conductores puede ser de muchos meses.

• Para circuitos eléctricos, las ecuaciones estáticas $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ se convierten en las **leyes de Kirchhoff**:

$$\sum I_j = 0 \quad \text{en un nodo} \quad (\text{I})$$

$$\sum V_j = 0 \quad \text{en una malla} \quad (\text{II})$$

Para proporcionar la potencia disipada en los resistores por la corriente estacionaria, deben aplicarse voltajes por medio de dispositivos (tales como baterías), cuya operación no puede describirse dentro del contexto de la electrostática. Luego, con la ley de Ohm, la resolución completa del problema es directa.

• La teoría microscópica de la conducción óhmica depende de la existencia de una fuerza lineal retardadora que actúa sobre las cargas libres en el medio, además de la fuerza eléctrica aceleradora. Expresada en términos de un **tiempo de relajación** τ , resulta

$$g = \frac{Nq^2\tau}{m}$$

El tiempo τ es la constante de tiempo para el establecimiento local de una corriente óhmica después de la aplicación del campo; en casos prácticos τ es breve (10^{-14} s para metales). Para buenos conductores electrónicos (metales, semiconductores) τ se interpreta como el tiempo medio entre colisiones. En estos casos, depende del **recorrido libre medio** electrónico de acuerdo con

$$\tau = l/v_T$$

donde v_T es la velocidad térmica aleatoria (no la velocidad de deriva neta).

PROBLEMAS

7.1 La máxima corriente que pasa por un alambre de cobre que tiene un área de sección transversal de 2 mm^2 es de 20 A. (a) ¿Cuál es la densidad de corriente correspondiente en A/m^2 ? (b) Suponiendo que cada átomo de cobre contribuye con un electrón de conducción, calcule la velocidad de deriva electrónica que corresponde a esta densidad de corriente. (Número de

El campo magnético de corrientes estacionarias

El segundo tipo de campo que interviene en el estudio de la electricidad y del magnetismo es el campo magnético. Tales campos, o mejor dicho, los efectos de tales campos, se han conocido desde épocas muy antiguas, cuando se observaron por primera vez los efectos de la magnetita (Fe_3O_4), el imán permanente que se encuentra en forma natural. El descubrimiento de la propiedad que presenta este material de poder indicar el norte y el sur tuvo una profunda influencia en la navegación y exploración primitivas. Sin embargo, excepto por esta aplicación, el magnetismo fue muy poco utilizado y sus fenómenos se entendieron aun menos; esto duraría hasta principios del siglo XIX, cuando Oersted descubrió que una corriente eléctrica producía un campo magnético. Este trabajo, junto con la obra posterior de Gauss, Henry, Faraday y otros, llevó al campo magnético a una situación prominente como socio del campo eléctrico. El trabajo teórico de Maxwell y otros (véanse los capítulos 11 y 16) ha demostrado que esta asociación es real y que los campos eléctricos y magnéticos están inextricablemente entrelazados. Los esfuerzos de gente práctica han dado como resultado el desarrollo de maquinaria eléctrica, equipos de comunicaciones y computadores que dependen de fenómenos magnéticos y que desempeñan un papel muy importante en nuestra vida diaria. En este capítulo se darán las definiciones básicas del magnetismo, se estudiará la producción de los campos magnéticos por corrientes estacionarias, y se mencionarán algunos fundamentos importantes para trabajos que se desarrollarán posteriormente.

DEFINICIÓN DE LA INDUCCIÓN MAGNÉTICA

En el capítulo 2 se vio que la fuerza de Coulomb sobre una carga q localizada en \mathbf{r} debida a una carga q_1 que se encuentra en el origen está dada por

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (8-1)$$

donde se consideró implícitamente que las dos cargas estaban en reposo.

Si las cargas se movieran con velocidades constantes \mathbf{v} y \mathbf{v}_1 , respectivamente, existiría además una *fuerza magnética* \mathbf{F}_m ejercida sobre q por q_1 ,

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq_1}{r^2} \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (8-2)$$

Aquí el número $\mu_0/4\pi$ tiene el mismo papel que $1/4\pi\epsilon_0$ tuvo en electrostática; es decir, es la constante necesaria para hacer que la ley experimental sea compatible con un conjunto de unidades. En unidades mks, *por definición*,

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2$$

exactamente, y esta condición nos conduce a la definición primaria de coulomb. (Véase la Sec. 8.3.) Del mismo modo que en el caso de la fuerza electrostática, es conveniente valernos de las propiedades de una "carga de prueba" para definir un *campo* magnético. En este caso, no solamente la carga de prueba q , sino también su velocidad \mathbf{v} , deben aparecer como factores:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (8-3)$$

donde la *inducción magnética* \mathbf{B} es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^2} \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (8-4)$$

Si hay presentes varias carga móviles, las fuerzas y campos magnéticos deben sumarse. Del mismo modo, alguna clase de proceso de paso al límite debe incluirse también en la definición de \mathbf{B} (como se hizo cuando se definió el campo eléctrico) para asegurar que la carga de prueba no afecte a las fuentes de \mathbf{B} . La unidad de inducción magnética en el sistema mks según la ecuación (8-3) es el newton-segundo por coulomb-metro, llamado *tesla* (T).

Si se encuentran presentes un campo eléctrico y un campo magnético, la fuerza total sobre una carga móvil es $\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (8-5)$$

que se conoce como *fuerza de Lorentz*.

La fuerza magnética entre dos cargas es más compleja que la fuerza eléctrica, debido a la dependencia con respecto a la velocidad y los productos cruz. Primero,

las semejanzas entre ellas son que ambas fuerzas dependen del producto de las cargas y del inverso del cuadrado de su separación (además de una constante dimensional). Sin embargo, la dirección de la fuerza magnética no es a lo largo de la línea que une las partículas (es decir, no es una fuerza central), a menos que \mathbf{v} sea perpendicular a \mathbf{r} . La fuerza está siempre contenida en el plano definido por \mathbf{r} y \mathbf{v}_1 . Más importante aún, la fuerza es siempre perpendicular a \mathbf{v} ; de la ecuación (8-3), $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_m = 0$ para cualquier campo \mathbf{B} , de modo que una fuerza magnética nunca efectúa trabajo sobre una partícula cargada. Una comparación más estricta entre \mathbf{F}_m y \mathbf{F}_e puede verse si multiplicamos el numerador y el denominador de la ecuación (8-2) por ϵ_0 . Comparando el resultado con la ecuación (8-1) se observa que $\epsilon_0 \mu_0$ debe tener dimensiones del inverso de una velocidad al cuadrado. Escribiremos

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (8-6)$$

donde c tiene las dimensiones de una velocidad, así que

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(\frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

Usando el valor definido de μ_0 y el valor experimental de ϵ_0 se encuentra que

$$c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

que resulta ser exactamente el valor numérico que se obtiene experimentalmente para la velocidad de la luz*. En el capítulo 16 veremos que esta coincidencia numérica no es accidental, sino que es una consecuencia necesaria si la luz es una onda electromagnética. No necesitamos aquí profundizar en el significado de la relación, sino simplemente usar el hecho experimental. Esto significa que para un par de partículas dadas

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{v v_1}{c c}$$

Es decir, si las velocidades de las partículas son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, la interacción magnética es mucho más pequeña que la interacción eléctrica. De hecho, las ecuaciones (8-1), (8-2) y (8-4) son solamente una primera aproximación a las expresiones relativistas correctas que serán deducidas en el

* La ecuación (8-6) debe ser válida para cualquier sistema de unidades consistente. En unidades gaussianas, donde $\epsilon_0 = 1/4\pi$ por definición, $\mu_0/4\pi = 1/c^2$ es un valor experimental. Una diferencia más problemática entre los dos sistemas de unidades es que en las unidades gaussianas las dos c se separan con las dos v , de modo que ese define

$$\mathbf{B} = \frac{q_1 \mathbf{v}_1}{r^2} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_m = q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$$

Esta definición tiene la ventaja de que \mathbf{B} es dimensionalmente igual que \mathbf{E} (y que la forma relativista v/c aparece explícitamente).

capítulo 21, y son válidas sólo para $v_1 \ll c$. Podemos observar que los campos producidos por una carga q_1 con movimiento uniforme están relacionados por

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$$

(Esta relación es válida para velocidades arbitrariamente grandes, aun cuando \mathbf{E} y \mathbf{B} lleguen a modificarse, cuando v_1 sea comparable a c .) Por último, vale la pena mencionar que la fuerza magnética no depende únicamente de la velocidad *relativa* de las dos cargas, sino que resulta ser distinta para un sistema de coordenadas en movimiento,* y no cambia simplemente de signo cuando se intercambian los signos de las partículas. No necesitamos tratar estos conceptos por ahora, ya que se cancelan en las aplicaciones que se han de hacer en este capítulo y en los siguientes.

Debido a que $F_m \ll F_e$, a primera vista parecería que la fuerza magnética siempre puede despreciarse en comparación con la eléctrica, pero hay sistemas de partículas en los que esto no sucede. En particular, en una corriente de conducción donde las cargas positivas y negativas están presentes con iguales densidades, el campo eléctrico macroscópico es cero, pero el campo magnético de las cargas móviles no. Éste es el caso de los electroimanes, motores, transformadores y otras situaciones donde las fuerzas magnéticas tienen gran importancia práctica. Por este motivo, comenzaremos con el estudio de interacciones magnéticas entre corrientes de conducción. En la próxima sección analizaremos la fuerza sobre una corriente de conducción en un campo magnético existente y en la sección 8-3 se estudiará la producción de un campo magnético por una corriente de conducción dada.

8.2

FUERZAS SOBRE CONDUCTORES POR LOS QUE CIRCULA CORRIENTE

A partir de la fuerza de Lorentz (Ec. 8.5) puede hallarse una expresión para la fuerza sobre un elemento $d\mathbf{l}$ de un conductor de corriente. Si $d\mathbf{l}$ es un elemento del conductor cuyo sentido se considera en la misma dirección que el de la corriente I que pasa por él, entonces $d\mathbf{l}$ es paralelo a la velocidad de deriva \mathbf{v} de los portadores de carga en el conductor. Si hay N portadores de carga por unidad de volumen en el conductor, la fuerza sobre el elemento $d\mathbf{l}$ es

$$d\mathbf{F} = NA |d\mathbf{l}| q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (8-7)$$

donde A es el área de la sección transversal del conductor y q es la carga por portador de carga. Si intervienen varias clases de portadores de carga, entonces debe incluirse

* En particular, se anula en un sistema de coordenadas que se mueve con \mathbf{v} . Esta dependencia respecto al sistema de coordenadas contradice la suposición de la mecánica clásica de que las fuerzas son las mismas en todos los sistemas inerciales de coordenadas. Ésta es nuestra primera evidencia de que es necesaria la teoría de la relatividad para explicar el electromagnetismo.

una sumatoria en la ecuación (8-7). Sin embargo, el resultado final, ecuación (8-8), no varía. Como \mathbf{v} y $d\mathbf{l}$ son paralelos, una forma alternativa de la ecuación (8-7) es

$$d\mathbf{F} = Nq |\mathbf{v}| A d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8-7)$$

No obstante, $Nq |\mathbf{v}| A$ es sólo la intensidad de corriente para una sola especie de portador. Por tanto, la expresión

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8-8)$$

se usa para escribir la fuerza sobre un elemento infinitesimal de un conductor de carga.*

La ecuación (8-8) puede integrarse para que dé la fuerza sobre un circuito completo (o cerrado). Si el circuito en cuestión se representa con el contorno C ,

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8-9)$$

Mientras \mathbf{B} dependa de la posición, la única simplificación que puede hacerse en la ecuación (8-9) es sacar el factor I que está dentro de la integral. Sin embargo, si \mathbf{B} es uniforme, es decir, independiente de la posición, entonces también puede sacarse del signo de integración para dar

$$\mathbf{F} = I \left\{ \oint_C d\mathbf{l} \right\} \times \mathbf{B}$$

La integral que queda es fácil de calcular. Puesto que es la suma de vectores infinitesimales que forman un circuito cerrado, debe ser cero. Así,

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\mathbf{B} \text{ uniforme}) \quad (8-10)$$

Otra cantidad interesante es el momento de rotación o torque sobre un circuito cerrado. Como el momento de rotación es el momento de la fuerza, el momento de rotación infinitesimal $d\boldsymbol{\tau}$ está dado por

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (8-11)$$

El momento de rotación sobre un circuito cerrado es

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (8-12)$$

Una vez más, a menos que \mathbf{B} sea uniforme, no puede hacerse otra simplificación. Sin embargo, si es uniforme, puede lograrse un desarrollo directo al escribir

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(dyB_z - dzB_y) + \mathbf{j}(dzB_x - dxB_z) + \mathbf{k}(dxB_y - dyB_x) \quad (8-13)$$

* Los experimentos originales que permitieron comprender las fuerzas magnéticas se llevaron a cabo con circuitos conductores de corriente. Estos experimentos producen las ecuaciones (8-8) y (8-9).

A partir de estas componentes, las componentes de $\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ resultan ser

$$\begin{aligned} [\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_x &= y dx B_y - y dy B_x - z dz B_x + z dx B_z \\ [\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_y &= z dy B_z - z dz B_y - x dx B_y + x dy B_x \\ [\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_z &= x dz B_x - x dx B_z - y dy B_z + y dz B_y \end{aligned} \quad (8-14)$$

Como se supuso que \mathbf{B} es independiente de \mathbf{r} (campo uniforme), las componentes de \mathbf{B} pueden sacarse de las integrales que aparecen en el desarrollo de la ecuación (8-12). Las integraciones espaciales que deben efectuarse son de dos formas generales:

$$\oint \xi d\xi \quad (8-15a)$$

y

$$\oint \xi d\eta \quad (8-15b)$$

donde ξ representa cualquier coordenada y η representa cualquier coordenada distinta de ξ . La primera de éstas es trivial porque representa la integral desde algún límite inferior ξ_1 hasta otro superior ξ_2 de $\xi d\xi$, más la integral desde ξ_2 hasta ξ_1 de $\xi d\xi$. Como el intercambio de los límites introduce un signo menos, el resultado es cero, lo que elimina seis términos de las ecuaciones (8-14). Las integrales de la forma (8-15b) contienen sólo dos variables, ξ y η ; por tanto, no importa si la integral se toma alrededor de la curva real C o alrededor de su proyección sobre el plano ξ, η , como se muestra en la figura 8.1. Al utilizar la proyección en el plano ξ, η es fácil ver lo que representa la ecuación (8-15b). En la figura 8-2, el plano ξ, η se muestra con el área infinitesimal $\xi d\eta$. La integral puede escribirse como

$$\oint \xi d\eta = \int_a^b \xi_1(\eta) d\eta + \int_b^a \xi_2(\eta) d\eta \quad (8-16)$$

FIGURA 8.1

Proyección de la curva C sobre el plano ξ, η .

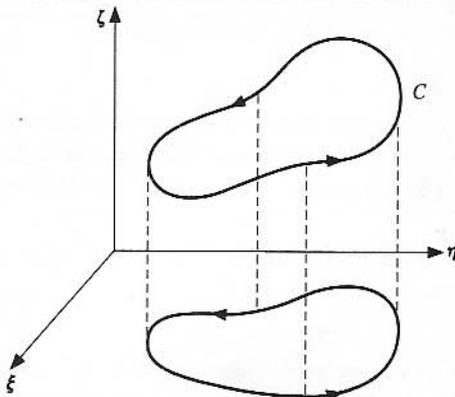
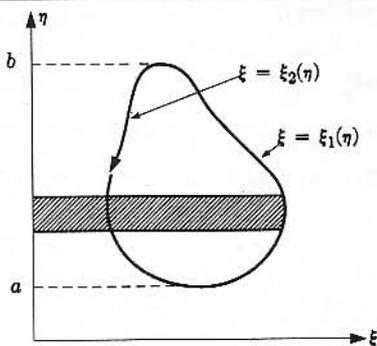


FIGURA 8.2

Cálculo de la integral $\oint \xi d\eta$.

Esta ecuación da sólo el área encerrada por la curva proyectada, y en la figura es positiva. Si ξ y η aparecen en orden cíclico para un sistema coordinado a derechas o dextrógiro, entonces el sentido en que tiene que recorrerse el contorno dará una normal en el sentido positivo de ζ . Por tanto, podemos escribir

$$\oint \xi d\eta = A_{\zeta} \quad (8-17)$$

con ξ, η, ζ como permutación cíclica de x, y, z . Utilizando este resultado para calcular las integrales, se tiene

$$\tau_x = I \oint_C [\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_x = I(A_y B_z - A_z B_y) \quad (8-18)$$

con expresiones semejantes para las componentes y y z . Las tres expresiones se resumen claramente en

$$\boldsymbol{\tau} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (8-19)$$

donde \mathbf{A} es el vector cuyas componentes son las áreas encerradas por las proyecciones de la curva C en los planos yz, zx y xy .* La cantidad $I\mathbf{A}$ aparece muy frecuentemente en la teoría magnética y se llama *momento dipolar magnético* del circuito. El símbolo \mathbf{m} se utilizará para el momento dipolar magnético:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A} \quad (8-20)$$

con \mathbf{A} definido como en el texto que sigue a la ecuación (8.19).

Es fácil demostrar, por la técnica anterior, que la integral de $\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ alrededor de una trayectoria cerrada da dos veces el área encerrada por la curva. Entonces,

$$\frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} = \mathbf{A} \quad (8-21)$$

* Observe que no se ha impuesto a C la restricción de curva plana y que esta definición de \mathbf{A} hace innecesaria cualquier restricción.

Esta expresión puede utilizarse para obtener

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (8-22)$$

como una expresión alternativa para el *momento dipolar magnético*.

Si en lugar de estar confinada en alambres, y la corriente está en un medio, entonces la identificación

$$I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J} d\mathbf{v} \quad (8-23)$$

es adecuada, como se indicó anteriormente. Podemos escribir entonces

$$d\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{J} d\mathbf{v} \quad (8-24)$$

que es útil para estudiar las propiedades magnéticas de la materia.

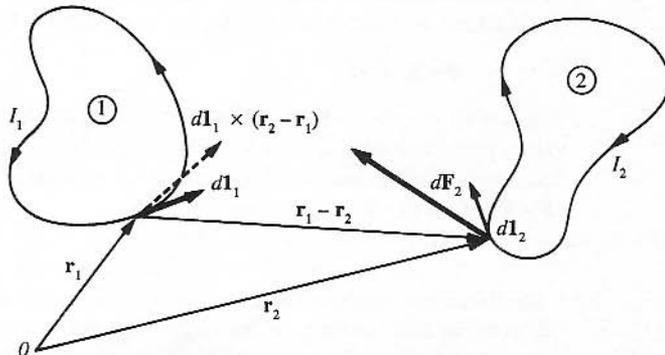
8.3 LEY DE BIOT Y SAVART

En 1820, algunas semanas después de que Oersted anunciase su descubrimiento de que las corrientes producen efectos magnéticos, Ampère presentó los resultados de una serie de experimentos que pueden generalizarse y expresarse en lenguaje matemático moderno como

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (8-25)$$

Esta expresión de aspecto asombroso puede entenderse con ayuda de la figura 8.3. La fuerza \mathbf{F}_2 es la fuerza ejercida sobre el circuito 2 debido a la influencia del circuito 1; los $d\mathbf{l}$ y los \mathbf{r} se explican en la figura. Por definición,

FIGURA 8.3
Interacción magnética entre dos circuitos de corriente.



$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

en unidades mks, y la ecuación (8-25) sirve como una definición primaria del amperio en términos del cual está definido el coulomb. La ecuación (8-25) aparentemente viola la tercera ley de Newton, debido a la falta de simetría. Sin embargo, utilizando algunos de los teoremas del análisis vectorial, puede demostrarse que es realmente simétrica, esto es, $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$. (Véase el problema 8.4.)

De la ecuación (8-9) es aparente que la ecuación (8-25) implica

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (8-26)$$

Esta ecuación es una generalización de la *ley de Biot y Savart*,* cuyo nombre se utilizará tanto para la ecuación (8-26) como para la forma diferencial

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (8-27)$$

La ecuación (8-27) es una consecuencia inmediata de la ecuación (8-4) al aplicarla a un conductor, si se usa el mismo argumento que condujo a la ecuación (8-7). Por último, las ecuaciones (8-26) y (8-27) toman las formas

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 \quad (8-28)$$

y

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 \quad (8-29)$$

para una distribución continua de corriente descrita por la densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$.

Una observación experimental es que todos los campos de inducción magnética pueden describirse en función de una distribución de corriente. Es decir, \mathbf{B} tiene siempre la forma de la ecuación (8-28), con alguna $\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)$. Esta observación implica que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8-30)$$

lo que a su vez implica que no hay polos magnéticos aislados. La ecuación (8-30) es válida para cualquier \mathbf{B} de la forma (8-28) u (8-26), como puede verificarse matemáticamente: tomaremos la divergencia de la ecuación (8-28). Utilizando $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F}$ se tiene

* Mencionaremos de paso que se han producido algunas controversias sobre los nombres de varias leyes. Nosotros no deseamos entrar en tales controversias, pero el lector interesado puede acudir a la excelente historia de E. T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity*, vol. I, Philosophical Library, Nueva York, 1951.

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_2 \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1$$

Sin embargo, $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$ es el gradiente de $-1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ con respecto a \mathbf{r}_2 . Y debido a que el rotacional de un gradiente es cero, se deduce que

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = 0$$

8.4 APLICACIONES ELEMENTALES DE LA LEY DE BIOT Y SAVART

El tipo de problemas a los que se puede aplicar la ecuación (8-28) o la ecuación (8-26) está limitado principalmente por las dificultades que se presentan al efectuar las integraciones. Algunas de las situaciones que sí se pueden manejar se consideran en esta sección. En las secciones siguientes se considerarán otras técnicas para obtener \mathbf{B} .

EJEMPLO 8.1

El campo magnético de un alambre largo y recto portador de corriente

Imaginemos que el alambre está sobre el eje x extendiéndose desde menos infinito hasta infinito y que conduce una corriente de intensidad I . El campo se calculará en un punto típico \mathbf{r}_2 sobre el eje y . La disposición geométrica se explica mejor con la figura 8.4.

Solución: De la ley de Biot-Savart, la inducción magnética es

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \mathbf{i} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (8-31)$$

Como $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ está en el plano xy ,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \begin{matrix} \theta \mathbf{k} \\ \text{sen} \end{matrix} \quad (8-32)$$

Además,

$$\frac{a}{x} = \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \quad (8-33)$$

y

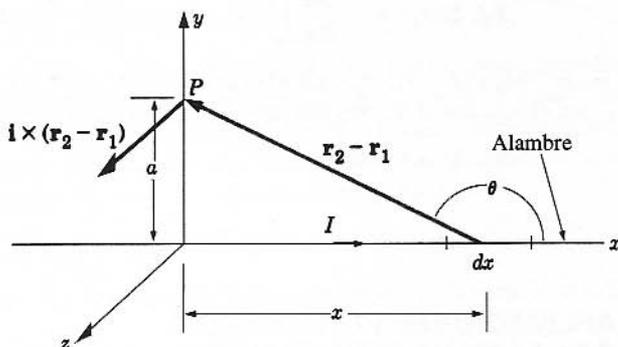
$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = a \csc(\pi - \theta) = a \csc \theta \quad (8-34)$$

Utilizando estas relaciones para convertir la ecuación (8-31) en una integral sobre θ desde 0 hasta π , se obtiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \frac{\theta d\theta}{\text{sen}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{k} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{k} \quad (8-35)$$

FIGURA 8.4

Campo magnético en un punto P debido a un alambre recto y largo.



Para utilizar este resultado con mayor generalidad, sólo es necesario observar que el problema muestra una evidente simetría con respecto al eje x . Por tanto, concluimos que las líneas de \mathbf{B} son circunferencias en todo punto, con el conductor como centro. Esto está completamente de acuerdo con el resultado elemental que da la dirección y el sentido de \mathbf{B} según la regla de la mano derecha.

EJEMPLO 8.2

Campo magnético axial de una espira circular de alambre conductor de corriente

Consideremos una espira circular de alambre por el que circula una corriente I . El campo magnético producido por este circuito en un punto arbitrario es muy difícil de calcular; sin embargo, si sólo se consideran puntos sobre el eje de simetría, la expresión de \mathbf{B} es relativamente sencilla. En este ejemplo se utilizará un tratamiento vectorial completo para demostrar la técnica. La figura 8.5 ilustra la disposición geométrica y las coordenadas que deben utilizarse. El campo se ha de calcular en el punto \mathbf{r}_2 sobre el eje z ; la espira circular está en el plano xy .

Solución: La inducción magnética está dada por la ecuación (8-26) en la que, de la figura 8.5, se deben utilizar las siguientes expresiones:

$$d\mathbf{l} = a d\theta(-\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta)$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = -\mathbf{i}a \cos \theta - \mathbf{j}a \sin \theta + \mathbf{k}z \quad (8-36)$$

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = (a^2 + z^2)^{1/2}$$

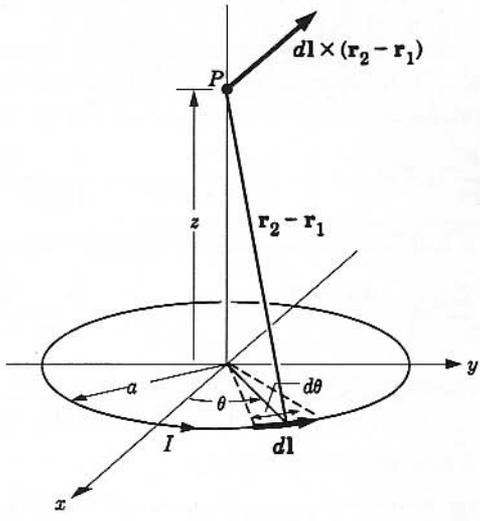
Sustituyendo éstas en la ecuación (8-26) se tiene

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{i}za \cos \theta + \mathbf{j}za \sin \theta + \mathbf{k}a^2)}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\theta \quad (8-37)$$

La integral de los dos primeros términos es cero, de modo que

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{k} \quad (8-38)$$

FIGURA 8.5
Campo axial de una espira circular de alambre.



que, por supuesto, está completamente a lo largo del eje z .

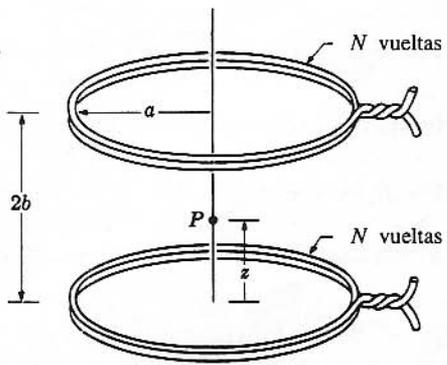
Una configuración de corriente frecuentemente utilizada es la bobina de Helmholtz, que consiste en dos bobinas circulares del mismo radio, con un eje común, separadas por una distancia elegida de tal modo que la segunda derivada de \mathbf{B} se anula en un punto del eje que esté a la mitad de la separación entre las bobinas.

EJEMPLO 8.3
Campo axial de una bobina de Helmholtz

La figura 8.6 ilustra la configuración de una bobina de Helmholtz. Nos gustaría determinar el campo magnético en un punto en el eje de la bobina.

Solución: La inducción magnética en el punto P es

FIGURA 8.6
Campo axial de una bobina de Helmholtz.



$$B_z(z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{3/2}} \right\} \quad (8-39)$$

que se obtiene al aplicar la ecuación (8-38) a cada una de las dos bobinas. El factor N se incluye para tener en cuenta la situación de que cada bobina contiene N vueltas. La primera derivada de B_z con respecto a z es

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{2z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{2(z - 2b)}{[(2b - z)^2 + a^2]^{5/2}} \right\} \quad (8-40)$$

En $z = b$, esta derivada se anula. La segunda derivada con respecto a z es

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B_z}{dz^2} = & -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2z^2}{(z^2 + a^2)^{7/2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2(z - 2b)^2}{[(2b - z)^2 + a^2]^{7/2}} \right\} \end{aligned}$$

En $z = b$ esta derivada se reduce a

$$\left. \frac{d^2 B_z}{dz^2} \right|_{z=b} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{b^2 + a^2 - 5b^2 + b^2 + a^2 - 5b^2}{(b^2 + a^2)^{7/2}} \right\} \quad (8-41)$$

que se anula si $a^2 - 4b^2 = 0$. Por tanto, la elección adecuada para b es

$$2b = a \quad (8-42)$$

Esto es, la distancia entre las bobinas deberá ser igual al radio. Con esta separación, la inducción magnética en el punto medio es

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{a} \frac{8}{5^{3/2}} \quad (8-43)$$

Las bobinas de Helmholtz desempeñan un papel importante en la investigación científica, en la que se utilizan frecuentemente para producir un campo magnético relativamente uniforme sobre una pequeña región del espacio. Consideremos el campo magnético en un punto del eje cercano al punto medio entre las bobinas. El campo $B_z(z)$ puede desarrollarse en una serie de Taylor alrededor del punto $z = \frac{1}{2}a$:

$$B_z(z) = B_z\left(\frac{1}{2}a\right) + (z - \frac{1}{2}a) \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{z=\frac{1}{2}a} + \dots$$

Como las tres primeras derivadas se anulan,

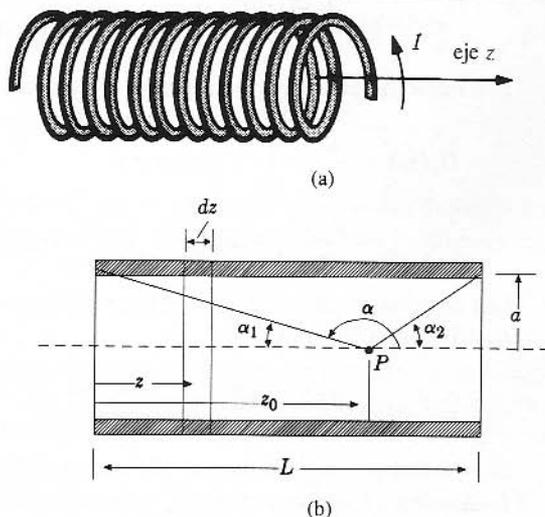
$$B_z(z) = B_z\left(\frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{24}(z - \frac{1}{2}a)^4 \left. \frac{\partial^4 B_z}{\partial z^4} \right|_{z=\frac{1}{2}a} + \dots$$

Si la cuarta derivada se calcula explícitamente, $B_z(z)$ puede escribirse como

$$B_z(z) = B_z(a/2) \left\{ 1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z - a/2}{a} \right)^4 \right\} \quad (8-44)$$

FIGURA 8.7

(a) Solenoide; (b) campo magnético axial de un solenoide.



Por tanto, para la región en la que $|z - a/2|$ es menor que $a/10$, $B_z(z)$ se desvía de $B_z(a/2)$ en menos de una y media diezmilésimas.

El tesla es una unidad bastante grande para medir campos en el laboratorio, y por ello generalmente se utiliza la unidad *gauss* para B del sistema gaussiano* de unidades: un gauss es igual a 10^{-4} tesla. Como referencia damos

$$B_z = \frac{32\pi N I}{5^{3/2} a 10}, \quad I \text{ en amperes, } a \text{ en cm, } B \text{ en gauss} \quad (8-43a)$$

para la inducción en el punto medio de la bobina de Helmholtz. Por supuesto que N sigue siendo el número de vueltas en cada una de las dos bobinas.

EJEMPLO 8.4

Campo axial de un solenoide

Otro dispositivo al que se puede aplicar la ecuación (8-38) es el solenoide. Un solenoide puede describirse como N vueltas uniformemente enrolladas en una forma cilíndrica de radio a y longitud L . Dicha configuración se muestra en la figura 8.7(a).

Solución: La inducción magnética en el punto z_0 se halla dividiendo la longitud L en elementos dz , como el que se muestra en la figura 8.7(b), aplicando la ecuación (8-38) a cada elemento y sumando los resultados. Si observamos que el elemento dz contiene $N dz/L$ vueltas, encontramos que

* Este sistema de unidades se presenta en el Apéndice III.

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI a^2}{L} \frac{1}{2} \int_0^L \frac{dz}{[(z_0 - z)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (8-45)$$

El cambio de variable, $z - z_0 = a \cot \alpha$, conduce a

$$\begin{aligned} B_z(z_0) &= \frac{\mu_0 NI}{2L} \int_{\alpha_2}^{\pi - \alpha_1} \text{sen } \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2L} [-\cos(\pi - \alpha_1) + \cos \alpha_2] \end{aligned} \quad (8-46)$$

Los ángulos α_1 y α_2 (ambos $< \pi/2$) se muestran en la figura 8.7(b). La ecuación (8-46) se convierte en

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{L} \left[\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} \right] \quad (8-47)$$

Si el solenoide es largo comparado con su radio y z_0 no está demasiado próximo ni a cero ni a L , entonces tanto α_1 como α_2 son ángulos pequeños y pueden aproximarse mediante

$$\alpha_1 \cong \frac{a}{z_0}, \quad \alpha_2 \cong \frac{a}{L - z_0} \quad (8-48)$$

Manteniendo los términos cuadráticos en los desarrollos de $\cos \alpha_1$ y $\cos \alpha_2$, obtenemos

$$B_z(z_0) \cong \frac{\mu_0 NI}{L} \left\{ 1 - \frac{a^2}{4z_0^2} - \frac{a^2}{4(L - z_0)^2} \right\} \quad (8-49)$$

De esto concluimos que si $z_0 = L/2$ y $L/a = 10$, resulta un error del 2% al despreciar los términos cuadráticos y usar sólo la fórmula elemental.

La fórmula general para \mathbf{B} (Ec. 8-26) es siempre una expresión correcta para el campo magnético de un circuito de corriente, pero es difícil utilizarla en el caso general en el que la geometría es compleja.

8.5 LEY DE CIRCUITOS DE AMPÉRE

Para campos de inducción magnética dados por la ecuación (8-26) o por la ecuación (8-28) que se deben a corrientes estacionarias, es decir, a corrientes que satisfacen

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (8-50)$$

puede deducirse una ecuación muy importante para el rotacional de \mathbf{B} simplemente calculando el rotacional de la ecuación (8-28). El rotacional implica una derivación con respecto a \mathbf{r}_2 y, en consecuencia, opera sólo sobre el factor $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$:

$$\begin{aligned}\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \left(\nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right] dv_1\end{aligned}$$

La derivada puede cambiarse ahora a una derivada con respecto a \mathbf{r}_1 (con un signo menos) en el segundo término, debido a la simetría entre \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_1 :

$$\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) 4\pi \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right] dv_1$$

El primer término se expresa en términos de la función delta de Dirac, como en la ecuación (2-57); su integración nos da $\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_2)$. Se puede demostrar mediante una integración por partes que el segundo término se anula:

$$\nabla_1 \cdot \left(\mathbf{J} \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right) = \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \nabla_1 \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla_1 \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

para la componente x , y similarmente para las otras componentes. El término con $\nabla \cdot \mathbf{J}$ se anula por la suposición (8-50), y la integral de volumen del primer miembro puede convertirse en una integral de superficie mediante el teorema de la divergencia; esta integral se anula si la superficie elegida se encuentra fuera de una región limitada donde \mathbf{J} no se anula. (El mismo resultado se deduce de la identidad 1.2.4 de la tabla 1.2.) De este modo el resultado final, que se llama *forma diferencial* de la ley de Ampère, es

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_2) \quad (8-51)$$

En el capítulo 9 esta ecuación se modificará para que sea más útil cuando se presenten materiales magnéticos; sin embargo, la ecuación (8-51) es válida todavía mientras \mathbf{J} sea la corriente *total* y $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Se puede usar el teorema de Stokes para transformar la ecuación (8-51) en una forma integral que a veces es muy útil. Esta aplicación del teorema de Stokes se expresa como

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-45)$$

Utilizando la ecuación (8-51) para $\nabla \times \mathbf{B}$ se tiene la *ley de circuitos de Ampère*

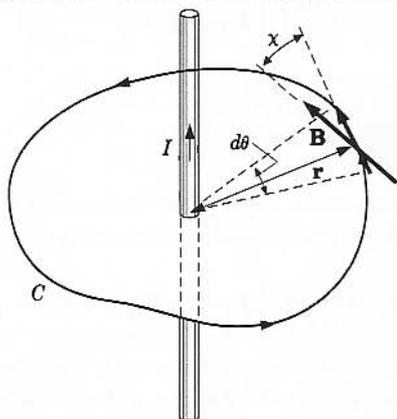
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (8-52)$$

Esta ecuación simplemente dice que la integral de línea de \mathbf{B} alrededor de una trayectoria cerrada es igual a μ_0 veces la intensidad de corriente total que pasa a través de la trayectoria cerrada.

Es conveniente verificar la ecuación (8-52) para un caso sencillo. El alambre largo recto proporciona un ejemplo particularmente bueno. En este caso, \mathbf{B} , a una distancia r del conductor, está dado por $B(r) = \mu_0 I / 2\pi r$ y es tangencial a la circunferencia

FIGURA 8.8

Verificación de la Ley de circuitos de Ampère para la forma geométrica de un alambre recto y largo.



Es conveniente verificar la ecuación (8-52) para un caso sencillo. El alambre largo recto proporciona un ejemplo particularmente bueno. En este caso, \mathbf{B} , a una distancia r del conductor, está dado por $B(r) = \mu_0 I / 2\pi r$ y es tangencial a la circunferencia de radio r con centro en el conductor. La figura 8.8 muestra la disposición geométrica. La corriente se dirige hacia arriba y C se describe en el sentido contrario al de las agujas del reloj. De la figura,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}| |d\mathbf{l}| \cos \chi = |\mathbf{B}| r d\theta \quad (8-53)$$

Con $|\mathbf{B}|$ como se dio antes,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I \quad (8-54)$$

que representa un caso especial de la ecuación (8-52).

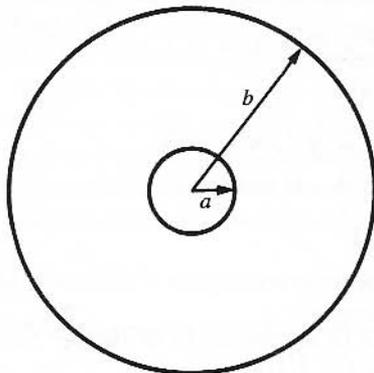
La ley de circuitos de Ampère es en muchas formas paralela a la ley de Gauss en electrostática. Con esto se quiere decir que puede usarse para obtener el campo magnético debido a una determinada distribución de corriente de gran simetría, sin tener que calcular las complicadas integrales que aparecen en la ley de Biot. A continuación veremos un ejemplo.

EJEMPLO 8.5 Campo magnético de un cable coaxial conductor

Consideremos un cable coaxial que consiste en un pequeño conductor central de radio a y un cable conductor exterior cilíndrico coaxial de radio b , como se muestra en la figura 8.9. Supongamos que los dos conductores transportan corrientes totales iguales de intensidad I , pero de sentido contrario, con el eje dirigido hacia afuera del papel. Lo que se desea es determinar el campo magnético en puntos fuera y dentro del cable.

FIGURA 8.9

Sección transversal de un cable coaxial.



Solución: De la simetría del problema, está claro que \mathbf{B} debe ser tangente en todo punto a la circunferencia centrada en el conductor central y trazada por el punto en el que se desea calcular \mathbf{B} . Además, \mathbf{B} no puede depender del ángulo azimutal. Las curvas apropiadas que deben usarse para aplicar la ecuación (8-52) son circunferencias centradas en el conductor central. Para cada circunferencia de radio r

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B \quad (8-55)$$

que debe ser igual a μ_0 veces la corriente total que pasa a través del círculo. Así,

$$\begin{aligned} 2\pi r B &= \mu_0 I, & a < r < b \\ 2\pi r B &= 0, & b < r \end{aligned} \quad (8-56)$$

Este resultado aparentemente trivial sólo puede obtenerse, con dificultad considerable, mediante la integración de la ley de Biot.

8.6 EL POTENCIAL VECTOR MAGNÉTICO

El cálculo de los campos eléctricos se simplificó mucho con la introducción del potencial electrostático. La posibilidad de hacer esta simplificación resultó de la anulación del rotacional del campo eléctrico. El rotacional de la inducción magnética no se anula, pero su divergencia sí.

Como la divergencia de cualquier rotacional es cero, es razonable suponer que la inducción magnética puede expresarse como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (8-57)$$

El campo vectorial \mathbf{A} se llama *potencial vector magnético*.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

La única otra condición que se impone a \mathbf{A} es que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \rightarrow \text{AMPERE LOCAL} \quad (8-58)$$

Utilizando la identidad

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (8-59)$$

y especificando que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (8-60)$$

Integrando cada componente rectangular y utilizando la solución de la ecuación de Poisson como guía, se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \quad \begin{matrix} \vec{j} ds = dI \text{ (B)} \\ \vec{j} ds = dq \text{ (E)} \end{matrix} \quad (8-61)$$

Las integrales que intervienen en esta expresión son mucho más fáciles de calcular que las de la ley de Biot, pero son más complicadas que las que se emplean para obtener el potencial electrostático.

Una forma alternativa de obtener la ecuación (8-61) es por transformación directa de la ecuación (8-28) a la forma de la ecuación (8-57). Esto se hace observando que

$$\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (8-62)$$

donde ∇_2 indica que la derivación es con respecto a \mathbf{r}_2 . La identidad vectorial

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \varphi \quad (8-63)$$

que es válida para cualquier vector \mathbf{F} y cualquier escalar φ , nos da

$$\nabla_2 \times \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \right\} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (8-64)$$

puesto que $\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)$ no depende de \mathbf{r}_2 . Combinando estos resultados en la ecuación (8-28) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \end{aligned} \quad (8-65)$$

El rotacional puede sacarse fuera de la integral, lo que deja la ecuación (8-65) exactamente de la forma de la ecuación (8-57). Por tanto, de este enfoque resulta también

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \quad (8-61)$$

Para no dar la falsa impresión de que el potencial vector es tan útil como el potencial electrostático al calcular campos sencillos, debe observarse que esencialmente no hay casos en los que \mathbf{A} pueda calcularse en una forma cerrada sencilla (aun cuando

podiera realizarse numéricamente para distribuciones limitadas de corriente). El alambre largo y recto da un resultado infinito para \mathbf{A} cuando se utiliza la ecuación (8-61).* El cálculo para la espira circular contiene integrales elípticas, y así sucesivamente. Debe observarse también que el cálculo del potencial vector en un solo punto no es útil, porque la inducción magnética se obtiene por diferenciación. El principal uso del potencial vector está en aproximaciones tales como las que se analizan en la siguiente sección y en problemas en los que interviene la radiación electromagnética (véanse los Caps. 16 y 20).

8.7

EL CAMPO MAGNÉTICO DE UN CIRCUITO DISTANTE

El potencial vector magnético debido a un pequeño circuito a grandes distancias (Fig. 8.10) puede calcularse con relativa facilidad. La expresión para el potencial vector de la ecuación (8-61) puede aplicarse a circuitos de corriente haciendo la sustitución $\mathbf{J} dv \rightarrow I d\mathbf{r}$. Así,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (8-66)$$

Para circuitos cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con r_2 , el denominador se puede aproximar. Para ello escribiremos, como en la ecuación (2-46),

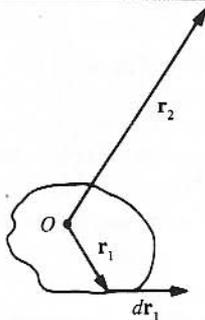
$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = (r_2^2 + r_1^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^{-1/2} \quad (8-67)$$

y desarrollamos en potencias de r_1/r_2 para obtener

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = \frac{1}{r_2} \left[1 + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^2} + \dots \right] \quad (8-68)$$

FIGURA 8.10

Campo magnético en \mathbf{r}_2 debido a un circuito distante. \mathbf{r}_1 se extiende sobre el circuito. (El origen de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 está dentro o cerca del circuito.)



* Existe un potencial vector finito para un alambre largo y recto, en coordenadas cilíndricas $\mathbf{A} = -(\mu_0 I / 2\pi) \ln rk$ para un alambre situado en el eje z por el que circula una corriente I . Este resultado puede verificarse directamente calculando $\nabla \times \mathbf{A}$. (Véase el Apéndice IV.)

para el primer orden en r_1/r_2 . Utilizando esto en la ecuación (8-66) se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_2} \oint d\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r_2^2} \oint d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + \dots \right\} \quad (8-69)$$

La primera integral se anula; el segundo integrando es un término del desarrollo

$$(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \quad (8-70)$$

Para eliminar el primer término a la derecha de la ecuación (8-70), la diferencial de $\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)$ para un cambio pequeño de \mathbf{r}_1 se escribe como

$$d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] = \mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) \quad (8-71)$$

que es exacta. Sumando las ecuaciones (8-70) y (8-71) y dividiendo por dos se tiene

$$d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2} d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] \quad (8-72)$$

Como el último término es un diferencial exacto, no contribuye a la segunda integral de la ecuación (8-69). Así, se desprende que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{I}{2} \oint \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 \right] \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (8-73)$$

La ecuación (8-22) define la cantidad entre corchetes como el momento dipolar magnético, \mathbf{m} , del circuito. En consecuencia,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (8-74)$$

En esta deducción se ha supuesto que todas las $r_1 \ll r_2$. Por tanto, la ecuación (8-74) no es válida para un origen arbitrario, sino sólo para un origen cercano al circuito.

La inducción magnética puede determinarse tomando el rotacional de la ecuación (8-74). Esto se logra fácilmente utilizando identidades vectoriales. Primero,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right] \end{aligned} \quad (8-75)$$

El primer término entre corchetes puede transformarse observando que

$$m_x \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) = \frac{m_x \mathbf{i}}{r_2^3} - 3m_x x_2 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^5} \quad (8-76)$$

Por tanto,

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = \frac{\mathbf{m}}{r_2^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_2}{r_2^5} \quad (8-77)$$

El segundo término implica sólo el cálculo de

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = \frac{3}{r_2^3} - \mathbf{r}_2 \cdot \frac{3\mathbf{r}_2}{r_2^5} = 0 \quad (r_2 \neq 0) \quad (8-78)$$

Finalmente,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r_2^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_2}{r_2^5} \right] \quad (\text{dipolo magnético}) \quad (8-79)$$

La ecuación (8-79) demuestra que el campo magnético de un circuito distante no depende de su forma geométrica detallada, sino sólo de su momento magnético \mathbf{m} . Al comparar con la ecuación (2-36) se ve que la ecuación (8-79) es de la misma forma que el campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico, lo cual explica el nombre de campo *dipolar magnético*.

8.8

EL POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO

La ecuación (8-51) indica que el rotacional de la inducción magnética es cero siempre que la densidad de corriente sea cero.

Por tanto, la inducción magnética en dichas regiones puede escribirse como el gradiente de un potencial escalar:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi^* \quad (8-80)$$

φ^* se llama *potencial escalar magnético*.

Sin embargo, la divergencia de \mathbf{B} también es cero, lo que significa que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla^2 \varphi^* = 0 \quad (8-81)$$

Por tanto, φ^* satisface la ecuación de Laplace. Gran parte del trabajo de electrostática puede adoptarse directamente y emplearse para calcular φ^* en varias situaciones. Sin embargo, debe tenerse cuidado al aplicar las condiciones en la frontera. Además, φ^* de un circuito con corriente no es una función de valor único. Un ejemplo sencillo se ve en el problema 8.25.

La expresión para el potencial escalar de un dipolo magnético es particularmente útil. Si se observa que la ecuación (8-79) puede escribirse como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} \right) \quad (8-82)$$

entonces es evidente que

$$\varphi^*(\mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} \quad (8-83)$$

para un dipolo magnético \mathbf{m} . Observe la semejanza entre la ecuación (8-83) y el potencial de un dipolo eléctrico (Ec. 2-39).

Un circuito grande C puede dividirse en muchos circuitos pequeños por medio de una retícula, como se muestra en la figura 8-11. Si cada circuito pequeño formado por la retícula transporta la misma intensidad de corriente que originalmente transportaba el circuito C , entonces, debido a la cancelación de las corrientes en los lados comunes de los circuitos adyacentes, el efecto neto es el mismo que el que se produciría si la carga sólo circulara en el circuito C . Para cualquiera de las mallas pequeñas, el momento magnético puede expresarse como

$$d\mathbf{m} = I \mathbf{n} da \quad (8-84)$$

ya que cada una de las vueltas es suficientemente pequeña como para considerarse plana. Aquí \mathbf{n} es el vector normal unitario al pequeño circuito da . Utilizando esta expresión en la ecuación (8-83) e integrando sobre la superficie acotada por c se tiene

$$\varphi^*(P) = \frac{I}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n} da}{r_2^3} \quad (8-85)$$

En esta ecuación, \mathbf{r}_2 debe interpretarse como el vector que va desde da hasta el punto P , esto es, $-\mathbf{r}$ en la figura 8.11. Haciendo el cambio $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}$ se tiene como resultado

$$\varphi^*(P) = -\frac{I}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da}{r^3} \quad (8-86)$$

La cantidad $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da$ es exactamente r veces la proyección de da sobre un plano perpendicular a \mathbf{r} . Así, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da/r^3$ es el ángulo sólido subtendido por da en P . La ecuación (8-86) puede entonces escribirse como

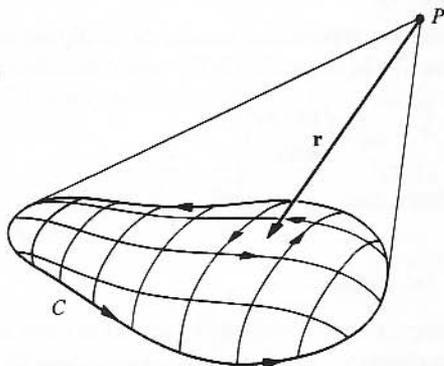
$$\varphi^*(P) = -\frac{I\Omega}{4\pi} \quad (8-87)$$

donde Ω es el ángulo sólido subtendido por la curva C en el punto P .

El potencial escalar magnético puede usarse para calcular el campo magnético debido ya sea a circuitos que conducen corriente o a capas dobles magnéticas (capas de dipolos). En ocasiones este procedimiento es útil al tratar problemas de circuitos; sin embargo, se usa principalmente con los materiales magnéticos.

FIGURA 8.11

Circuito de corriente macroscópico construido a partir de dipolos magnéticos elementales.



FLUJO MAGNÉTICO

La cantidad

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (8-88)$$

se conoce como *flujo magnético* y se mide en webers (Wb).^{*} Es análogo al flujo eléctrico analizado anteriormente, pero su importancia es mucho mayor.

El flujo que pasa a través de una superficie cerrada es cero, como se puede ver al calcular

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv = 0 \quad (8-89)$$

De esto también se desprende que el flujo que atraviesa un circuito es independiente de la superficie particular usada para calcular dicho flujo. Estos resultados se utilizarán en el capítulo 11, cuando se estudie la inducción electromagnética.

RESUMEN

La magnetostática se basa en la suma de una fuerza magnética a la fuerza de Coulomb cuando las cargas están en movimiento. En unidades mks, la **fuerza de Lorentz** sobre una carga de prueba q con velocidad \mathbf{v} es

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

El **campo magnético** de una carga q_1 que se mueve con velocidad uniforme \mathbf{v}_1 es

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico producido por q_1 y

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

es la velocidad de la luz. (En unidades gaussianas, hay que sustituir B en estas fórmulas por B/c .) Los resultados se aplican a las corrientes de conducción escribiendo

$$Nq \, dv \, \mathbf{v} = \mathbf{J} \, dv = I \, d\mathbf{l}$$

donde $Nq = \rho$, $\rho \mathbf{v} = \mathbf{J}$ para los tipos de partículas cargadas que estén en movimiento.

^{*} De aquí que un tesla sea igual a un weber/m², que fue lo que se utilizó anteriormente como la unidad mks de \mathbf{B} .

- La **fuerza** sobre un elemento de alambre $d\mathbf{l}$ en un campo magnético \mathbf{B} es

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

El **momento de rotación** sobre un circuito en un campo uniforme \mathbf{B} es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

- El **momento dipolar magnético** del circuito es

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$$

La integral $\frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ es el vector cuyas componentes son las áreas encerradas por la proyección de la curva C sobre los planos coordenados.

- El **campo magnético** producido por un elemento de corriente $I d\mathbf{l}'$ es

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

donde $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ N/A}^2$ en unidades mks. El campo debido a un circuito completo se calcula integrando esto a lo largo del circuito. Para una distribución general de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ como fuente, se tiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

Diferenciando esta ecuación, encontramos que no hay monopolos magnéticos:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Además

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

para una distribución de corriente estacionaria con

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Éstas son las **ecuaciones diferenciales básicas** que deben ser satisfechas en cada punto por todos los campos magnetostáticos. (La ecuación de divergencia para \mathbf{B} es satisfecha aun por campos variables con el tiempo y es la segunda de las cuatro ecuaciones fundamentales de Maxwell.)

- La **ley de Ampère** se obtiene de la ecuación del rotacional al integrar ambos miembros sobre una superficie arbitraria S y aplicar el teorema de Stokes:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

donde $I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$

es la corriente total que pasa a través de S limitada por C . Esta ecuación tiene utilidad práctica para calcular \mathbf{B} en algunas situaciones especiales con gran simetría, en las que puede verse que \mathbf{B} es constante en magnitud y dirección con respecto a alguna curva adecuada C .

- La existencia de una **función potencial vector** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

se deduce de la ecuación de la divergencia. Para una distribución de corriente dada, $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

- A grandes distancias de la región donde se encuentran las corrientes fuente \mathbf{J} , el **desarrollo multipolar** de \mathbf{A} da

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (\text{No hay término monopolar.})$$

- En regiones donde $\mathbf{J} = 0$, se puede definir un **potencial escalar magnético** $\varphi^*(\mathbf{r})$ (ya que $\nabla \times \mathbf{B} = 0$), tal que

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi^*$$

Al igual que el potencial electrostático, φ^* satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \varphi^* = 0$$

pero las diferentes condiciones en la frontera pueden proporcionar diferentes conjuntos de soluciones. La solución dipolar es la misma que en el caso electrostático:

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

PROBLEMAS

8.1 Una partícula cargada de masa m y carga q se mueve en un campo uniforme de inducción magnética \mathbf{B}_0 . Demuestre que el movimiento más general de la partícula describe una hélice, cuya sección transversal es una circunferencia de radio $R = mv_{\perp}/qB$. (Aquí v_{\perp} es la componente de la velocidad de la partícula que es perpendicular a \mathbf{B}_0 .)

8.2 El hamiltoniano para una partícula cargada que se mueve en un campo uniforme de inducción magnética, \mathbf{B}_0 , que es paralelo al eje z , está dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{qB_0}{2m} (xp_y - yp_x) + \frac{q^2 B_0^2}{8m} (x^2 + y^2)$$

Demuestre que las ecuaciones del movimiento que pueden deducirse de \mathcal{H} son compatibles con los resultados del problema 8.1.

8.3 Un protón cuya velocidad es de 10^7 m/s se lanza perpendicularmente a un campo uniforme de inducción magnética de 0.15 T. (a) ¿Cuánto se desvía la trayectoria de la partícula de una línea recta después de que ha recorrido una distancia de 1 cm? (b) ¿Cuánto tarda el protón en recorrer un arco de 90° ?

8.4 Demuestre que la ley de fuerza de la ecuación (8-25) puede transformarse en

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

que es claramente simétrica en el sentido de que $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

Propiedades magnéticas de la materia

En el capítulo 8 analizamos técnicas para hallar el campo de inducción magnética debido a una distribución *específica* de corrientes. Así por ejemplo, si estamos considerando un circuito cerrado constituido por un alambre por el que circula una corriente, el campo magnético en la región de vacío que rodea al alambre puede calcularse con la ayuda de la ley de Biot. Ahora llenemos la región que rodea al alambre con un medio material. ¿Se alterará la inducción magnética por la presencia de esta materia? La respuesta es “sí”. En este capítulo analizaremos la influencia de la materia en el campo magnético.

Toda materia consiste fundamentalmente en átomos, y cada átomo contiene electrones en movimiento. Estos circuitos electrónicos, cada uno de los cuales está confinado a un solo átomo, son los que llamaremos *corrientes atómicas*. Por tanto, parece que tenemos dos clases de corriente: (1) una corriente normal, que consiste en transporte de carga, esto es, el movimiento de electrones libres o de iones cargados, y (2) corrientes atómicas, que son corrientes puras que circulan sin dar origen a transporte de carga. Sin embargo, ambas clases de corrientes pueden producir campos magnéticos.

MAGNETIZACIÓN

Cada corriente atómica es un minúsculo circuito cerrado de dimensiones atómicas, de tal modo que es razonable que el campo magnético “distante” de un átomo pueda describirse apropiadamente como el de un dipolo magnético. De hecho, una amplia gama de estudios experimentales, así como la formulación de la mecánica cuántica, que es nuestro método más exacto para el cálculo de fenómenos atómicos, nos dicen que la parte dominante del campo de inducción magnética distante debido a un solo átomo se determina especificando su momento dipolar magnético, \mathbf{m} .

Sea \mathbf{m}_i el momento magnético del i -ésimo átomo. Definiremos ahora una cantidad vectorial macroscópica, la *magnetización* \mathbf{M} , utilizando el mismo método que se empleó para definir la polarización en el capítulo 4.

Sumemos vectorialmente todos los momentos dipolares de un pequeño elemento de volumen Δv , y luego dividamos el resultado entre Δv , la cantidad resultante,

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_i \mathbf{m}_i \quad (9-1)$$

se llama momento dipolar magnético por unidad de volumen, o simplemente *magnetización*.

El procedimiento para hallar el límite en la ecuación (9-1) es nuestro procedimiento usual de tomar los límites macroscópicos, esto es, Δv se hace muy pequeño desde el punto de vista macroscópico, pero no tan pequeño como para que no contenga un número estadísticamente grande de átomos. La cantidad \mathbf{M} se vuelve entonces una función vectorial puntual. En el estado desmagnetizado, la suma $\sum \mathbf{m}_i$ dará cero como resultado de la orientación aleatoria de los \mathbf{m}_i , pero en presencia de un campo externo excitante, \mathbf{M} dependerá generalmente de este campo. La dependencia específica de \mathbf{M} con respecto a \mathbf{B} se considerará en la sección 9.6.

Por el momento, supondremos que $\mathbf{M}(x, y, z)$ es una función conocida y calcularemos la contribución del material magnetizado al campo magnético a partir de las ecuaciones desarrolladas en la sección 8.7.

La función vectorial \mathbf{M} nos proporciona una descripción macroscópica de las corrientes atómicas en el interior de la materia. Específicamente, \mathbf{M} mide el número de circuitos de corriente atómica por unidad de volumen multiplicado por el momento magnético efectivo o promedio de cada circuito. Desde el punto de vista puramente macroscópico, todos los efectos magnéticos debidos a la materia pueden describirse adecuadamente en función de \mathbf{M} , o por sus derivadas. Una de estas derivadas, $\nabla \times \mathbf{M}$, es la densidad de corriente de transporte equivalente que generaría el mismo campo magnético que el propio \mathbf{M} ; ésta se llama *densidad de corriente de magnetización*, \mathbf{J}_M . Antes de deducir esta importante relación que liga \mathbf{J}_M con \mathbf{M} , veamos un modelo simplificado

FIGURA 9.1

Esquema simplificado de un material magnético consistente en espiras de corriente atómicas que circulan en el mismo sentido.

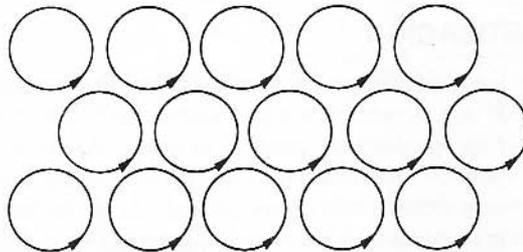
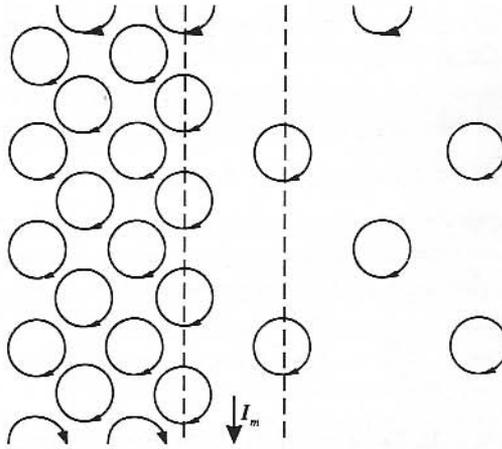


FIGURA 9.2

Ejemplo de cambio brusco en la magnetización.

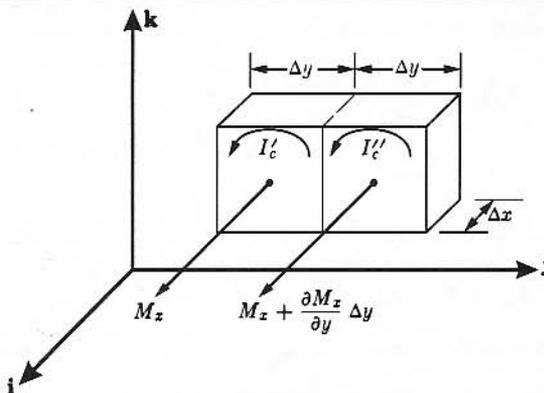


de materia magnetizada como si ésta consistiese en espiras de corriente atómicas que circulan en el mismo sentido, una junto a otra (Fig. 9.1). Si la magnetización es uniforme, las corrientes en las distintas espiras tienden a eliminarse entre sí, y no hay corriente neta efectiva en el interior del material. Si la magnetización no es uniforme, la cancelación no será completa. Como ejemplo de magnetización no uniforme, consideremos el cambio brusco en la magnetización mostrado en la figura 9.2. Si centramos nuestra atención en la región entre las líneas punteadas, es evidente que hay más carga que se mueve hacia abajo que la que se mueve hacia arriba. Por tanto, aun cuando no haya transporte de carga, localmente hay un movimiento efectivo de carga hacia abajo, y esta “corriente” puede producir un campo magnético. Esta corriente se denomina *corriente de magnetización*.

Nos queda deducir la relación entre \mathbf{J}_M y \mathbf{M} . Consideremos dos pequeños elementos de volumen en una muestra de material magnético, cada elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, y colocados uno al lado del otro en la dirección del eje y (Fig. 9.3). Si la magnetización del primer elemento de volumen es $\mathbf{M}(x, y, z)$, entonces la magnetización del segundo elemento es

FIGURA 9.3

Sustitución de elementos de volumen de material magnetizado por corrientes circulantes de intensidades I'_c e I''_c .



$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \Delta y + \text{términos de orden superior}$$

La componente x del momento magnético del primer elemento, $M_x \Delta x \Delta y \Delta z$, puede escribirse en función de una intensidad de corriente circulante, I'_c :

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I'_c \Delta y \Delta z \quad (9-2)$$

Análogamente, la componente x del momento magnético del segundo elemento, despreciando los términos de orden superior que se anulan en el límite donde cada elemento de volumen se vuelve muy pequeño, es

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta y \Delta z = I''_c \Delta y \Delta z \quad (9-3)$$

La corriente neta hacia arriba en la región intermedia de los dos elementos de volumen es

$$I'_c - I''_c = -\frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (9-4)$$

Consideremos a continuación dos elementos de volumen adyacentes sobre el eje x y centremos nuestra atención en la componente y de la magnetización en cada celda. En la región intermedia entre las dos celdas, la intensidad de corriente neta hacia arriba causada por las corrientes circulantes que definen los momentos magnéticos es

$$(I_c)_{\text{arriba}} = \frac{\partial M_y}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (9-5)$$

Éstas son las únicas corrientes circulantes de una celda determinada que dan lugar a una corriente neta en la dirección z . Esta corriente neta, que proviene de una magnetización no uniforme, es la corriente de magnetización. No es una corriente de transporte, sino que se obtiene, como hemos visto, de corrientes circulantes, es decir, de corrientes atómicas en el material. El área efectiva para cada una de las corrientes en las ecuaciones (9-4) y (9-5) es $\Delta x \Delta y$. Por tanto,

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (9-6a)$$

o

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (9-6b)$$

La densidad de corriente de magnetización es el rotacional de la magnetización.

EL CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO POR UN MATERIAL MAGNETIZADO

Según la ecuación (9-1), cada elemento de volumen $\Delta v'$ de materia magnetizada se caracteriza por un momento magnético

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{M}(x', y', z') \Delta v' \quad (9-7)$$

Utilizando los resultados de la sección 8.7, podemos expresar la contribución al campo magnético en el punto (x, y, z) de cada $\Delta \mathbf{m}$ (o, de manera equivalente, de cada $\Delta v'$). El campo magnético se obtiene entonces como una integral sobre todo el volumen del material, V_0 . Este procedimiento se indica esquemáticamente en la figura 9.4.

En lugar de calcular directamente \mathbf{B} , vemos que es conveniente trabajar con el potencial vector \mathbf{A} , y obtener \mathbf{B} a continuación por medio de la operación rotacional. Según la sección 8.7, el potencial vector en (x, y, z) está dado por

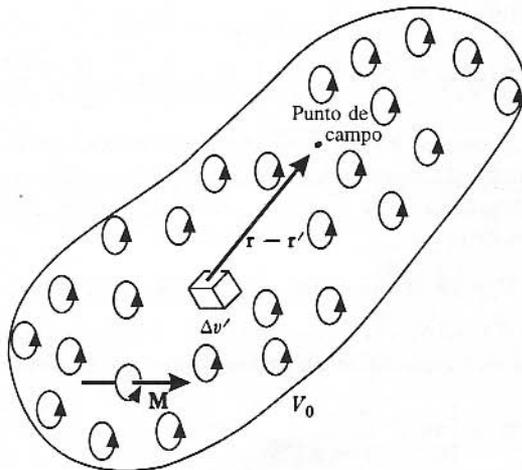
$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{M}(x', y', z') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(x', y', z') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \end{aligned} \quad (9-8)$$

Por medio de las identidades vectoriales (1.19) y (1.2.3) de las tablas 1.1 y 1.2, esta integral puede transformarse en

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad (9-9)$$

FIGURA 9.4

Contribución a la inducción magnética de una distribución de material magnetizado.



donde S_0 es la superficie de V_0 . Utilizando la ecuación (9-6b) y definiendo una densidad de corriente de magnetización superficial \mathbf{j}_M (es decir, una corriente de magnetización por unidad de longitud que fluye en una capa superficial) por la relación

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (9-10)$$

podemos escribir la ecuación (9-9) como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{j}_M da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9-11)$$

Podríamos habernos aventurado a predecir la expresión final (Ec. 9-11). Sin embargo, es agradable ver que ha surgido del cálculo matemático de una manera natural. Por tanto, el potencial vector producido por una distribución de corrientes atómicas en el interior de la materia tiene la misma forma que el producido por una distribución de corrientes verdaderas de transporte. Debemos señalar que la ecuación (9-10) es la expresión adecuada para la densidad de corriente superficial que es consistente con $\mathbf{J}_M = \nabla' \times \mathbf{M}$. \mathbf{j}_M debe introducirse siempre que \mathbf{M} cambie bruscamente, como podría suceder en la zona interfacial entre dos medios, pero si imaginamos que la región de discontinuidad de \mathbf{M} se extiende sobre la distancia $\Delta\xi$, entonces puede demostrarse que \mathbf{j}_M está contenida en el término $\mathbf{J}_M \Delta\xi$. (O, si la región es muy delgada, \mathbf{j}_M podría representarse con una función delta superficial.)

Aunque la ecuación (9-11) es correcta y de tal forma que se integra de manera sencilla con los resultados del capítulo 8, presenta algunas dificultades prácticas a la hora de calcular \mathbf{B} a partir de una distribución específica de magnetización. Primero, hay que efectuar la operación $\nabla \times \mathbf{M}$ y, segundo, es necesario otra operación de rotacional para obtener \mathbf{B} a partir del campo \mathbf{A} . Ciertamente, es preferible trabajar con cantidades escalares si es posible, y el gradiente de un campo escalar (como hemos visto en electrostática) es más fácil de calcular que el rotacional de un campo vectorial. Por esta razón, volveremos a la ecuación (9-8) y trataremos de utilizar otro enfoque. Después de todo, nos interesa \mathbf{B} y no \mathbf{A} , de modo que tomaremos el rotacional formalmente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \nabla \times \left[\mathbf{M} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dv' \quad (9-12)$$

donde los operadores diferenciales del rotacional actúan sobre las coordenadas sin primas.

Como puede haber anticipado ya el lector, nuestro siguiente objetivo es transformar el integrando de la ecuación (9-12). Para ello, consultaremos las identidades vectoriales de la tabla 1.1. Según (1.1.10),

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

Haciendo $\mathbf{F} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')$ y $\mathbf{G} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$, y observando que las derivaciones son con respecto a las coordenadas sin prima, vemos que la identidad se reduce a

$$\nabla \times \left[\mathbf{M} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \mathbf{M} \nabla \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9-13)$$

ya que $\nabla \cdot \mathbf{M}(x', y', z') = 0$, etc. Por tanto,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_I(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) \quad (9-14)$$

donde

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M} \nabla \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dv' \quad (9-14a)$$

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (9-14b)$$

Consideremos primero la integral más sencilla \mathbf{B}_I . Usando la ecuación (2-57) obtenemos

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (9-15)$$

Consideremos a continuación la integral \mathbf{B}_{II} . El integrando puede transformarse por medio de una segunda identidad (1.1.6), que se convierte en

$$\begin{aligned} \nabla \left[\mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] &= (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &+ \mathbf{M} \times \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \end{aligned} \quad (9-16)$$

El último término de (9-16) contiene

$$\nabla \times \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = -\nabla \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

que se anula idénticamente. En consecuencia,

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

que puede escribirse como en la ecuación (8-80),

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) \quad (9-17)$$

La cantidad $\varphi^*(\mathbf{r})$ es un campo escalar, el potencial escalar magnético debido al material magnético:

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (9-18)$$

Sumando las dos contribuciones, (9-15) y (9-17), encontramos para el campo de inducción magnética:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (9-19)$$

Por tanto, la inducción magnética debida a una distribución magnetizada de materia puede expresarse como la suma de dos términos: el gradiente de un campo escalar, más un término proporcional a la magnetización local. En un punto externo, es decir, en el vacío, \mathbf{M} es cero, y entonces la inducción magnética es exactamente el gradiente de un campo escalar que es la integral de los campos dipolares distantes dados por la ecuación (8-83).

9.3 POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO Y DENSIDAD DE POLOS MAGNÉTICOS

La expresión del potencial escalar magnético, ecuación (9-18), es de forma parecida a la del potencial electrostático que proviene de un material dieléctrico polarizado. Aquí nuevamente se sugiere la transformación matemática:

$$\frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{M} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{M} \quad (9-20)$$

de modo que la ecuación (9-18) se convierte en

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (9-21)$$

donde S_0 es la superficie de la región V_0 .

Por analogía con la sección 4.2, es conveniente definir dos cantidades escalares:

$$\rho_M(\mathbf{r}') \equiv -\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad (9-22)$$

llamada *densidad de polos magnéticos*, y

$$\sigma_M(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} \quad (9-23)$$

la *densidad superficial de la intensidad de polos magnéticos*.

Estas cantidades son muy útiles aunque algo artificiales. Desempeñan el mismo papel en la teoría del magnetismo que ρ_p y σ_p en la teoría de dieléctricos. Las unidades de ρ_M y σ_M son A/m^2 y A/m , respectivamente.

Consideremos, por ejemplo, un imán en forma de barra magnetizado uniformemente. Como la magnetización es uniforme, $\rho_M = 0$. Las únicas densidades superficiales que no se anulan están sobre las superficies que tienen una componente normal de magnetización y éstas se llaman *polos* del imán. Éste es un ejemplo algo idealizado, pero no demasiado distinto del imán en forma de barra que se usa en el laboratorio y que es familiar al lector. (En la práctica, los polos de un imán ejercen una influencia desmagnetizante que destruye la uniformidad de \mathbf{M} y extiende cada polo sobre una región algo mayor que la mera superficie.)

La intensidad total de polos de cada imán es cero. Este principio se deduce directamente del teorema de la divergencia:

$$\int_{V_0} (-\nabla \cdot \mathbf{M}) dv + \int_{S_0} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

Completaremos ahora la deducción que empezamos antes. La ecuación (9-18) se convierte en

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\rho_M dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\sigma_M da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9-18a)$$

y $\mathbf{B}(x, y, z)$ se obtiene como $-\mu_0$ por el gradiente con respecto a las coordenadas no primas, más el término $\mu_0 \mathbf{M}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \rho_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \sigma_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (9-19a)$$

Esta ecuación representa la contribución del material magnetizado en V_0 a la inducción magnética en (x, y, z) .

FUENTES DEL CAMPO MAGNÉTICO: INTENSIDAD MAGNÉTICA

En las secciones anteriores hemos visto cómo el material magnetizado produce un campo magnético. Además, en el capítulo 8 se trataron los efectos magnéticos de las corrientes convencionales. En el caso general, ambos tipos de fuentes magnéticas están presentes: las corrientes convencionales (o corrientes de transporte o verdaderas), que pueden medirse en el laboratorio, y las corrientes atómicas interiores a la materia. Es importante darse cuenta de que, en ciertas condiciones, la misma muestra de materia puede producir un campo magnético tanto porque está magnetizada como porque pasa por ella una corriente verdadera de portadores de carga. Así, por ejemplo, uno de nuestros mejores materiales magnéticos, el hierro, puede conducir una corriente verdadera por medio de sus electrones libres, pero los iones de hierro fijos en el cristal contienen corrientes atómicas que pueden orientarse para producir una magnetización intensa.

En general, la expresión del campo magnético puede escribirse como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \mu_0 \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (9-24)$$

donde

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_M da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9-25)$$

El volumen V se extiende sobre todas las regiones que transportan corriente y sobre toda la materia. La superficie S incluye todas las superficies y las zonas interfaciales entre los distintos medios. La densidad de corriente \mathbf{J} incluye sólo las corrientes convencionales del tipo de transporte de carga, mientras que el efecto de las corrientes atómicas se encuentra en el vector de magnetización \mathbf{M} (y potencial φ^*).

Con la ecuación (9-24) puede determinarse \mathbf{B} si \mathbf{M} y \mathbf{J} se especifican en todos los puntos. Sin embargo, en la mayoría de los problemas, \mathbf{J} se especifica, pero $\mathbf{M}(x', y', z')$ depende de $\mathbf{B}(x', y', z')$, de modo que, aunque la forma funcional de $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ sea conocida, la ecuación (9-24) proporciona, en el mejor de los casos, una ecuación integral para \mathbf{B} .

Para ayudar a vencer esta dificultad, introducimos un vector magnético auxiliar, la *intensidad magnética* \mathbf{H} , definida como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (9-26)$$

Combinando las ecuaciones (9-24) y (9-26) obtenemos

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) \quad (9-27)$$

Parece que no hemos ganado nada con esta operación, porque \mathbf{H} depende todavía de \mathbf{M} a través de ρ_M y σ_M ; pero en la siguiente sección demostraremos cómo se relaciona \mathbf{H} con la densidad de corriente convencional \mathbf{J} , mediante una ecuación diferencial. La situación es semejante al caso electrostático, en el que el vector auxiliar \mathbf{D} se relaciona con la densidad de carga a través de su divergencia.

El campo vectorial \mathbf{H} desempeña un importante papel en la teoría magnética, particularmente en problemas en los que intervienen imanes permanentes. Éstos se tratarán en las secciones posteriores de este capítulo. Las unidades de \mathbf{H} son las mismas que las de \mathbf{M} , es decir, A/m.

9.5 LAS ECUACIONES DE CAMPO

En el capítulo 8, las ecuaciones básicas que describen los efectos magnéticos de las corrientes se expresaron en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Nos gustaría ver ahora cómo se modifican estas ecuaciones cuando el campo magnético \mathbf{B} incluye la contribución de un material magnetizado.

Dijimos en la sección 8.3 que la ecuación de la divergencia ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) es válida para todos los campos magnéticos que son producidos por una distribución de corriente. Este resultado no se limita a los campos producidos por corrientes convencionales.

Vimos en la sección 9.2 que los campos magnéticos producidos por materia magnetizada pueden expresarse como el rotacional de un vector (\mathbf{A}) y, por lo tanto, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ se satisface automáticamente. Es un hecho experimental que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9-28)$$

para todos los campos de inducción magnética. Por lo tanto, \mathbf{B} siempre es originado por una distribución de corriente y no hay evidencia de polos magnéticos aislados.

La "ecuación del rotacional" es la forma diferencial de la ley de circuitos de Ampère. Aquí debemos tener cuidado en incluir todos los tipos de corriente que puedan producir un campo magnético. En consecuencia, en el caso general, esta ecuación se expresa adecuadamente como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \quad (9-29)$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente verdadera y \mathbf{J}_M es la densidad de corriente de magnetización. La ecuación (9-6b) puede combinarse con la ecuación (9-29) para dar

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}$$

que, según (9-26), es equivalente a la siguiente expresión:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (9-30)$$

Esto es, el vector magnético auxiliar \mathbf{H} está relacionado con la *densidad de corriente de transporte* a través de su rotacional. Esto se deduce también al obtener el rotacional de la ecuación (9-27). Las ecuaciones (9-28) y (9-30) son las ecuaciones fundamentales del campo magnético cuando hay materia presente. Estas ecuaciones, junto con las condiciones en la frontera adecuadas y una relación experimental entre \mathbf{B} y \mathbf{H} , son suficientes para resolver problemas magnéticos.

En algunos casos es preferible utilizar una formulación integral de la teoría. Con ayuda del teorema de Stokes, la ecuación (9-30) puede convertirse en

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da$$

o

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad (9-31)$$

En otras palabras, la integral de línea de la componente tangencial de la intensidad magnética alrededor de una trayectoria cerrada C es igual a toda la corriente de transporte que atraviesa el área limitada por la curva C .

Debido al teorema de la divergencia, la ecuación (9-28) es equivalente a

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad (9-32)$$

El flujo magnético que pasa por cualquier superficie cerrada es cero.

9.6 SUSCEPTIBILIDAD Y PERMEABILIDAD MAGNÉTICAS E HISTÉRESIS

Para resolver problemas en la teoría magnética es esencial tener una relación entre \mathbf{B} y \mathbf{H} o, análogamente, una relación entre \mathbf{M} y uno de los vectores del campo magnético. Estas relaciones dependen de la naturaleza del material magnético y se obtienen generalmente a partir de experimentos.

En una extensa clase de materiales existe una relación aproximadamente lineal entre \mathbf{M} y \mathbf{H} . Si el material es isótropo y también lineal,*

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (9-33)$$

donde la cantidad escalar adimensional χ_m se llama *susceptibilidad magnética*.

Si χ_m es positiva, el material se llama *paramagnético* y la inducción magnética se refuerza con la presencia del material. Si χ_m es negativa, el material es *diamagnético* y la inducción magnética se debilita con la presencia del material. Aunque χ_m es una función de la temperatura y a veces varía muy drásticamente con ella, generalmente puede decirse que, para materiales paramagnéticos y diamagnéticos, χ_m es bastante pequeña; es decir,

$$|\chi_m| \ll 1 \quad (\text{para materiales paramagnéticos y diamagnéticos}) \quad (9-34)$$

Las susceptibilidades de algunos materiales comunes se dan en la tabla 9.1.

En la mayoría de los manuales y tablas de datos físicos, χ_m no se da directamente, sino que se da como la *susceptibilidad de masa*, $\chi_{m,\text{masa}}$, o la *susceptibilidad molar*, $\chi_{m,\text{molar}}$. Éstas se definen como

$$\chi_m = \chi_{m,\text{masa}} d \quad (9-35)$$

$$\chi_m = \chi_{m,\text{molar}} \frac{d}{A} \quad (9-36)$$

* Si el material es anisótropo pero lineal, la ecuación (9-33) se sustituye por las relaciones tensoriales

$$M_x = \chi_{m,11} H_x + \chi_{m,12} H_y + \chi_{m,13} H_z$$

etc. En estas circunstancias, \mathbf{M} no tiene necesariamente el mismo sentido que \mathbf{H} . Nos limitaremos en este texto a los medios isótropos.

TABLA 9.1

Susceptibilidad magnética de algunos materiales paramagnéticos y diamagnéticos a temperatura ambiente.

Material	χ_m	$\chi_{m,masa}$ (m ³ /kg)
Aluminio	2.1×10^{-5}	0.77×10^{-8}
Bismuto	-16.4×10^{-5}	-1.68×10^{-8}
Cobre	-0.98×10^{-5}	-0.11×10^{-8}
Diamante	-2.2×10^{-5}	-0.62×10^{-8}
Cloruro de gadolinio (GdCl ₃)	603.0×10^{-5}	133.3×10^{-8}
Oro	-3.5×10^{-5}	-0.18×10^{-8}
Magnesio	1.2×10^{-5}	0.68×10^{-8}
Mercurio	-2.8×10^{-5}	-0.21×10^{-8}
Plata	-2.4×10^{-5}	-0.23×10^{-8}
Sodio	0.84×10^{-5}	0.87×10^{-8}
Titanio	18.0×10^{-5}	4.01×10^{-8}
Tungsteno	7.6×10^{-5}	0.40×10^{-8}
Bióxido de carbono (1 atm)	-1.19×10^{-8}	-0.60×10^{-8}
Hidrógeno (1 atm)	-0.22×10^{-8}	-2.48×10^{-8}
Nitrógeno (1 atm)	-0.67×10^{-8}	-0.54×10^{-8}
Oxígeno (1 atm)	193.5×10^{-8}	135.4×10^{-8}

Fuente: Datos obtenidos del *Handbook of Chemistry and Physics*, 70a. ed., Boca Raton, Florida, CRC Press, Inc., 1990. Prácticamente todas las fuentes de datos dan susceptibilidades magnéticas en unidades gaussianas (cgs); si se usa el supraíndice (1) para indicar la constante en el sistema gaussiano, entonces $\chi_m = 4\pi\chi_m^{(1)}$ y $\chi_{m,masa} = 4\pi \times 10^{-3}\chi_{m,masa}^{(1)}$.

donde d es la densidad de masa del material y A es el peso molecular. Como \mathbf{M} y \mathbf{H} tienen dimensiones de momento magnético por unidad de volumen, es evidente que $\chi_{m,masa} \mathbf{H}$ y $\chi_{m,molar} \mathbf{H}$ dan el momento magnético por unidad de masa y el momento magnético por mol, respectivamente. Por comodidad, la susceptibilidad de masa también se da en la tabla 9.1.

Una relación lineal entre \mathbf{M} y \mathbf{H} implica también una relación lineal entre \mathbf{B} y \mathbf{H} :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9-37)$$

donde la permeabilidad μ se obtiene de la combinación de las ecuaciones (9-26) y (9-33):

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (9-38)$$

La cantidad adimensional

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (9-39)$$

se tabula a veces en lugar de χ_m . Esta cantidad, K_m , se llama permeabilidad relativa.

Para los materiales paramagnéticos y diamagnéticos de la tabla 9.1, es evidente que K_m es muy próxima a la unidad.

Los *ferromagnéticos* forman otra clase de material magnético. Dicho material se caracteriza por una posible magnetización permanente y por el hecho de que su presencia tiene generalmente un efecto muy significativo sobre la inducción magnética. Los materiales ferromagnéticos *no* son lineales, de modo que las ecuaciones (9-33) y (9-37) con χ y μ constantes *no se aplican*.* Ha sido conveniente, sin embargo, utilizar la ecuación (9-37) como la ecuación que define a μ , es decir, con $\mu = \mu(\mathbf{H})$, pero debe advertirse al lector que esta práctica puede conducir a ciertas dificultades en algunas situaciones. Si la μ de un material ferromagnético se define mediante la ecuación (9-37), entonces, dependiendo del valor de \mathbf{H} , μ pasa por todo un intervalo de valores desde infinito hasta cero y puede ser positivo o negativo. La mejor sugerencia que puede darse es que se considere cada problema de ferromagnetismo por separado, que se trate de determinar qué región del diagrama de \mathbf{B} y \mathbf{H} es importante para el problema en particular, y que se hagan cálculos de aproximación apropiados para esta región. Las propiedades magnéticas de algunos materiales ferromagnéticos se listan en la tabla 9.2. (Estas cantidades identificadas por M_s , H_c , etc., serán definidas en los siguientes párrafos.)

Primero, consideremos una muestra desmagnetizada de material ferromagnético. Si la intensidad magnética, inicialmente cero, se aumenta *monótonicamente*, entonces la relación \mathbf{B} - \mathbf{H} describirá una curva parecida a la de la figura 9.5, que es la *curva de magnetización* del material. Es evidente que las μ tomadas de la curva de magnetización, utilizando la expresión $\mu = B/H$, tienen siempre el mismo signo (positivo), pero muestran un espectro de valores bastante grande. La permeabilidad máxima ocurre en el "codo" de la curva; en algunos materiales esta permeabilidad máxima llega a $10^5 \mu_0$, pero en otros es mucho menor. La razón de que se presente el codo en la curva es que la magnetización \mathbf{M} se aproxima a un valor máximo en el material, y

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

continúa aumentando para valores muy grandes de \mathbf{H} sólo por el término $\mu_0\mathbf{H}$. El valor máximo de \mathbf{M} se llama *magnetización de saturación* del material (véase la tabla 9.2).

Consideremos a continuación una muestra ferromagnética magnetizada por el procedimiento anterior. Si la intensidad magnética \mathbf{H} se reduce, la relación \mathbf{B} - \mathbf{H} no regresa descendiendo por la curva de la figura 9.5, sino que ahora se mueve sobre la nueva curva de la figura 9.6 hasta el punto r . La magnetización, una vez establecida, no desaparece con la eliminación de \mathbf{H} ; de hecho, se requiere una intensidad magnética invertida para reducir la magnetización a cero. Si \mathbf{H} continúa aumentando en el sentido contrario, entonces \mathbf{M} (y en consecuencia \mathbf{B}) se establecerá en el sentido contrario, y la figura 9.6 empieza a mostrar cierta simetría.

* Sin embargo, cierto tipo de hierro, llamado *hierro dulce*, puede tratarse como *aproximadamente* lineal.

TABLA 9.2
Propiedades de algunos
materiales
ferromagnéticos a
temperatura ambiente

Material	Composición (%)	$\mu_0 M_s$ (T)	H_s (A/m)	K_m (máxima)
Elementos				
Hierro (recocido)		2.15	1.6×10^5	5,500
Cobalto		1.79	7.0×10^5	
Níquel		0.61	5.5×10^5	
Aleaciones y compuestos				
			H_c (A/m)	
Hierro-silicio	96 Fe, 4 Si	1.97	56	8,000
Permalloy	55 Fe, 45 Ni	1.60	5.6	50,000
Mumetal	5 Cu, 2 Cr, 77 Ni, 16 Fe	0.75	1.2	100,000
Permendur	50 Co, 50 Fe	2.45	159	5,000
Ferrita de manganeso	Mn Fe ₂ O ₄	0.49		2,500
Ferrita de níquel	Ni Fe ₂ O ₄	0.32		2,500
B_r (T)				
Acero al cobalto	52 Fe, 36 Co, 4 W, 6 Cr, 0.8 C	0.97	19×10^3	
Alnico V	51 Fe, 8 Al, 14 Ni, 24 Co, 3 Cu	1.25	52×10^3	
Platino-cobalto	77 Pt, 23 Co	0.6	3.4×10^5	
Samario-cobalto	Sm Co	0.84	6.7×10^5	
Neodimio-hierro	13 Nd, 81 Fe, 6 B	0.80	1.2×10^6	

Nota: M_s = magnetización de saturación, H_s = intensidad magnética requerida para la saturación, H_c = coercitividad, B_r = remanencia.

Fuente: Datos tomados del *American Institute of Physics Handbook*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1972, y del *Handbook of Chemistry and Physics*, 70a. ed., Boca Raton, FL, CRC Press, Inc., 1990. Los datos del Nd-Fe-B se tomaron de J. J. Croat et al., *Journal of Applied Physics* 55, 2079, 1985.

FIGURA 9.5

Curva de magnetización y permeabilidad relativa del hierro comercial (recocido).

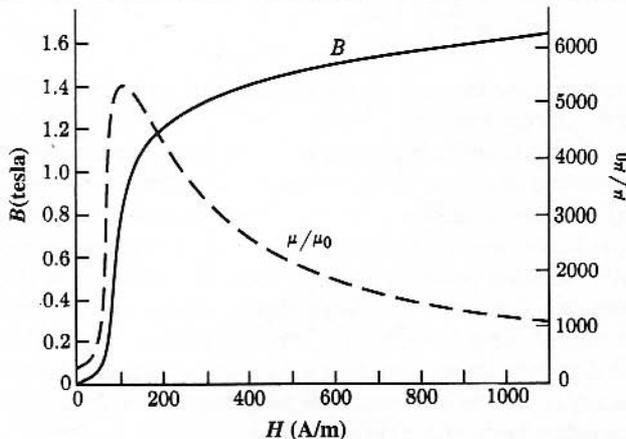
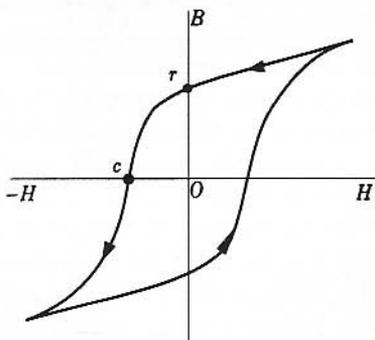


FIGURA 9.6

Curva de histéresis típica de un material ferromagnético.



Finalmente, cuando \mathbf{H} aumenta de nuevo, el punto de operación sigue la curva inferior de la figura 9.6. Por tanto, la curva $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ para \mathbf{H} creciente es completamente distinta de la de \mathbf{H} decreciente. Este fenómeno se llama *histéresis*, de la palabra griega *histeros*, que significa “quedar detrás”; la magnetización literalmente queda detrás del campo excitante.

La curva de la figura 9.6 se llama *curva de histéresis* del material. El valor de \mathbf{B} en el punto r se llama *retentividad* o *remanencia*; la magnitud de \mathbf{H} en el punto c se llama *fuerza coercitiva* o *coercitividad* del material. De la figura 9.6 se deduce que el valor de μ , definido por la ecuación (9-37), es negativo en el segundo y cuarto cuadrantes del diagrama. La forma de la curva de histéresis no sólo depende de la naturaleza del material ferromagnético (Fig. 9.7), sino también del valor máximo de \mathbf{H} al cual está sometido el material (Fig. 9.8). Sin embargo, una vez que $\mathbf{H}_{\text{máx}}$ es suficiente para producir la saturación en el material, la curva de histéresis no cambia su forma al aumentar $\mathbf{H}_{\text{máx}}$. Para el hierro dulce, la histéresis es relativamente pequeña.

Para ciertas aplicaciones es deseable conocer la permeabilidad efectiva de un material en un pequeño campo H alternante superpuesto sobre un gran campo constante. Por tanto, si ΔB es el cambio en el campo magnético producido por un cambio ΔH en la intensidad magnética, la *permeabilidad incremental* μ_{in} se define como

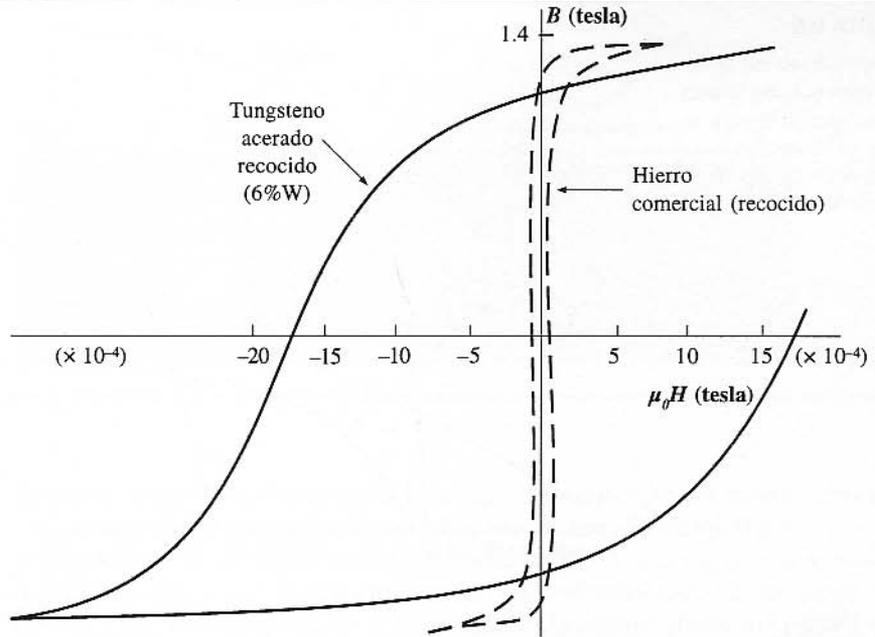
$$\mu_{\text{in}} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (9-40)$$

y es aproximadamente igual a la pendiente de la curva de histéresis que pasa por el punto en cuestión.

Los materiales ferromagnéticos se usan (1) para aumentar el flujo magnético de un circuito de corriente o (2) como fuentes del campo magnético (imanes permanentes). Cuando se utiliza como un imán permanente, el material se magnetiza primero hasta la saturación colocándolo en un campo magnético intenso (es decir, poniéndolo entre los polos de un electroimán o en un solenoide por el que circula momentáneamente una gran corriente). Sin embargo, cuando el imán permanente se quita del campo externo, estará sujeto en general a un campo desmagnetizante; esto se expone con detalle en las secciones 9.8 y 9.11. Por esta razón, el segundo cuadrante del diagrama de la curva de histéresis es la parte importante de la relación $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ para un material magnético permanente (Fig. 9.9).

FIGURA 9.7

Comparación de las curvas de histéresis de varios materiales. (Observe que el eje de abscisa corresponde a $\mu_0 H$ en lugar de sólo H . $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$.)
 Datos de R. M. Bozorth, *Ferromagnetism*, Van Nostrand, Nueva York, 1951.

**FIGURA 9.8**

Curva de histéresis principal y varias más secundarias para un material típico.

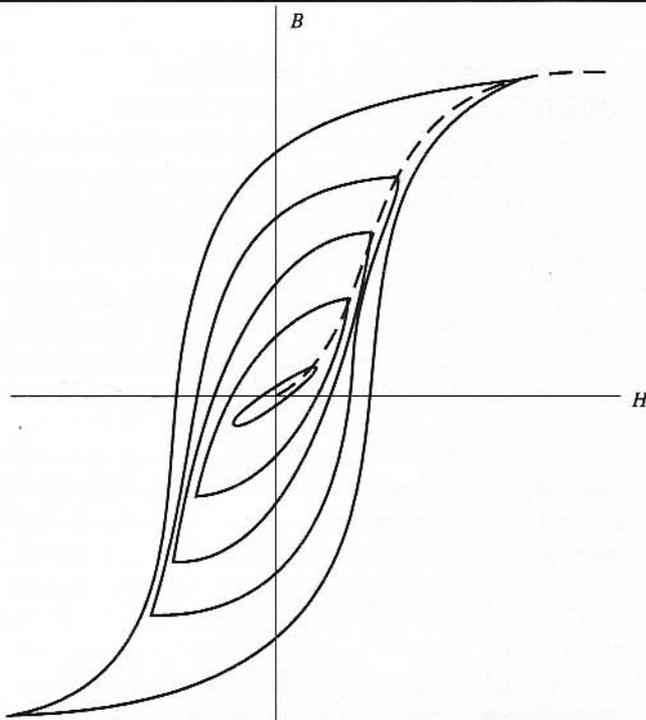
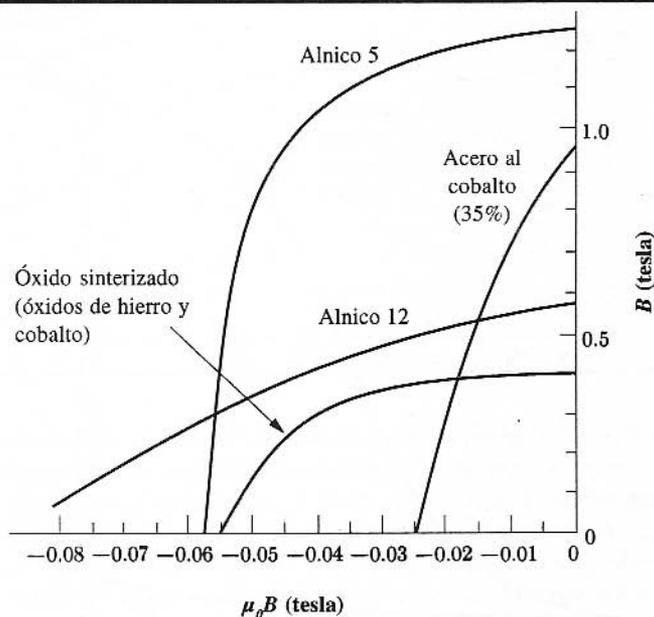


FIGURA 9.9

Curvas de histéresis de materiales que son imanes permanentes. (Observe que el eje de abscisa corresponde a $\mu_0 H$, en lugar de sólo H .)



9.7

CONDICIONES EN LA FRONTERA SOBRE LOS VECTORES DE CAMPO

Antes de que podamos resolver problemas magnéticos, aun los más sencillos, debemos saber cómo cambian los vectores de campo \mathbf{B} y \mathbf{H} al pasar por una zona interfacial entre dos medios. La zona interfacial que se va a considerar puede estar entre dos medios con diferentes propiedades magnéticas o entre un medio material y el vacío.

Consideremos dos medios, 1 y 2, en contacto, como se indica en la figura 9.10. Construyamos la pequeña caja de superficie S que corta la zona interfacial, siendo la altura de la caja despreciablemente pequeña en comparación con el diámetro de las bases. Aplicando la integral de flujo, ecuación (9-32), a la superficie S , encontramos que

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = 0$$

donde \mathbf{n}_2 y \mathbf{n}_1 son los vectores normales dirigidos hacia afuera de las superficies superior e inferior de la caja. Ya que $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, y como cada una de estas normales puede servir como normal a la zona interfacial

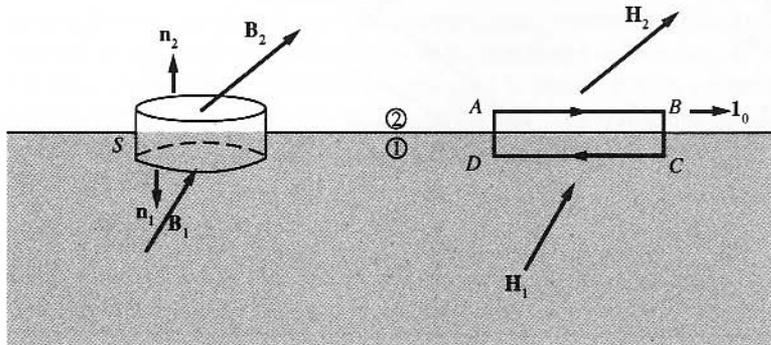
$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (9-41a)$$

o

$$\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0 \quad (9-41b)$$

FIGURA 9.10

Las condiciones en la frontera sobre los vectores de campo en una zona interfacial entre dos medios pueden obtenerse aplicando la ley de Gauss a S , e integrando $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de la trayectoria $ABCD$.



Por tanto, la componente normal de \mathbf{B} es continua a través de una zona interfacial.

Una condición en la frontera (condición de contorno) del campo \mathbf{H} puede obtenerse aplicando la ley de circuitos de Ampère, ecuación (9-31), a la trayectoria rectangular $ABCD$ de la figura 9.10. En esta trayectoria, las longitudes AB y CD se considerarán iguales a Δl y los segmentos AD y BC se supondrán despreciablemente pequeños. La corriente que pasa a través del rectángulo es despreciable a menos que haya una corriente superficial verdadera. Por tanto,

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l}_0 = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) = \mathbf{j} \times \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{l}_0$$

o

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = \mathbf{j} \times \mathbf{n}_2 \quad (9-42a)$$

donde \mathbf{j} es la densidad de corriente *superficial* (corriente de transporte verdadera por unidad de longitud en la capa superficial) y \mathbf{l}_0 es un vector unitario en la dirección de Δl . Por tanto, la componente tangencial de la intensidad magnética es continua al atravesar la zona interfacial, a menos que haya una corriente superficial verdadera. Finalmente, multiplicando vectorialmente la ecuación (9-42a) por \mathbf{n}_2 , la ecuación puede escribirse como

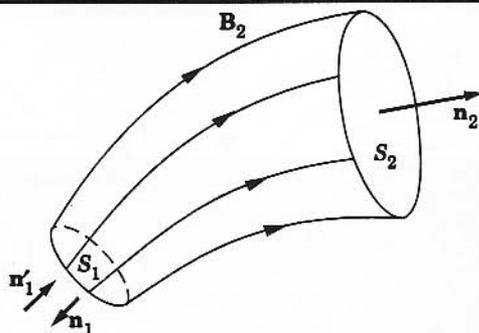
$$\mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j} \quad (9-42b)$$

Esta forma es conveniente para determinar \mathbf{j} si se conocen \mathbf{H}_2 y \mathbf{H}_1 .

Antes de terminar esta sección demostraremos otra propiedad importante de la inducción magnética \mathbf{B} , a saber, que su flujo es continuo en todo punto. Centremos nuestra atención en una región del espacio y construyamos *líneas de campo magnético*, que son líneas imaginarias trazadas de tal manera que la dirección de una línea en cualquier punto sea la dirección y el sentido de \mathbf{B} en dicho punto. A continuación imaginemos un tubo de flujo, un volumen acotado en sus lados por líneas de \mathbf{B} , pero que no lo cortan (Fig. 9.11). El tubo está limitado en los extremos por las superficies S_1 y S_2 . Aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos

FIGURA 9.11

Tubo de inducción magnética.



$$\begin{aligned}
 \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv &= 0 \\
 &= \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}' \, da \\
 &= \Phi(S_2) - \Phi(S_1)
 \end{aligned} \tag{9-43}$$

Así, el mismo flujo magnético que entra en el tubo por la superficie S_1 sale por S_2 . Las líneas de flujo nunca pueden terminar, y finalmente deben llegar a su punto inicial, formando curvas cerradas.

Los enunciados anteriores se aplican, por supuesto, al campo \mathbf{B} ; tal vez convenga indicar que no se aplican al campo \mathbf{H} , ya que $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$, que no es igual a cero en todos los puntos. Así, del teorema de la divergencia aplicado a un tubo de intensidad magnética, vemos que

$$\int_{S_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{S_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}' \, da = \int_V \rho_M \, dv \tag{9-44}$$

La discontinuidad del flujo de intensidad magnética está determinada por la intensidad total de polos magnéticos existente dentro del tubo de flujo.

9.8

PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA EN LOS QUE INTERVIENEN MATERIALES MAGNÉTICOS

Como \mathbf{B} y \mathbf{H} obedecen condiciones de frontera semejantes a las de \mathbf{D} y \mathbf{E} , los problemas de medios lineales o de magnetización específica son semejantes a los problemas de dieléctricos que se estudiaron en el capítulo 4. En esta sección trataremos un tipo particular de problemas, a saber, el cálculo de campos magnéticos en materiales magnéticos en los que no existe corriente de transporte. Esto es formalmente idéntico al dieléctrico con densidad de carga externa igual a cero.

Cuando $\mathbf{J}=0$, las ecuaciones magnéticas fundamentales (9-28) y (9-30) se reducen a

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{9-28}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \tag{9-45}$$

La ecuación (9-45) implica que \mathbf{H} puede obtenerse como el gradiente de un campo escalar. Esto no debe sorprendernos porque, según la ecuación base (9-27), la contribución a \mathbf{H} del material magnético ya se ha expresado de esta forma, y en la sección 8.8 demostramos que el campo (en realidad la demostración presentada allí debe generalizarse al campo \mathbf{H}) producido por corrientes de transporte puede también deducirse cuando la densidad de corriente local es cero. De acuerdo con la ecuación (9-45), escribimos

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi^* \quad (9-46)$$

donde φ^* es ahora el potencial escalar magnético debido a todas las fuentes.

Hay dos tipos de material magnético para los que el cálculo del campo magnético se reduce a un problema sencillo de valores en la frontera: (1) material magnético *lineal* o aproximadamente lineal, para el que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, y (2) una muestra *uniformemente* magnetizada de material para el cual $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$. En ambos casos, la ecuación (9-28) se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (9-47)$$

Combinando este resultado con la ecuación (9-46), obtenemos

$$\nabla^2\varphi^* = 0 \quad (9-48)$$

que es la ecuación de Laplace. Por tanto, el problema magnético se reduce a encontrar una solución de la ecuación de Laplace que satisfaga las condiciones en la frontera. \mathbf{H} puede calcularse entonces como menos el gradiente del potencial magnético, y \mathbf{B} puede obtenerse de

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

o

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

según la expresión que sea más adecuada.

Dos problemas magnéticos sirven para ilustrar la utilidad del método que se acaba de describir; ejercicios adicionales de este tipo se encontrarán entre los problemas al final del capítulo.

EJEMPLO 9.1
Esfera magnéticamente permeable en un campo magnético uniforme

Considere una esfera de material magnético lineal de radio a y permeabilidad μ , colocada en una región del espacio que contiene un campo magnético *inicialmente* uniforme, \mathbf{B}_0 . Nos gustaría determinar cómo se modifica el campo magnético por la presencia de la esfera y, en particular, determinar el campo magnético en la esfera misma.

Solución: El problema es análogo al caso de la esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme que se resolvió en la sección 4.9. Así, eligiendo el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de la esfera y la dirección de

B_0 como la dirección polar (dirección z), podemos expresar el potencial como una suma de armónicos esféricos. De nuevo, todas las condiciones en la frontera pueden satisfacerse por medio de los armónicos de $\cos \theta$:

$$\varphi_1^*(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad (9-49)$$

para la región de vacío (1) fuera de la esfera, y

$$\varphi_2^*(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad (9-50)$$

para la región del material magnético (2). Las constantes A_1 , A_2 , C_1 y C_2 deben determinarse a partir de las condiciones en la frontera.

A grandes distancias de la esfera, el campo magnético conserva su carácter uniforme: $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$ y $\varphi_1^* \rightarrow -(B_0/\mu_0)r \cos \theta$. En consecuencia, $A_1 = -(B_0/\mu_0)$. Como φ_2^* y su campo magnético asociado no pueden hacerse infinitos en ningún punto, el coeficiente C_2 debe igualarse a cero. Habiendo aplicado las condiciones en la frontera para $r = \infty$ y $r = 0$, volvemos nuestra atención a la zona interfacial en $r = a$:

$$H_{1\theta} = H_{2\theta}, \quad B_{1r} = B_{2r}$$

o

$$-\left(\frac{B_0}{\mu_0}\right) \sin \theta + \frac{C_1}{a^3} \sin \theta = A_2 \sin \theta \quad (9-51)$$

$$B_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{C_1}{a^3} \cos \theta = -\mu A_2 \cos \theta \quad (9-52)$$

Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneamente se tiene

$$A_2 = -\frac{3B_0}{(\mu + 2\mu_0)},$$

y

$$C_1 = [(\mu/\mu_0) - 1] \frac{B_0 a^3}{(\mu + 2\mu_0)}$$

de donde los campos magnéticos en el interior y en el exterior de la esfera están dados por

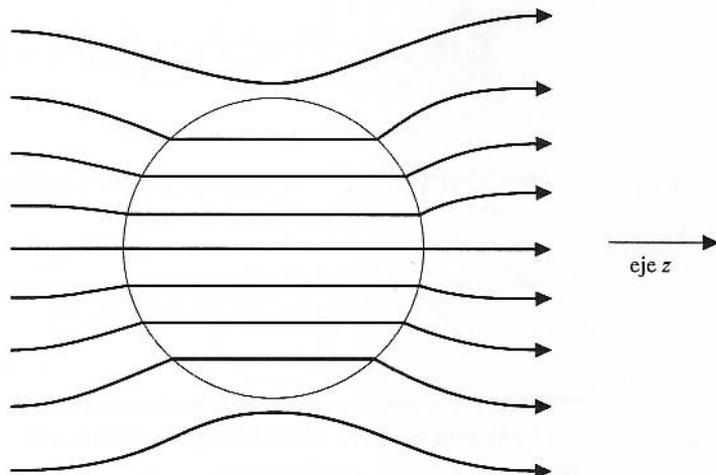
$$\mathbf{B}_2 = \frac{3B_0 \mathbf{k}}{1 + 2(\mu_0/\mu)} \quad (9-53)$$

y

$$\mathbf{B}_1 = B_0 \mathbf{k} + \left[\frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2} \right] \left(\frac{a}{r} \right)^3 B_0 (2\mathbf{a}_r \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta) \quad (9-54)$$

FIGURA 9.12

Líneas de inducción magnética \mathbf{B} en la vecindad de una esfera de permeabilidad grande μ .



Las líneas de inducción magnética se muestran en la figura 9.12. El segundo ejemplo trata de un imán permanente.

EJEMPLO 9.2

Campo de una esfera uniformemente magnetizada

El problema es determinar el campo magnético producido por una esfera magnetizada uniformemente, de magnetización \mathbf{M} y radio a , cuando no están presentes otros campos magnéticos.

Solución: Tomando la magnetización sobre el eje z y el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de la esfera, podemos desarrollar el potencial en armónicos esféricos:

$$\varphi_1^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad (9-55)$$

para la región de vacío (1) fuera de la esfera, y

$$\varphi_2^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} r^n P_n(\theta) \quad (9-56)$$

para la región del imán permanente (2). En el desarrollo (9-55) hemos excluido a propósito los armónicos con potencias positivas de r , puesto que éstas tendrían un valor muy grande para grandes distancias, y hemos excluido también las potencias negativas de r en la ecuación (9-56), puesto que serían infinitas en el origen. De las condiciones en la frontera para $r = a$:

$$H_{1\theta} = H_{2\theta}$$

$$B_{1r} = B_{2r}$$

obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1,n}a^{-(n+1)} - A_{2,n}a^n)a^{-1} \frac{d}{d\theta} P_n(\theta) = 0 \quad (9-57)$$

o

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1,n}a^{-(n+1)} - A_{2,n}a^n)P_n(\theta) = \text{constante} \quad (9-57a)$$

y

$$\begin{aligned} \mu_0 C_{1,0}a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\theta)[C_{1,n}(n+1)a^{-(n+2)} + A_{2,n}na^{n-1}] \\ - \mu_0 M \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (9-58)$$

Como $P_n(\theta)$ son funciones ortogonales, cada término de las ecuaciones (9-57a) y (9-58) debe anularse individualmente. Para $n=0$

$$C_{1,0}a^{-1} - A_{2,0} = \text{constante}, \quad \mu_0 C_{1,0}a^{-2} = 0$$

Por tanto, $C_{1,0} = 0$ y $A_{2,0}$ es una constante arbitraria que puede igualarse a 0 sin afectar a \mathbf{H} o \mathbf{B} .

De los términos $n=1$,

$$C_{1,1}a^{-3} - A_{2,1} = 0$$

y

$$2C_{1,1}a^{-3} + A_{2,1} - M = 0$$

que pueden resolverse simultáneamente para dar

$$C_{1,1} = \frac{1}{3}Ma^3$$

y

$$A_{2,1} = \frac{1}{3}M$$

Para todo $n \geq 2$, las únicas $C_{1,n}$ y $A_{2,n}$ compatibles con las dos ecuaciones son $C_{1,n} = 0$ y $A_{2,n} = 0$.

Poniendo estos resultados nuevamente en las ecuaciones (9-55) y (9-56), obtenemos

$$\varphi_1^*(r, \theta) = \frac{1}{3}M(a^3/r^2) \cos \theta \quad (9-59)$$

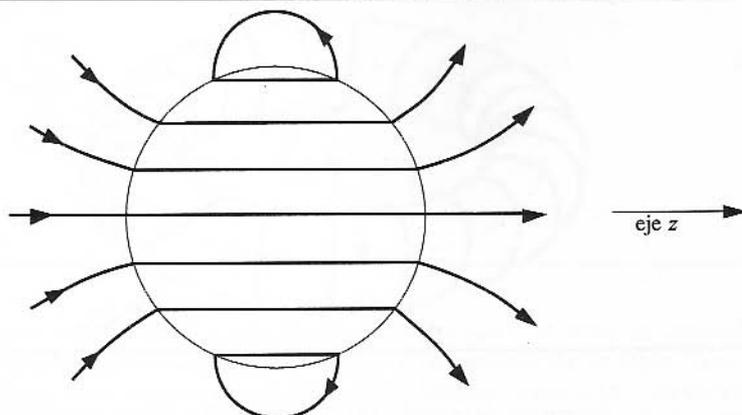
y

$$\varphi_2^*(r, \theta) = \frac{1}{3}Mr \cos \theta \quad (9-60)$$

La intensidad magnética \mathbf{H} puede calcularse de la operación gradiente, con el siguiente resultado:

FIGURA 9.13

Líneas de inducción magnética para una esfera uniformemente magnetizada.



$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{3}M(a^3/r^3)[2\mathbf{a}_r \cos\theta + \mathbf{a}_\theta \sin\theta] \quad (9-61)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3}M\mathbf{k} \quad (9-62)$$

Por tanto, el campo externo de la esfera uniformemente magnetizada es exactamente un campo dipolar que proviene del momento dipolar $\frac{4}{3}\pi a^3 M$. La intensidad magnética *dentro* de la esfera es un campo desmagnetizante, resultado que concuerda con el campo E en el interior de un dieléctrico uniformemente polarizado. Por tanto, vemos que la esfera magnetizada está sometida a su propio campo desmagnetizante. El factor $\frac{1}{3} = (1/4\pi)(4\pi/3)$ de la ecuación (9-62) depende explícitamente de la geometría esférica. La cantidad $4\pi/3$ se llama *factor de desmagnetización* de una esfera. Los factores de desmagnetización para otras formas geométricas han sido calculados y tabulados.*

El campo magnético externo \mathbf{B}_1 es exactamente μ_0 veces la ecuación (9-61). La inducción magnética en la esfera es

$$\mathbf{B}_2 = \frac{2}{3}\mu_0 M\mathbf{k} = \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M} \quad (9-63)$$

Las líneas de inducción magnética se muestran en la figura 9.13.

9.9

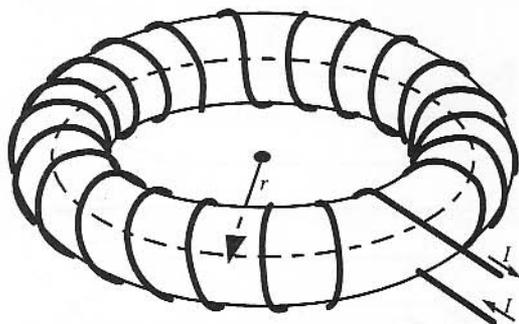
CIRCUITOS DE CORRIENTE QUE CONTIENEN MEDIOS MAGNÉTICOS

En el capítulo 8 estudiamos los campos magnéticos producidos por circuitos de corriente *en el vacío*. Uno de los ejemplos considerados en los problemas (problema 8.19) fue el de un devanado uniforme toroidal con N vueltas, que conduce una

* Véase, por ejemplo, *American Institute of Physics Handbook*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1972, págs. 5-247.

FIGURA 9.14

Devanado toroidal.



corriente de intensidad I (Fig. 9.14). Resolvamos nuevamente el problema del toroide, pero ahora con la región interior del devanado llena de un material ferromagnético que supondremos homogéneo, isótropo y originalmente desmagnetizado. El campo vectorial que se obtiene más fácilmente es la intensidad magnética, ya que está relacionado con la intensidad de corriente en el devanado por medio de la ley de circuitos de Ampère, ecuación (9-31). Si aplicamos la ecuación (9-31) a una trayectoria circular que es coaxial con el hueco del toroide, tal como la trayectoria punteada en la figura, los argumentos de simetría nos indican que \mathbf{H} es igual en todos los puntos de la trayectoria:

$$H_t l = NI$$

o

$$H_t = \frac{NI}{l} \quad (9-64)$$

Aquí, el subíndice representa la componente tangencial a la trayectoria, y $l = 2\pi r$ es la longitud total de la trayectoria. De la ecuación (9-26),

$$B_t = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M_t \quad (9-65)$$

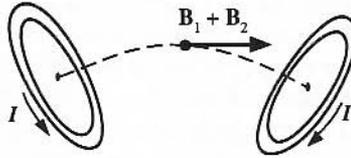
Así, el campo magnético difiere del caso en el vacío en el término aditivo $\mu_0 M_t$.

Mediante el procedimiento anterior sólo se obtiene la componente tangencial de \mathbf{B} (y de \mathbf{H}); sin embargo, ésta es la única componente que esperamos que esté presente. Según la ecuación (9-27), hay dos clases de fuentes para la intensidad magnética: las corrientes de transporte y el material magnetizado. Es fácil demostrar que la corriente en el devanado toroidal produce sólo un campo tangencial. Este devanado es equivalente a N espiras circulares de corriente; si las combinamos por pares (Fig. 9.15), es evidente que cada par de espiras produce un campo tangencial en el punto en cuestión.

La segunda fuente de \mathbf{H} , el material magnetizado en sí mismo, puede proporcionar posiblemente una contribución a través de las densidades de polos: $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ y $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$. Como el material ferromagnético del toroide es isótropo, \mathbf{M} tendrá el mismo sentido que \mathbf{H} . Pero \mathbf{M} se generó como respuesta a las corrientes en el

FIGURA 9.15

Naturaleza axial del campo en un devanado toroidal, demostrada mediante la combinación de los campos magnéticos debidos a pares de espiras de corriente.



devanado toroidal y este campo es tangencial. Por tanto, es probable que haya una sola M_r , por lo que podemos eliminar el subíndice t . Basándonos en esto, no hay superficies en la muestra toroidal que sean perpendiculares a \mathbf{M} y, en consecuencia, no hay σ_M . Finalmente, ρ_M debe ser igual a cero; aunque M pueda ser función de r (la distancia al eje del toroide), el término $\partial M/\partial r$ no contribuye a la $\nabla \cdot \mathbf{M}$. El resultado de interés es que el material magnetizado no contribuye a \mathbf{H} en este caso y la ecuación (9-65) da todo el campo magnético.

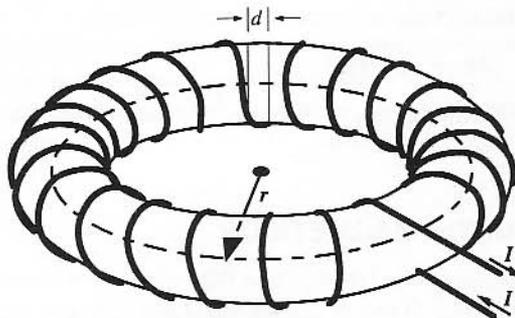
Otro problema, algo más complicado que el anterior, es el de un devanado toroidal de N vueltas sobre una muestra ferromagnética en la que se ha dejado un entrehierro lleno de aire, de anchura d (Fig. 9.16). No haremos distinción entre un entrehierro lleno de aire y uno de vacío, puesto que es evidente de la tabla 9.1 que la permeabilidad del aire difiere sólo muy ligeramente de μ_0 . En este problema, la ley de circuitos de Ampère no es suficiente para determinar \mathbf{H} porque los argumentos de simetría no pueden considerarse para decir que \mathbf{H} es igual en todos los puntos de una trayectoria circular. Por tanto, vayamos primero a la ecuación base, (9-27).

Nuevamente, observamos que hay dos contribuciones a la intensidad magnética, una de las corrientes de transporte y otra de la magnetización. Como el devanado toroidal es idéntico al del problema anterior, la contribución de las corrientes de transporte a \mathbf{H} debe ser igual que antes. Representando esta contribución con el subíndice 1, podemos escribir

$$H_1 = \frac{NI}{l} \quad (9-66)$$

FIGURA 9.16

Devanado toroidal sobre un anillo de material magnético con un entrehierro lleno de aire.



Nuestro problema es calcular H_2 o el término $\nabla\phi^*$. Para conservar la sencillez del problema, consideraremos válida la suposición de que se tiene una magnetización uniforme tangencial M en todo el material ferromagnético; esto nos proporcionará toda la física esencial sin complicar el álgebra. Entonces, ρ_M es igual a cero, pero $\sigma_M = \pm M$ en las caras de los polos que limitan con el entrehierro lleno de aire. La situación nos recuerda mucho la del problema electrostático en el que interviene un condensador cargado de placas paralelas. De hecho, la formulación matemática del potencial es idéntica en los dos casos. Si el entrehierro lleno de aire es extremadamente angosto, entonces, aproximadamente,

$$\begin{aligned} H_2 &= M && \text{(en el entrehierro)} \\ H_2 &= 0 && \text{(en cualquier otro sitio)} \end{aligned} \quad (9-67)$$

Sin embargo, este resultado no es compatible con la ley de circuitos de Ampère, puesto que

$$\oint H dl = \oint (H_1 + H_2) dl = NI + Md \neq NI$$

a menos que d sea despreciablemente pequeña. Para un entrehierro angosto lleno de aire, pero no despreciablemente pequeño, una mejor aproximación es

$$\begin{aligned} H_2 &= M\left(1 - \frac{d}{l}\right) && \text{(en el entrehierro)} \\ H_2 &= -M\frac{d}{l} && \text{(en el material),} \end{aligned} \quad (9-68)$$

lo que no sólo satisface la ley de circuitos de Ampère, sino que también tiene en cuenta la continuidad de la componente normal de \mathbf{B} a través de las caras de los polos.

Combinando las ecuaciones (9-66) y (9-68) y sustituyendo el resultado en la ecuación (9-26):

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

encontramos que

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M\left(1 - \frac{d}{l}\right) \quad (9-69)$$

tanto en el entrehierro como en el material magnético. Para resolver completamente el problema, sólo tenemos que conocer la relación

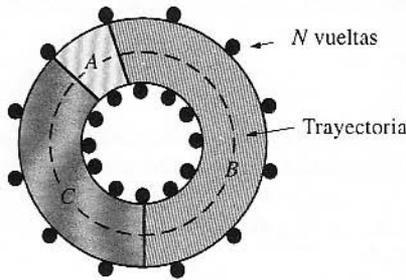
$$M = \chi_m(H)H$$

Para el "hierro dulce", χ_m puede considerarse constante.

*9.10 CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Como hemos visto, las líneas de flujo magnético forman curvas cerradas. Si todo el flujo magnético (o prácticamente todo) asociado con una determinada distribución de corrientes está confinado a una trayectoria bastante bien definida, entonces podemos

FIGURA 9.17
Circuito magnético.



hablar de un *circuito magnético*. Por tanto, los ejemplos expuestos en la sección 9.9 son circuitos magnéticos, puesto que el flujo magnético se confina a una región interior al devanado toroidal. En el primer ejemplo, el circuito consistió en un solo material, un anillo ferromagnético; en el segundo caso, sin embargo, encontramos un circuito con dos materiales en serie: un material ferromagnético y un entrehierro lleno de aire.

Consideremos un circuito en serie más general, con varios materiales rodeados por un devanado toroidal de N vueltas que conduce una corriente de intensidad I , como el de la figura 9.17. De la aplicación de la ley de circuitos de Ampère a una trayectoria que sigue el circuito (la línea punteada de la figura), obtenemos

$$\oint H dl = NI$$

Conviene expresar H en cada punto de la trayectoria en función del flujo magnético Φ ; empleando $B = \mu H$ y $\Phi = BA$, donde A es el área de la sección transversal del circuito en el punto en consideración, vemos que

$$\oint \frac{\Phi dl}{\mu A} = NI$$

Como estamos estudiando un circuito magnético, esperamos que Φ sea esencialmente constante en todos los puntos del circuito; en consecuencia, podemos sacar Φ fuera de la integral:

$$\Phi \oint \frac{dl}{\mu A} = NI \tag{9-70}$$

Ésta es la ecuación básica del circuito magnético que nos permite obtener el flujo Φ en función de los parámetros del circuito.

La ecuación (9-70) nos recuerda una ecuación semejante para un circuito de corriente en serie: $IR = \mathcal{V}$. Por analogía, definimos una fuerza magnetomotriz (fmm):

$$\text{fmm} = NI \tag{9-71}$$

y la reluctancia \mathcal{R} ,

$$\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu A} \tag{9-72}$$

$\Phi \Rightarrow I$
 $\mathcal{R} \Rightarrow \int \frac{dl}{\mu A} = \mathcal{R}$
 $\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V}$

$$\Phi \mathcal{R} = \mathcal{M}$$

Utilizando estas definiciones, podemos volver a escribir la ecuación (9-70) como

$$\Phi = \frac{\text{fmm}}{\mathcal{R}} \quad (9-70a)$$

Si el circuito está formado por varias partes homogéneas, cada una de sección transversal uniforme, la reluctancia puede calcularse aproximadamente mediante

$$\mathcal{R} = \sum_j \frac{l_j}{\mu_j A_j} = \sum_j \mathcal{R}_j \quad (9-72a)$$

En consecuencia, la reluctancia total del circuito en serie es la suma de las reluctancias de los elementos individuales. La analogía entre los circuitos magnéticos y los de corriente es aún mayor de lo que se ha indicado, puesto que la resistencia de un circuito de corriente está dada por

$$R = \oint \frac{dl}{gA}$$

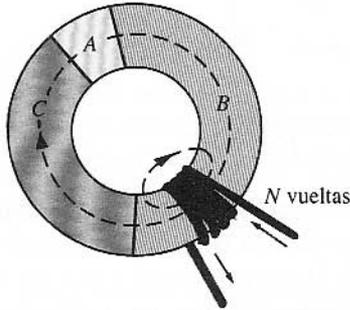
que difiere de la ecuación (9-72) sólo en la sustitución de g por μ . Debido a esta analogía, es evidente que las combinaciones de reluctancias en serie y en paralelo pueden combinarse de la misma forma que las combinaciones de resistencias en serie y en paralelo.

El concepto de circuito magnético es más útil cuando se aplica a circuitos que contienen materiales ferromagnéticos, pero precisamente para estos materiales surgen algunas dificultades. Para un material ferromagnético, $\mu = \mu(H)$, y no conocemos H en el material hasta que el problema del circuito está completamente resuelto y Φ determinado. Sin embargo, la situación no es irremediable; de hecho, el problema puede resolverse con bastante facilidad mediante un procedimiento iterativo: (1) Como primera aproximación, podemos considerar $H = NI/l_{\text{total}}$, donde l_{total} es la longitud total del circuito. (2) La permeabilidad de cada material del circuito se obtiene para este valor de H a partir de la curva de magnetización adecuada. (3) Se calcula la reluctancia total del circuito, y (4) el flujo Φ se calcula de la ecuación (9-70a). (5) A partir de Φ , se hallan las intensidades magnéticas en los diversos elementos y se vuelven a determinar las permeabilidades. (6) El procedimiento se repite a partir del apartado (3). Generalmente, son suficientes una o dos iteraciones para determinar Φ con un porcentaje de error muy pequeño.

La reluctancia \mathcal{R}_j es inversamente proporcional a la permeabilidad μ_j . Como la permeabilidad del material ferromagnético puede ser 100 veces μ_0 , $10^3 \mu_0$ o incluso $10^5 \mu_0$ en algunos casos, es evidente que el material ferromagnético forma una trayectoria de baja reluctancia para el flujo magnético. Si el flujo magnético encuentra dos trayectorias paralelas, una de alta reluctancia \mathcal{R}_h , y otra de baja reluctancia \mathcal{R}_l , entonces la mayor parte del flujo pasará por la trayectoria de baja reluctancia y la reluctancia equivalente de la combinación está dada por $\mathcal{R} = \mathcal{R}_h \mathcal{R}_l / (\mathcal{R}_h + \mathcal{R}_l)$. Observando ahora la figura 9.18, vemos que si los materiales A , B , y C son ferromagnéticos, la mayor parte del flujo seguirá el anillo ferromagnético, porque la trayectoria por el aire entre los extremos del solenoide tiene una reluctancia relativamente alta. Así, los circuitos magnéticos de las figuras 9.17 y 9.18 son esencialmente equivalentes.

FIGURA 9.18

Este circuito magnético es equivalente al de la figura 9.17 si las permeabilidades de A , B , y C son grandes.



Si los materiales B y C son ferromagnéticos, pero A representa un entrehierro lleno de aire, los circuitos no son equivalentes porque hay una *fuga* de flujo en los extremos del solenoide de la figura 9.18. La cantidad de flujo que sale del circuito depende de la razón de la reluctancia del circuito magnético a la trayectoria de fuga. Cuando el entrehierro lleno de aire A es pequeño comparado con la longitud del solenoide, el flujo de fuga es pequeño y en cálculos aproximados puede despreciarse. La reluctancia de la trayectoria de fuga se ha determinado para muchas formas geométricas comunes y se puede encontrar en varios manuales de consulta convencionales.* El concepto de circuito es seguramente una aproximación más burda en el caso magnético que en el eléctrico, porque (1) la razón entre la reluctancia del circuito y la reluctancia de fuga no es tan pequeña como la razón entre las resistencias correspondientes del caso eléctrico, y (2) las dimensiones laterales del circuito magnético no son generalmente despreciables en comparación con su longitud. Sin embargo, se ha probado que el concepto de circuito magnético es extremadamente útil.

***9.11**

CIRCUITOS MAGNÉTICOS QUE CONTIENEN IMANES PERMANENTES

El concepto de circuito magnético es útil también cuando se aplica a circuitos con imanes permanentes, es decir, a circuitos de flujo en los que Φ tiene su origen en un material permanentemente magnetizado. Veremos que es conveniente usar la abreviatura I-P para el imán permanente. Debido a la relación complicada $B-H$ en el material I-P, el procedimiento descrito en la sección anterior no es adecuado para el problema que tenemos ahora. Por esto, volveremos nuevamente a la ley de circuitos de Ampère, aplicada ahora a la trayectoria de flujo del circuito I-P:

* Véase, por ejemplo, S. A. Nasar y L. E. Unnewehr, *Electromechanics and Rotating Electric Machines*, Nueva York, Wiley, 1978, y F. N. Bradley, *Materials for Magnetic Functions*, Nueva York, Hayden Book Co., 1971, pág. 162.

$$\oint H dl = 0$$

o

$$\int_a^b H dl = - \int_{b(a-p)}^a H dl \quad (9-73)$$

Al escribir la ecuación (9-73) suponemos explícitamente que el material I-P está entre los puntos b y a de la trayectoria del flujo, mientras que de a a b la trayectoria del flujo no encuentra material I-P. El uso de $B = \mu H$ y $\Phi = BA$ en el primer miembro de la ecuación (9-73) da

$$\Phi \int_a^b \frac{dl}{\mu A} = - \int_{b(a-p)}^a H dl \quad (9-74a)$$

El flujo magnético Φ es continuo en todo el circuito, de modo que $\Phi = B_m A_m$, donde B_m es el campo magnético en el imán permanente y A_m es el área de la sección transversal. El lado derecho de la ecuación (9-74) puede escribirse como $-H_m l_m$, donde H_m es la intensidad magnética promedio del imán y l_m es su longitud. Por tanto,

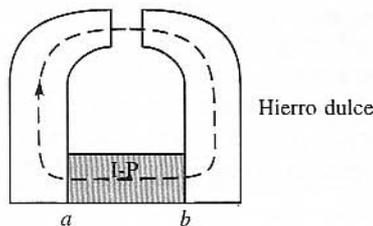
$$B_m A_m \mathcal{R}_{ab} = -H_m l_m \quad (9-74b)$$

es la ecuación que relaciona las cantidades desconocidas B_m y H_m . Esta ecuación puede resolverse simultáneamente con la curva de histéresis del imán para dar tanto B_m como H_m .

Como ejemplo de un circuito I-P, consideremos el circuito compuesto por un imán, un entrehierro lleno de aire y hierro dulce (Fig. 9.19). Es importante darse cuenta de que el hierro dulce *no* es un material I-P; su histéresis es realmente despreciable comparada con la del imán, y $\mu_i = B_i/H_i$ es una cantidad positiva. La reluctancia \mathcal{R}_{ab} está dada por

FIGURA 9.19

Circuito de imán permanente. Para este circuito, sobre el imán actúa un campo desmagnetizante bastante grande; este último puede reducirse aumentando la longitud del material I-P (por ejemplo, colocando imanes adicionales en los brazos laterales del circuito).



$$\mathcal{R}_{ab} = \frac{l_i}{\mu_i A_i} + \frac{l_g}{\mu_0 A_g} \quad (9-75)$$

donde los subíndices i y g se refieren al hierro dulce y al entrehierro lleno de aire, respectivamente. Si el entrehierro lleno de aire no es demasiado angosto, la ecuación (9-75) puede, en general, calcularse aproximadamente mediante

$$\mathcal{R}_{ab} \approx \frac{l_g}{\mu_0 A_g}$$

que, cuando se combina con (9-74b), nos da

$$B_m = -\frac{l_m A_g}{l_g A_m} \mu_0 H_m \quad (9-76)$$

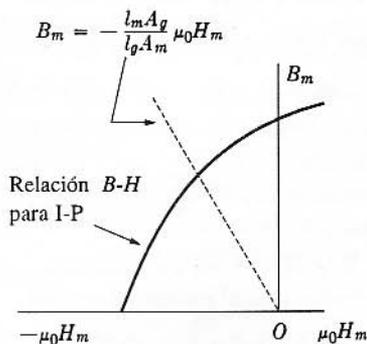
una relación lineal entre B_m y H_m . La representación gráfica de esta ecuación, junto con la curva de histéresis del imán, se muestran en la figura 9.20. El punto de corte de las dos curvas da el punto de operación del imán. El problema está ahora casi resuelto: conociendo B_m se determinan fácilmente el flujo Φ y la densidad de flujo B_g .

Sin embargo, hay dos puntos que merecen atención. El primero es: ¿qué se utiliza para el área efectiva A_g del entrehierro? Como una primera aproximación, podemos considerar A_g igual al área de la cara del polo del hierro dulce, y si el entrehierro lleno de aire no es demasiado grande, esta aproximación es adecuada. No entraremos en un análisis detallado de este punto, pero indicaremos al lector interesado que consulte las referencias citadas en la sección anterior. En segundo lugar, el problema del flujo de fuga es tan importante en los circuitos I-P como en otros tipos de circuitos magnéticos. No obstante, para los problemas que se presentan en este libro, supondremos generalmente que el flujo de fuga puede despreciarse.

Finalmente, observamos que H_m , tal como se mencionó en la figura 9.20, es negativo; esto es, la intensidad magnética del imán es un efecto *desmagnetizante*. Éste es un resultado general. Cuando el flujo magnético tiene su origen en un imán permanente, entonces el imán mismo está sometido a un campo desmagnetizante.

FIGURA 9.20

Línea desmagnetizante para un circuito magnético. (El subíndice m significa imán.) Como se construye la gráfica de $\mu_0 H_m$ en lugar de H_m , la pendiente de la recta desmagnetizante es exactamente $-(l_m A_g / l_g A_m)$; en otras palabras, un número puro.



9.12 RESUMEN

En el capítulo 4 señalamos que la respuesta de un medio (dieléctrico) a un campo E era una densidad de carga de polarización $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ ($\sigma_p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$), donde $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$; en el capítulo 7 se vio que la respuesta de un medio (conductor) a un campo E era una densidad de corriente de transporte $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. Encontramos ahora que la respuesta de un medio (magnético) a un campo B es otro tipo de densidad de corriente, la **corriente de magnetización atómica**,

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (\mathbf{j}_M = -\mathbf{n} \times \mathbf{M})$$

donde $\mathbf{M} = \Delta \mathbf{m} / \Delta v$ es el momento magnético por unidad de volumen del material. El potencial vector debido a la magnetización es

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

El **campo total** \mathbf{B} causado por la corriente de transporte estacionaria *más* la corriente de magnetización satisface

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_M).$$

Observe que $\nabla \cdot \mathbf{J}_M = 0$. Es conveniente definir el campo vectorial

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

de modo que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, con solamente las corrientes de transporte convencionales como fuentes. Para un medio dado, debe conocerse la **susceptibilidad magnética** en la ecuación constitutiva.

$$\mathbf{M} = \chi_m(H)\mathbf{H}$$

Combinada con la definición de \mathbf{H} , se tiene

$$\mathbf{B} = \mu(H)\mathbf{H}$$

donde $\mu = \mu_0[1 + \chi_m(H)]$. Esta relación, junto con las ecuaciones diferenciales

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

determina los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} , sujetos a las condiciones en la frontera

$$\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0, \quad \mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}_2$$

- La mayoría de los materiales son **diamagnéticos** ($\chi_m < 0$) o **paramagnéticos** ($\chi_m > 0$); en cualquiera de los casos, $|\chi_m| \ll 1$. Los materiales magnéticos de importancia práctica son **ferromagnéticos**. Para estos, $|\chi_m|$ puede ser mayor que 1000, pero $\mathbf{B} = \mathbf{B}(H)$ no es lineal y no tiene valor único (histéresis).

- Debido a que $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, en los problemas en los que no hay corrientes de transporte es conveniente usar el **potencial escalar**,

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi^*$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$, φ^* satisface la **ecuación de Poisson**

$$\nabla^2 \varphi^* = \nabla \cdot \mathbf{M}$$

Una solución es

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\rho_M(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\sigma_M(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

donde $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$, $\sigma_M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}$. (Esta solución es útil si \mathbf{M} es una función dada.)

- En los problemas con medios lineales o que tienen \mathbf{M} uniforme, $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ y φ^* satisface la **ecuación de Laplace**. Estos problemas son idénticos a los correspondientes problemas electrostáticos sin densidad de carga externa.

- **La ley de Ampère** relaciona el campo \mathbf{H} con la corriente de transporte:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

- La solución para \mathbf{H} se divide en una parte debida a la corriente de transporte y otra debida a los materiales magnéticos:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \nabla \varphi^*(\mathbf{r})$$

(El cálculo del segundo término depende del conocimiento de $\mathbf{M}(\mathbf{H})$.)

- En presencia de materiales ferromagnéticos con μ grande, una aproximación útil puede ser considerar que todo el flujo Φ está confinado en un volumen conocido. Entonces

$$NI = \Phi \mathcal{R}$$

donde la **reluctancia**

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$$

se puede calcular para cada elemento del **circuito magnético**.

PROBLEMAS

9.1 Un imán permanente tiene la forma de un cilindro recto de longitud L . Si la magnetización \mathbf{M} es uniforme y tiene la dirección del eje del cilindro, encuentre las densidades de corriente de magnetización J_M y j_M . Compare la distribución de la corriente con la de un solenoide.

9.2 (a) Halle la distribución de corrientes de magnetización correspondientes a una esfera uniformemente magnetizada con magnetización \mathbf{M} . Según la ecuación (9-63), la inducción magnética \mathbf{B} es uniforme en el interior de dicha esfera. (b) ¿Puede usar esta información para diseñar un devanado por el que pase una corriente que produzca un campo magnético uniforme en una región esférica del espacio?

9.3 (a) El momento magnético de un cuerpo macroscópico se define como $\int_V \mathbf{M} dv$. Demuestre la relación

$$\int_V \mathbf{M} dv = \int_V \mathbf{r} \rho_M dv + \oint_S \mathbf{r} \sigma_M da$$

Teoría microscópica del magnetismo

En el capítulo anterior nos ocupamos de los aspectos macroscópicos de la magnetización. Las propiedades magnéticas de la materia se introdujeron explícitamente a través de la función \mathbf{M} , la cual se relacionó con la inducción magnética por medio de parámetros determinados experimentalmente. En este capítulo consideraremos la materia desde el punto de vista microscópico (es decir, como una agrupación de átomos o moléculas) y veremos cómo responden las moléculas individuales a un campo magnético impuesto. Si este procedimiento se realizara en la forma más completa posible, finalizaríamos con expresiones teóricas para la susceptibilidad y con relaciones B - H para todos los tipos de materiales. Ciertamente, tal procedimiento queda más allá del alcance de este libro; sin embargo, podemos demostrar con facilidad cómo se originan los diversos tipos de comportamiento magnético, y además deducir expresiones que predigan el orden de magnitud correcto de la susceptibilidad en algunos casos. Un análisis mucho más completo y detallado de los temas presentados aquí podrá encontrarse en libros de física del estado sólido.[†]

En la formulación macroscópica del capítulo 9 tratamos dos campos vectoriales, \mathbf{B} y \mathbf{H} , que relacionamos mediante la ecuación $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Desde el punto de vista microscópico, la distinción entre \mathbf{B} y \mathbf{H} desaparece en gran parte porque consideramos una agrupación de moléculas (es decir, una agrupación de dipolos magnéticos o de grupos dipolares) en el vacío. Nos interesa el campo magnético cerca de una molécula en el vacío o en la posición de una molécula cuando ésta se quita del sistema. Por tanto, $\mathbf{B}_m = \mu_0\mathbf{H}_m$. Aquí el subíndice m indica "microscópico", pero en las siguientes

* Este capítulo puede omitirse sin pérdida de continuidad.

† Véase, por ejemplo, C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 6a. ed., Nueva York, Wiley, 1986, caps. 14 y 15.

secciones de este capítulo el símbolo \mathbf{B}_m (y \mathbf{H}_m) representará un valor particular del campo microscópico, es decir, el campo en la posición de una molécula.

Cuando se estudia el campo microscópico dentro de la materia, se suele relacionar \mathbf{H}_m con el campo \mathbf{H} macroscópico, en lugar de \mathbf{B}_m con el campo \mathbf{B} , porque tanto \mathbf{H} como \mathbf{H}_m pueden escribirse sencillamente en función de las integrales sobre las dos distribuciones de corriente y de dipolos. Sin embargo, importa muy poco que se calcule \mathbf{H}_m o \mathbf{B}_m , puesto que difieren uno de otro sólo en un factor de escala μ_0 .

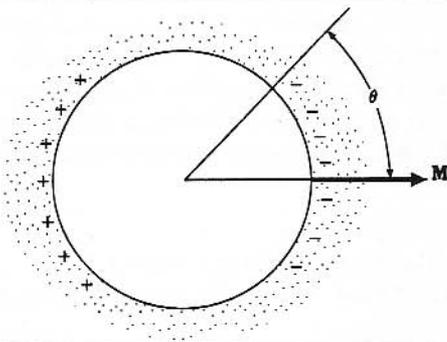
10.1 CAMPO MOLECULAR DENTRO DE LA MATERIA

El campo magnético que es efectivo en la interacción con las corrientes atómicas de un átomo o una molécula se llama campo molecular $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m$. En algunos textos se llama *campo local*, y es el campo magnético en una posición molecular (o atómica) del material. Este campo es producido por todas las fuentes externas y por todos los dipolos moleculares del material *con excepción* de la molécula (o del átomo) en el punto que se está considerando. Es evidente que \mathbf{B}_m no tiene que ser igual al campo de inducción magnética macroscópico, puesto que esta última cantidad se relaciona con la fuerza sobre un elemento de corriente cuyas dimensiones son grandes comparadas con las dimensiones moleculares.

El campo molecular puede calcularse por un procedimiento semejante al de la sección 5.1 para el campo eléctrico molecular en un dieléctrico. Consideremos un objeto material de forma arbitraria, que por conveniencia suponemos que está magnetizado uniformemente con magnetización \mathbf{M} . Saquemos una pequeña muestra del objeto, dejando una cavidad esférica alrededor del punto en el que se va a calcular el campo molecular (véase la figura 10.1). El material que queda debe considerarse como un continuo, esto es, desde el punto de vista macroscópico. A continuación, volvemos a poner el material en la cavidad, molécula por molécula, excepto la molécula del centro de la cavidad, donde queremos calcular el campo molecular. Las moléculas que se han vuelto a poner en su lugar deben considerarse no como un continuo, sino como dipolos individuales o como grupos dipolares.

FIGURA 10.1

Cálculo de la contribución de la superficie de la "cavidad" a \mathbf{H}_m ; + y - representan la carga magnética (es decir, los polos que se dirigen a N y S).



El campo *macroscópico* \mathbf{H} , la intensidad magnética de la muestra, puede expresarse, según la ecuación (9-27), como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' + \frac{1}{4\pi} \int \rho_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da'$$

donde las integrales se extienden sobre todas las fuentes: \mathbf{J} , ρ_M y σ_M . El campo molecular \mathbf{H}_m puede expresarse de forma semejante, excepto que ahora hay contribuciones adicionales de la superficie de la cavidad y de los dipolos individuales dentro de ésta. La integral de $\rho_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ sobre el volumen de la cavidad no necesita excluirse específicamente, puesto que $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ en la muestra uniformemente magnetizada. Por tanto,

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}' \quad (10-1)$$

donde \mathbf{H} es la intensidad magnética macroscópica de la muestra, \mathbf{H}_s es la contribución de la densidad de polos superficial $\sigma_M = M_n$ sobre la superficie de la cavidad (véase la figura 10.1) y \mathbf{H}' es la contribución de los distintos dipolos del interior de la cavidad.

De la deducción correspondiente en la sección 5.1, se ve que \mathbf{H}_s es

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{3}\mathbf{M} \quad (10-2)$$

Además, la contribución de los dipolos en la cavidad

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{4\pi} \sum_i \left[\frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right] \quad (10-3)$$

donde \mathbf{r}_i es la distancia del i -ésimo dipolo al centro de la cavidad y tiene la misma forma que el término dipolar eléctrico correspondiente \mathbf{E}' en la sección 5.1.

Por tanto, si restringimos nuestro interés a la clase bastante abundante de materiales para los cuales se anula la ecuación (10-3), la ecuación (10-1) del campo molecular se reduce a

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{1}{3}\mathbf{M} \quad (10-4)$$

y

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m \quad (10-5)$$

Las ecuaciones (10-4) y (10-5) dan el campo molecular en función de la intensidad magnética macroscópica y la magnetización de la muestra. Para la mayoría de los

materiales diamagnéticos y paramagnéticos, el término $\frac{1}{3}\mathbf{M} = \frac{1}{3}\chi_m\mathbf{H}$ es despreciablemente pequeño, pero para materiales ferromagnéticos la corrección es muy importante.

10.2 ORIGEN DEL DIAMAGNETISMO

Para calcular la susceptibilidad diamagnética de un conjunto de átomos debemos saber algo acerca del movimiento electrónico en el átomo mismo. Supondremos que cada electrón circula alrededor del núcleo atómico en alguna clase de órbita y, por conveniencia, elegiremos una órbita circular de radio R en un plano perpendicular al campo magnético aplicado. La mecánica cuántica nos dice que, aun cuando esta forma de razonamiento es aproximadamente correcta, los electrones no circulan en órbitas bien definidas. Para resolver adecuadamente el problema, tendríamos que resolver la ecuación de Schroedinger para un electrón atómico en un campo magnético; sin embargo, nuestro cálculo "clásico" un tanto ingenuo da el orden de magnitud correcto para la susceptibilidad diamagnética.

Antes de que se aplique el campo de inducción magnética, el electrón está en equilibrio en su órbita:

$$F_q = m_e \omega_0^2 R, \quad (10-6)$$

donde F_q es la fuerza eléctrica que mantiene al electrón en su átomo, ω_0 es la frecuencia angular del electrón en su órbita y m_e es la masa del electrón. Al aplicar un campo magnético se ejerce una fuerza adicional $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m$ sobre el electrón; suponiendo que el electrón permanece en la misma órbita, se encuentra que

$$F_q \pm e\omega R B_m = m_e \omega^2 R$$

que, cuando se combina con la ecuación (10-6), da

$$\pm e\omega B_m = m_e(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \quad (10-7)$$

La cantidad $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ es el cambio en la frecuencia angular del electrón. De aquí que el electrón se acelera o bien disminuye su velocidad en su órbita, dependiendo de la forma geométrica detallada (es decir, del sentido de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m$ con respecto a F_q), pero en cualquier caso el cambio en el momento magnético orbital es en sentido opuesto al del campo aplicado. El lector puede verificar fácilmente este enunciado.

Aun para los mayores campos que pueden obtenerse en el laboratorio ($\sim 100\text{T}$), $\Delta\omega$ es muy pequeño comparado con ω_0 , de modo que la ecuación (10-7) puede siempre aproximarse mediante

$$\Delta\omega = \pm \frac{e}{2m_e} B_m \quad (10-8)$$

La cantidad $(e/2m_e)B_m$ se llama *frecuencia de Larmor*.

Hasta este punto hemos supuesto simplemente que el electrón permanece en la misma órbita. Hemos utilizado esta suposición junto con el equilibrio de fuerzas para

deducir la ecuación (10-8). Para que el electrón permanezca en su órbita, el cambio en su energía cinética, como se determinó por la ley de inducción de Faraday, debe ser consistente con la ecuación (10-8).^{*} Cuando se comienza a generar el campo magnético, hay un cambio en el flujo a través de la órbita dado por $\pi R^2 \Delta B_m$. Este flujo atraviesa las Δn espiras orbitales electrónicas, donde Δn es el número de revoluciones realizadas por el electrón durante el tiempo en que el campo cambia. El flujo variable produce una fem de acuerdo con la ley de Faraday:

$$\mathcal{E} = \pi R^2 \frac{dB_m}{dt} \Delta n = \pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \quad (10-9)$$

La energía dada al electrón en este proceso es $\mathcal{E}e$ y esto aparece como un cambio en la energía cinética:

$$\frac{1}{2} m_e R^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = e \pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \quad (10-10)$$

Pero ΔB_m es sólo el valor final del campo B_m , y el valor promedio de $dn/dt = (\omega + \omega_0)/4\pi$. Así,

$$\Delta \omega = \frac{e}{2m_e} B_m$$

de acuerdo con la ecuación (10-8). Por tanto, la suposición de una órbita constante no conduce a una contradicción entre (10-9) y la ecuación de las fuerzas. El diamagnetismo es el resultado de la ley de Lenz operando a escala atómica. Bajo la influencia de un campo magnético, las corrientes electrónicas en cada átomo se modifican de tal modo que tienden a debilitar el efecto de este campo.

El cambio en la velocidad angular predicho por la ecuación (10-8) produce un cambio en el momento magnético dado por

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{e}{2\pi} \pi R^2 \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}_m = -\frac{e^2}{4m_e} R^2 \mu_0 \mathbf{H}_m \quad (10-11)$$

Para hallar la magnetización, este resultado debe sumarse sobre todos los electrones en una unidad de volumen. Para una sustancia que contiene N moléculas por unidad de volumen, todas de la misma especie molecular,

$$\mathbf{M} = -\frac{Ne^2 \mu_0}{4m_e} \mathbf{H}_m \sum_i R_i^2 \quad (10-12)$$

donde la suma se efectúa sobre los electrones de una molécula. Para materiales diamagnéticos, \mathbf{H}_m difiere muy poco de \mathbf{H} , de modo que la susceptibilidad diamagnética

^{*} La ley de inducción de Faraday y la ley de Lenz se tratan en el capítulo 11, sección 11.1.

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e} \sum_i R_i^2 \quad (10-13a)$$

Este resultado se ha obtenido suponiendo que todos los electrones circulan en planos perpendiculares al campo \mathbf{H}_m . Cuando la órbita se inclina, de modo que una normal a la órbita forma un ángulo θ_i con el campo, sólo la componente de \mathbf{H}_m a lo largo de esta normal ($H_m \cos \theta_i$) es efectiva para alterar la velocidad angular del electrón. Además, la componente de $\Delta\mathbf{m}$ paralela al campo es menor por el factor $\cos \theta_i$. Por tanto, una mejor aproximación a la susceptibilidad diamagnética es

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e} \sum_i R_i^2 \cos^2 \theta_i \quad (10-13b)$$

El diamagnetismo probablemente está presente en todo tipo de materia, pero su efecto es frecuentemente enmascarado por un comportamiento paramagnético o ferromagnético más intenso que puede tener lugar simultáneamente en el material. El diamagnetismo es particularmente notable en los materiales que consisten enteramente de átomos o iones con "capas electrónicas cerradas", ya que, en estos casos, todas las contribuciones paramagnéticas se cancelan.

10.3

ORIGEN DEL PARAMAGNETISMO

El movimiento orbital de cada electrón en un átomo o molécula puede escribirse en función de un momento magnético; esto se deduce directamente de la ecuación (8-22). Además, se sabe que el electrón tiene una propiedad intrínseca llamada *espín*, y un momento magnético intrínseco asociado a esta carga con espín. De este modo, cada molécula tiene un momento magnético \mathbf{m}_i que es la suma vectorial de los momentos orbitales y de espín de los diversos electrones de la molécula. En resumen, el paramagnetismo resulta de la tendencia de estos momentos moleculares a alinearse con el campo aplicado, al igual que el circuito de corriente de la ecuación (8-19) tiende a alinearse con el campo.

Sin embargo, la situación no es tan clara como la de un circuito de corriente. De hecho, hay dos complicaciones: (1) en presencia de un campo magnético, los movimientos electrónicos están cuantizados de tal modo que cada momento orbital y de espín tiene sólo un conjunto discreto de orientaciones relativas al sentido del campo. Además, dos electrones de la molécula no pueden ocupar el mismo estado cuántico, de modo que si hay suficientes electrones por molécula para llenar las "capas electrónicas", entonces deben utilizarse todas las posibles orientaciones y \mathbf{m}_i es cero. Está claro que el paramagnetismo puede tener lugar sólo cuando $\mathbf{m}_i \neq 0$. (2) El movimiento electrónico dentro de un átomo que da origen a \mathbf{m}_i también produce un momento angular con respecto al núcleo atómico; de hecho, \mathbf{m}_i está linealmente relacionado con este momento angular. En estas condiciones, el momento de rotación magnético no alinea directamente el momento dipolar \mathbf{m}_i con el campo, sino que origina un movimiento de precesión con respecto al campo con una

inclinación constante.* Los átomos (o las moléculas) en nuestro sistema material están en contacto térmico entre sí. En un gas o en un líquido, los átomos están sufriendo continuamente colisiones unos con otros; en un sólido, los átomos están experimentando una oscilación térmica. En estas condiciones, los diversos \mathbf{m}_i pueden intercambiar la energía magnética con la energía térmica de su medio ambiente y hacer transiciones de un estado de precesión a otro con otra inclinación distinta. La energía térmica del sistema tiende a producir una orientación completamente aleatoria de \mathbf{m}_i , pero las orientaciones a lo largo de la dirección del campo o cercanas a ella tienen una menor energía magnética y, por tanto, son favorecidas. La situación es bastante semejante a la de las moléculas polares de un campo eléctrico que se analizó en la sección 5.3.

Para un material compuesto totalmente por una especie molecular, en el que cada molécula tiene un momento magnético m_0 , la orientación fraccionaria está dada de forma aproximada por la función de Langevin, ecuación (5-21), con

$$y = \frac{m_0 \mu_0 H_m}{kT} \quad (10-14)$$

La magnetización está dada por

$$|\mathbf{M}| = Nm_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (10-15a)$$

donde N es el número de moléculas por unidad de volumen. Excepto para temperaturas cercanas al cero absoluto, la función de Langevin puede aproximarse al primer término de su serie de potencias:

$$\mathbf{M} = \frac{Nm_0^2}{3kT} \mu_0 \mathbf{H}_m \quad (10-51b)$$

que da la susceptibilidad paramagnética

$$\chi_m = \frac{Nm_0^2 \mu_0}{3kT} \quad (10-16)$$

Según la teoría atómica, m_0 está en el intervalo de unos cuantos magnetones de Bohr (1 magnetón de Bohr = $eh/4\pi m_e$, donde h es la constante de Planck). Las ecuaciones (10-16) y (10-13b) explican el orden de magnitud de las χ_m de la tabla 9.1.

Podemos resumir brevemente los resultados de esta sección como sigue: Para poder presentar un comportamiento paramagnético, los átomos (o las moléculas) del sistema deben tener momentos magnéticos permanentes, y éstos tienden a orientarse en el campo aplicado. Los diversos momentos moleculares se desacoplan, esto es, precesan alrededor del campo magnético individualmente (no al unísono), pero pueden intercambiar energía debido al contacto térmico con su medio ambiente. Excepto

* En diversos textos se puede encontrar un análisis de la precesión de \mathbf{m}_i en un campo magnético uniforme. Véase, por ejemplo, H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1950, págs.176-177.

a temperaturas cercanas al cero absoluto y para grandes campos simultáneos, la magnetización es mucho menor que el valor de saturación que se obtendría cuando todos los momentos dipolares estuvieran alineados.

10.4 TEORÍA DEL FERROMAGNETISMO

En materiales ferromagnéticos, los momentos atómicos (o moleculares) están casi alineados, aun en ausencia de un campo aplicado. La causa de esta alineación es el campo molecular \mathbf{H}_m que, según la ecuación (10-4), no se anula cuando $\mathbf{H} = 0$ a menos que \mathbf{M} se anule simultáneamente. Una magnetización \mathbf{M} da lugar a un campo molecular, pero a menos que este campo molecular produzca la misma magnetización \mathbf{M} que se supone que existe en el material, la solución es inconsistente. Nuestro problema consiste en determinar en qué circunstancias se puede mantener la magnetización por sí misma por medio del campo molecular.

Se demostrará que es necesario generalizar la ecuación (10-4) hasta cierto grado. Para el campo molecular, escribiremos $\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \gamma\mathbf{M}$, que, para $\mathbf{H} = 0$, se reducirá a

$$\mathbf{H}_m = \gamma\mathbf{M} \quad (10-4a)$$

Según la sencilla teoría de la Sección 10.1, $\gamma = \frac{1}{3}$. Si los términos de la ecuación (10-3) no suman cero, γ puede diferir de $\frac{1}{3}$; sin embargo, es probable que γ sea de este orden de magnitud.

Limitemos nuestra atención a un material compuesto totalmente por una especie atómica; cada átomo tiene un momento magnético m_0 . Hay N átomos por unidad de volumen. Para que los momentos atómicos estén casi alineados, M debe ser una fracción importante de Nm_0 ; no obstante, con el fin de concretar, digamos que

$$M > 0.7Nm_0 \quad (10-17)$$

Según la ecuación (10-15), esto implica que $[\coth y - (1/y)] > 0.7$ o y [que se define mediante la ecuación (10-14)] > 3 . Por tanto,

$$y = \frac{m_0\mu_0 H_m}{kT} > 3$$

que, cuando se combina con las ecuaciones (10-4a) y (10-17), da

$$0.7 \frac{\gamma N \mu_0 m_0^2}{kT} > 3 \quad (10-18)$$

Este resultado es (aproximadamente) la condición para que tenga lugar el ferromagnetismo.

En la sección anterior se dijo que la teoría atómica predice que m_0 está en un intervalo de unos pocos magnetones de Bohr. Con esto como base, la ecuación (10-18) requiere una γ de aproximadamente 10^3 , lo cual es muchos órdenes de magnitud mayor que lo que puede justificar la deducción presentada en la sección 10.1. Parecería entonces que el origen del ferromagnetismo es considerablemente más complejo que la situación correspondiente en los ferroeléctricos (analizada en la sección 5.4).

En 1907, Pierre Weiss* formuló su teoría del ferromagnetismo. Weiss se dio cuenta del papel esencial que desempeña el campo molecular. No pudo explicar el gran valor de γ , pero lo aceptó como un hecho y siguió desarrollando su teoría a partir de ese punto. Se encontró que las predicciones de su teoría concordaban bastante bien con los experimentos. Por esta razón, al campo molecular de la ecuación (10-4a) se le llama a menudo *campo molecular de Weiss*.

Quedó para Heisenberg,† unos veinte años más tarde, el explicar el origen del gran valor de γ . Heisenberg demostró, primero, que sólo los momentos magnéticos de espín contribuyen al campo molecular y, en segundo lugar, que el campo es producido básicamente por fuerzas electrostáticas. Tomando como base la mecánica cuántica, demostró que cuando los espines de átomos vecinos cambian de un alineamiento paralelo a otro antiparalelo, tiene que haber un cambio simultáneo en la distribución de carga electrónica en los átomos.‡ El cambio en la distribución de carga altera la energía electrostática del sistema y, en algunos casos, favorece la alineación paralela (esto es, el ferromagnetismo). Una energía dependiente del espín, o sea, una energía que depende de la configuración del espín del sistema, puede considerarse en términos de la fuerza (o momento de rotación) que se produce sobre uno de los átomos cuando se altera la configuración. El campo equivalente resulta ser proporcional a \mathbf{M} , pero con un coeficiente que depende en detalle de la distribución de carga en el átomo en consideración.

La teoría de Weiss-Heisenberg puede utilizarse para predecir la forma en que la magnetización de un ferroimán cambia con la temperatura. Es evidente que la teoría describe el ferromagnetismo como el caso límite del paramagnetismo en un campo magnético extremadamente grande, pero este campo proviene de la propia magnetización. Combinando la ecuación (10-4a) con (10-14) y (10-15) se tiene

$$M = Nm_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (10-19)$$

y

$$M = \frac{kTy}{\gamma\mu_0 m_0} \quad (10-20)$$

La *magnetización espontánea*, es decir, la magnetización en un campo externo cero, para una temperatura dada, se obtiene a partir de la solución simultánea de las ecuaciones (10-19) y (10-20). Esto se hace fácilmente mediante un procedimiento gráfico: representado gráficamente M en función de y para *ambas* ecuaciones, (10-19) y (10-20), como se indica en la figura 10.2. La intersección de las dos curvas da una magnetización $M(T)$ que es consistente con ambas ecuaciones. A medida que la temperatura aumenta,

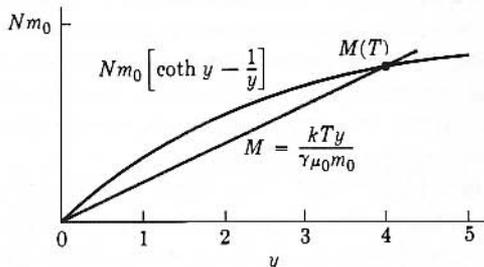
* P. Weiss, *Journal de Physique*, vol. 6, pág. 667, 1907

† W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik*, vol. 49, pág. 619, 1928.

‡ Este cambio de distribución es una consecuencia del principio de exclusión de Pauli.

FIGURA 10-2

Determinación de la magnetización espontánea $M(T)$ con ayuda de la función de Langevin.



la curva lineal, ecuación (10-20), aumenta su pendiente, pero la ecuación (10-19) no cambia. Por tanto, el punto de intersección se mueve hacia la izquierda en la figura, y se obtiene un valor menor para la magnetización espontánea. Finalmente, se alcanza una temperatura para la cual la ecuación (10-20) es tangente a (10-19) en el origen; a esta temperatura, y a otras mayores, la magnetización espontánea es cero. Esta temperatura es la *temperatura de Curie*, T_c , por encima de la cual la magnetización espontánea se anula y tiene lugar el comportamiento paramagnético ordinario.

Una gráfica de $M(T)$ en función de la temperatura, obtenida según el procedimiento anterior, se muestra en la figura 10.3. Estos valores concuerdan aproximadamente con los valores de la magnetización espontánea determinados experimentalmente para un material ferromagnético.

10.5 DOMINIOS FERROMAGNÉTICOS

Según la sección anterior, una muestra ferromagnética deberá magnetizarse casi hasta la saturación (independientemente de su historia anterior) a temperaturas por debajo

FIGURA 10.3

Magnetización de un material ferromagnético en función de la temperatura. T_c se llama temperatura de Curie. (La curva mostrada se ha calculado con ayuda de la función clásica de Langevin; las correcciones de la mecánica cuántica cambian un poco la forma de la curva, haciendo que concuerde con los datos experimentales.)

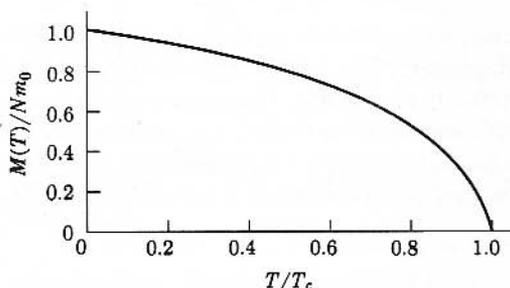
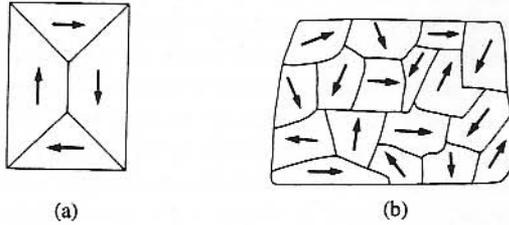


FIGURA 10.4

Estructuras de dominios ferromagnéticos: (a) cristal sencillo, (b) muestra policristalina. Las flechas representan la dirección de magnetización.



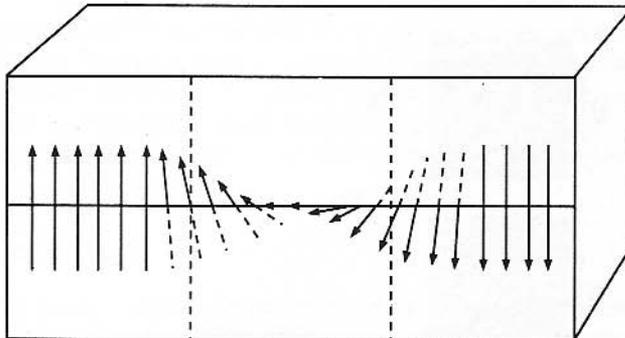
de la temperatura de Curie. Esto parece contradecir la observación. Por ejemplo, sabemos que una muestra de hierro puede existir en estado magnetizado o desmagnetizado. La respuesta a esta aparente paradoja es que un material ferromagnético se divide en *dominios*; cada dominio está totalmente magnetizado según los resultados de la sección anterior, pero los diversos dominios pueden orientarse al azar (Fig. 10.4) y, por tanto, presentar un aspecto desmagnetizado desde el punto de vista macroscópico. El primero que postuló la presencia de dominios fue Weiss, en 1907.

Al pasar de un dominio a otro adyacente, el vector del momento atómico, \mathbf{m}_0 , gira gradualmente desde su dirección original a otra nueva en el curso de unos 100 átomos (Fig. 10.5). Esta región entre los dos dominios se llama *pared del dominio*. Podría parecer que un momento de espín atómico en la región de la pared está sujeto a un campo molecular ligeramente menor que el de un momento de espín atómico dentro del propio dominio. Esta observación favorecería por sí misma una sola configuración de dominio. Por otra parte, una muestra que consiste en un solo dominio debe mantener un gran campo magnético externo, mientras que una muestra de dominios múltiples tiene una menor "energía magnética" asociada con su estructura de campo. Por tanto, la estructura de dominios múltiples es, por lo general, energéticamente favorecida.

Los aspectos macroscópicos de la magnetización en los materiales ferromagnéticos se relacionan con los cambios en la configuración del dominio. El aumento en la

FIGURA 10.5

Estructura de la región de transición, o "pared de Bloch", entre los dominios de un material ferromagnético.



magnetización resultante de la acción de un campo magnético aplicado es producido por dos procesos independientes: por un aumento en el volumen de dominios que están orientados favorablemente en relación con el campo, a costa de los dominios que se orientan desfavorablemente (movimiento de la pared del dominio), o por la rotación de la magnetización del dominio hacia la dirección del campo. Los dos procesos se muestran esquemáticamente en la figura 10.6.

En campos aplicados débiles, la magnetización cambia generalmente por medio del movimiento de la pared del dominio. En los materiales puros que consisten en una sola fase, el movimiento de la pared es reversible, en gran medida, para campos débiles. En campos más intensos, la magnetización tiene lugar por un movimiento de la pared irreversible, y finalmente por rotación de dominios. En estas circunstancias, la sustancia permanece magnetizada cuando se suprime el campo magnético externo.

El estudio experimental de dominios se hizo posible gracias a una técnica desarrollada por primera vez por F. H. Bitter.* Un polvo magnético finamente dividido se espolvorea sobre la superficie de la muestra, y las partículas del polvo, que se reúnen sobre las fronteras del dominio, pueden verse con un microscopio. Por medio de esta técnica se ha hecho posible incluso observar el movimiento de la pared del dominio bajo la acción de un campo magnético aplicado. El tamaño de los dominios varía ampliamente, dependiendo del tipo de material, su historia previa, etc. Los valores típicos están en el intervalo de 10^{-6} hasta 10^{-2} cm³.

* F. H. Bitter, *Physical Review*, vol. 41, pág. 507, 1932. Para un breve análisis de la técnica, véase B. D. Jiles, *Magnetism and Magnetic Materials*, Londres: Chapman and Hall, pág. 114, 1991.

FIGURA 10.6

Magnetización de un material ferromagnético: (a) desmagnetizado, (b) magnetización por el movimiento de la pared del dominio, (c) magnetización por la rotación de dominios.

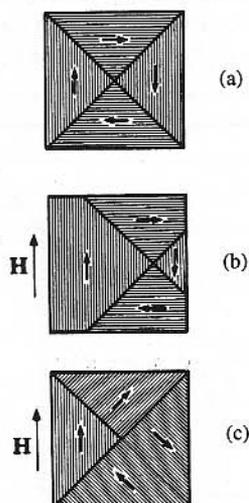
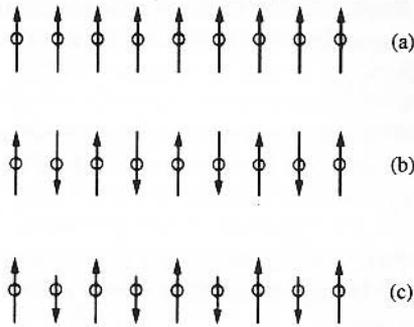


FIGURA 10.7

Representación esquemática de los espines atómicos en estructuras ordenadas de espín: (a) ferromagnética, (b) antiferromagnética, (c) ferrimagnética.



10.6 FERRITAS

Según la teoría del ferromagnetismo de Heisenberg, hay un cambio en la energía electrostática relacionado con el cambio de alineación del espín, de paralela a antiparalela, en los átomos vecinos. Si este cambio de energía favorece la alineación paralela y al mismo tiempo es de suficiente magnitud, el material formado por estos átomos es ferromagnético. Si el cambio de energía favorece la alineación antiparalela, todavía es posible obtener una estructura de espín *ordenada*, pero con espines que alternan de un átomo a otro a medida que se recorre el cristal.

Una estructura de espín ordenada con momento magnético neto cero se llama *antiferroimán* (Fig. 10.7b). La estructura de espín ordenada más general contiene componentes tanto de “espín hacia arriba” como de “espín hacia abajo”, pero tiene un momento magnético neto distinto de cero en uno de estos sentidos. Dicho material se llama *ferroimán* o simplemente *ferrita*. Las ferritas más sencillas de interés magnético son los óxidos representados por la fórmula química $MOFe_2O_3$, donde M es un ion metálico divalente, tal como Co, Ni, Mn, Cu, Mg, Zn, Cd, o hierro divalente. Estas ferritas se cristalizan en una estructura cristalina bastante complicada llamada *estructura espinela*. El ejemplo clásico de una ferrita es la magnetita mineral (Fe_3O_4), que se conoce desde épocas antiguas.

Las ferritas son de considerable importancia técnica porque, además de su magnetización de saturación relativamente grande, son malos conductores de electricidad. Por tanto, pueden usarse para aplicaciones de alta frecuencia en las que las pérdidas por corrientes parásitas en materiales conductores originan problemas serios. Las resistividades típicas de las ferritas están en el intervalo de 1 a $10^4 \Omega \cdot m$; en comparación, la resistividad eléctrica del hierro es aproximadamente $10^{-7} \Omega \cdot m$.

10.7 RESUMEN

La magnetización macroscópica M de un material magnético resulta del momento dipolar magnético (o su componente), que aparece en respuesta al campo local en la molécula, el **campo molecular** H_m . El campo molecular depende del campo aplicado

H y también de la magnetización misma. La última contribución, que es una consecuencia del campo magnético dipolar de todas las otras moléculas, nos da

$$H_m = H + \frac{1}{3}M$$

que al igual que en el caso dieléctrico, es despreciablemente pequeña para la mayoría de los materiales lineales debido a la insignificancia de la susceptibilidad magnética en

$$M = \chi_m H$$

Sin embargo, la magnetización espontánea ocurre en materiales ferromagnéticos porque la contribución de la magnetización al campo molecular efectivo tiene un coeficiente mucho mayor que $\frac{1}{3}$.

- En presencia de un campo magnético, todas las moléculas presentan un momento dipolar magnético inducido debido a la *deformación* de la distribución de corriente electrónica. La respuesta es siempre de tal forma que debilita el campo aplicado; esto es, la contribución (diamagnética) a la susceptibilidad es siempre negativa. Una aproximación lineal nos conduce a la constante de **susceptibilidad diamagnética**,

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e} \sum_i R_i^2$$

- Las moléculas que tienen un momento dipolar magnético permanente m_0 muestran además una respuesta por orientación. Ésta se describe de forma aproximada con la función de Langevin, al igual que para moléculas polares en un campo eléctrico. Excepto en la proximidad del cero absoluto, la **susceptibilidad paramagnética** resultante es

$$\chi_m = \frac{Nm_0^2\mu_0}{3kT}$$

- Para comprender el **ferromagnetismo**, se supone que

$$H_m = H + \gamma M$$

con $\gamma \gg \frac{1}{3}$. (Esta contribución proviene de una energía mecánica cuántica que depende de la orientación relativa de los momentos magnéticos de espín; se suma a la energía magnética $\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{H}$ y puede por tanto expresarse en términos de un campo magnético efectivo, aun cuando su origen sea electrostático.) Entonces, esta ecuación y la ecuación de Langevin admiten una solución con $H = 0$, $M \neq 0$, mientras T esté por debajo de la **temperatura de Curie**.

- Aun por debajo de la temperatura de Curie, una muestra macroscópica de material ferromagnético puede no mostrar momento magnético neto debido a su **estructura de dominios**.

PROBLEMAS

10.1 Un magnetón de Bohr se define como el momento magnético de un electrón que circula en la "órbita de Bohr" clásica del átomo de hidrógeno. Ésta es una órbita circular de exactamente una *longitud de onda de de Broglie*, para la cual la atracción de Coulomb proporciona la

Inducción electromagnética

La inducción de una fuerza electromotriz al cambiar el flujo magnético fue observada por primera vez por Faraday y Henry a principios del siglo XIX. A partir de sus experimentos iniciales en esta teoría se han creado los generadores modernos, los transformadores, etc. Este capítulo trata primordialmente de la formulación matemática de la ley de la inducción electromagnética, y su aprovechamiento en casos sencillos. La ecuación que caracterizó a la electrostática fue:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

o, en forma de integral,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Estas ecuaciones se obtienen directamente de la ley de Coulomb y no son afectadas por la fuerza magnética debida a una corriente estacionaria. Sin embargo, no son válidas para los campos más generales que son dependientes del tiempo, y estos casos son los que vamos a considerar ahora.

11.1 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Primero introduciremos el concepto de fuerza electromotriz.

Definiremos la *fuerza electromotriz*, o *fem*, alrededor de un circuito como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \tag{11-1}$$

Con los campos E y B estáticos, esta fem siempre fue cero. Ahora veremos el caso donde no es nula. Como ahora el campo E no puede definirse a partir de la ley de Coulomb, es válido preguntarnos cómo se define. Se define de forma tal que la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

es *siempre* la fuerza electromagnética que actúa sobre una carga de prueba q .

Los resultados de un gran número de los experimentos realizados pueden resumirse asociando una fem inducida

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11-2)$$

con un cambio en el flujo magnético que atraviesa por un circuito. Se encuentra que este resultado, conocido como *ley de Faraday de la inducción electromagnética*, es independiente de la forma en que cambia el flujo; el valor de \mathbf{B} en distintos puntos interiores del circuito puede cambiar de muchas maneras.

Es muy importante darse cuenta de que la ecuación (11-2) representa una ley experimental independiente. No puede deducirse de otras leyes experimentales y, efectivamente, no es, como se dice a veces, una consecuencia de la conservación de la energía aplicada al equilibrio energético de corrientes en campos magnéticos.

Ya que por definición

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (11-1)$$

y

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (11-3)$$

la ecuación (11-2) puede escribirse como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (11-4)$$

Si el circuito es rígido y estacionario, la derivada del tiempo puede tomarse dentro de la integral, donde se convierte en una derivada parcial del tiempo. Además se puede usar el teorema de Stokes para transformar la integral de línea de \mathbf{E} en la integral de superficie $\nabla \times \mathbf{E}$. El resultado de estas transformaciones es

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (11-5)$$

Si la Ley de Faraday en la forma de la ecuación (11-5) es válida para todas las superficies fijas S , se deduce que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11-6)$$

Este resultado es la *forma diferencial de la Ley de Faraday*.

Ésta es la generalización requerida de $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, que era válida para campos estáticos. (Los medios en movimiento y otras sutilezas requieren un tratamiento más cuidadoso, que está más allá del alcance de este texto.)

El signo negativo en la ley de Faraday indica, como puede demostrarse fácilmente, que el sentido de la fem inducida es tal que tiende a oponerse al cambio que la produce. Así, si intentamos aumentar el flujo que atraviesa un circuito, la fem inducida tiende a crear corrientes de sentido tal que disminuya el flujo. Si intentamos introducir un polo de un imán en una bobina, las corrientes originadas por la fem inducida forman un campo magnético que tiende a repeler el polo. Todos estos fenómenos están comprendidos en la siguiente ley.

Ley de Lenz. En caso de que haya un cambio en un sistema magnético, sucede algo que tiende a oponerse al cambio.

La utilidad de la ley de Lenz no debe menospreciarse. En muchos casos representa la forma más rápida de obtener información sobre reacciones electromagnéticas. Aun si se dispone de otros métodos, permite una valiosa comprobación.

Para hacerse una idea de la ley de Faraday, puede ser útil tomar un ejemplo que, por lo general, se considera como un caso particular de la ley pero que *puede* analizarse completamente según la teoría electrostática desarrollada en los capítulos anteriores. Supongamos que un alambre metálico recto de longitud l se mueve en una dirección perpendicular a su longitud con una velocidad \mathbf{v} . Supongamos también que existe un campo magnético \mathbf{B} perpendicular al plano en el cual se mueve el alambre, como muestra la figura 11.1. Las cargas libres del alambre experimentarán la fuerza de Lorentz

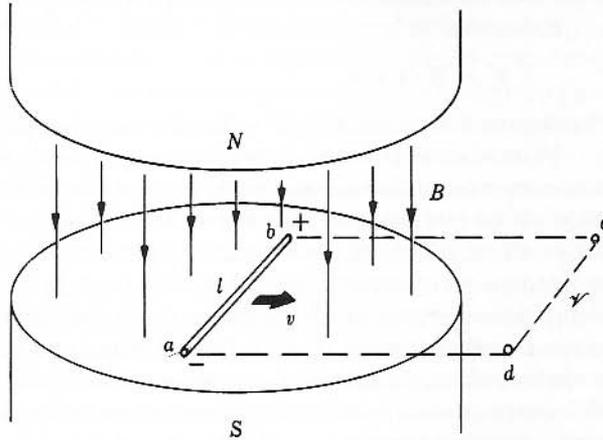
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (8-5) \quad (11-7)$$

que lleva las cargas positivas y negativas a los extremos opuestos del alambre, debido al término $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. En el estado estacionario, cuando las cargas libres no se mueven con respecto al alambre, la fuerza total sobre una carga es igual a cero; es decir, la fuerza magnética debe estar equilibrada en cada punto del alambre por una fuerza eléctrica opuesta de igual magnitud generada por la separación de las cargas,

$$E = vB \quad (11-8)$$

FIGURA 11.1

Voltaje producido por el movimiento de un alambre en un campo magnético.



Si el campo B es uniforme, entonces E es constante a lo largo del alambre y la diferencia de potencial entre los extremos es

$$\Delta\varphi = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = El \quad (11-9)$$

Si llamamos \mathcal{V} a esta diferencia de potencial, entonces, al combinar la ecuación (11-8) con (11-9), tenemos que

$$\mathcal{V} = Blv \quad (11-10)$$

En este ejemplo, el campo B es independiente del tiempo y, por tanto, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ y $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, igual que en electrostática. La integral $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ es independiente de la trayectoria; en particular, si imaginamos un circuito $abcda$ que se extiende hacia afuera del campo magnético, \mathcal{V} es también la diferencia de potencial a lo largo de la trayectoria $bcda$. De hecho, si b y c , y en forma semejante d y a , están unidos por alambres perfectamente conductores, \mathcal{V} será el voltaje entre los terminales c y d exteriores al campo magnético.

El segundo término de la ecuación (11-10) puede expresarse de forma distinta si notamos que el flujo Φ a través del circuito $abcda$ cambia de acuerdo con $d\Phi/dt = B dA/dt = Bl dx/dt = -Blv$. Así,

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11-11)$$

Esta ecuación tiene la forma de la ley de Faraday, ecuación (11-2), excepto que \mathcal{V} no es una fem en el sentido que define la ecuación (11-1), puesto que $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ alrededor de toda trayectoria cerrada en este problema. La ecuación (11-10) se puede generalizar escribiéndola de forma vectorial. Si \mathbf{v} está arbitrariamente orientada con respecto a \mathbf{l} , entonces la única componente de \mathbf{v} que es perpendicular a \mathbf{l} contribuye a \mathcal{V} . Por tanto, \mathcal{V} es proporcional a $\mathbf{l} \times \mathbf{v}$. Para un \mathbf{B} arbitrario, únicamente la componente perpendicular

al plano de \mathbf{l} y \mathbf{v} contribuye a \mathcal{V} . Como $\mathbf{l} \times \mathbf{v}$ es perpendicular al plano \mathbf{l}, \mathbf{v} , \mathcal{V} puede escribirse como

$$\mathcal{V} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v} \quad (11-12)$$

El voltaje en la ecuación (11-12) se llama a veces *fem por movimiento*.

Veamos ahora el mismo problema desde el punto de vista del alambre; esto es, imaginemos que existe un sistema de coordenadas que se mueve con el alambre de modo que en este sistema el alambre está en reposo y el imán se está moviendo con una velocidad v hacia la izquierda de la figura 11.1. Se podría fácilmente creer que, moviéndose con el alambre, uno todavía observaría la misma separación de carga y el mismo potencial entre los extremos que vimos anteriormente. Sin embargo, la *explicación* es completamente distinta. En este sistema de coordenadas no puede existir fuerza magnética, puesto que el alambre está en reposo. Por otro lado, el campo magnético no permanece constante con el tiempo; en cualquier punto cambia de un valor B a cero, aproximadamente, cuando el extremo del imán en movimiento pasa por el punto. Veremos que la modificación del rotacional de E , ecuación (11-6), es suficiente para obtener el mismo resultado de \mathcal{V} para la diferencia de potencial en este sistema de coordenadas. En el estado estacionario, la fuerza que actúa sobre las cargas libres en el interior del alambre deberá ser nula,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = 0$$

pero no hay fuerza magnética, ya que $\mathbf{v} = 0$. Por tanto, debe anularse la fuerza eléctrica en el interior del alambre,

$$\mathbf{E} = 0 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (11-13)$$

Existe aún un campo \mathbf{E}_1 causado por la separación de cargas, que es la misma separación que en el caso anterior. Este campo es anulado en el interior del alambre por un campo \mathbf{E}_2 asociado al campo magnético variable,

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Si consideramos nuevamente la curva cerrada $abcd$,

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 + \mathcal{V}$$

El primer término del lado derecho es cero, porque \mathbf{E} se anula dentro del alambre, y la segunda integral a lo largo de la trayectoria $bcda$ es lo que llamamos \mathcal{V} en el caso anterior. A partir de esto y de la ecuación (11-2), encontramos nuevamente que

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11-11)$$

Junto con la fuerza de Lorentz, ecuación (11-7), el rotacional generalizado de E , ecuación (11-6), da el mismo resultado que la ecuación (11-11) en *cualquiera* de los

dos sistemas inerciales de coordenadas. Por tanto, la ecuación (11-6) es de validez general.* Ya que el resultado integral de la ecuación (11-11) es válido en ambos sistemas coordenados, no es ilógico considerarlo como la ley de Faraday en ambos casos, aunque, hablando estrictamente, sólo en el segundo caso existe una fem como las que define la ecuación (11-1). En ciertas situaciones, puede que no sea tan obvio qué circuito debe utilizarse para calcular Φ de la ecuación (11-11), como por ejemplo en el problema 11.4. Las ecuaciones que siempre se aplican a los campos E y B en cualquier sistema de coordenadas inercial son (11-6) y (11-7). Al utilizarlas no surge ninguna ambigüedad respecto a si se determina la fem o la "fem por movimiento".

Este ejemplo es también de interés como prototipo de los generadores eléctricos prácticos. Hagamos referencia nuevamente a la figura 11-1. Si el segmento ab del alambre se deslizara a lo largo de dos alambres altamente conductores, bc y ad (haciendo un excelente contacto eléctrico con estos alambres), y si se conecta una resistencia entre los terminales c y d , fluiría una corriente I por el circuito.† En este caso se requeriría la aplicación de una fuerza mecánica al alambre (o al imán, en el segundo caso) para mantener una velocidad constante v , de tal forma que la suma de la fuerza aplicada y la fuerza magnética BIl sobre el alambre fuese cero. La potencia desarrollada por la fuerza mecánica aplicada compensa a la potencia I^2R que se disipa en el resistor. Por lo que respecta al voltaje terminal entre c y d , no importa si es el alambre o el imán el que se mueve en el generador (normalmente es el alambre el que se mueve). En cualquier caso, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ a lo largo de cualquier trayectoria cerrada que no encierre el campo magnético del generador.

En nuestros dos ejemplos, la ecuación generalizada

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11-6)$$

es válida para ambos. Al ocurrir que en el sistema de coordenadas del imán $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, ha sido posible hacer un análisis electrostático. Sin embargo, no sería exacto concluir que siempre se puede encontrar un sistema de coordenadas donde $\partial \mathbf{B} / \partial t$ sea nulo. Un tercer ejemplo basado en la figura 11.1 ilustrará este punto. Supongamos que ni el alambre ni el imán se mueven, pero supongamos también que el imán es un electroimán cuyo campo puede aumentarse o disminuirse de magnitud aumentando o disminuyendo la corriente de su bobinado. Ahora no existe un sistema de coordenadas en el que $\partial \mathbf{B} / \partial t$

* Desde otro punto de vista, en el capítulo 22 encontraremos que el campo $E_2 = vB$ que satisface las ecuaciones (11-8) y (11-13) aparece en el sistema "móvil" de coordenadas a partir de las transformaciones relativistas de Lorentz de los campos E y B . El campo E_2 reemplaza la fuerza magnética que se anula en el sistema "móvil".

† Este dispositivo no podría constituir un generador de corriente directa práctico debido a que el imán debe tener una extensión finita; pero si el alambre se moviera hacia adelante y hacia atrás, se generaría una corriente alterna. (Véase el problema 11.5.)

sea nulo. Sin embargo, la ecuación (11-6) sigue siendo válida y la ley de Faraday, ecuación (11-2), nos da la fem alrededor de cualquier circuito (por ejemplo, *abcd*). Ésta es la situación que se produce en los transformadores y en otros dispositivos prácticos que no tienen partes mecánicas móviles, y será el tema del resto del presente capítulo.

11.2 AUTOINDUCTANCIA

En esta sección se estudiará la relación que hay entre el flujo y la intensidad de corriente asociada con un circuito aislado y se aprovechará para introducir un práctico parámetro de un circuito: la autoinductancia. El flujo magnético que atraviesa un circuito aislado (el flujo producido por la corriente que circula por el propio circuito) depende de la forma geométrica del circuito y, según la ecuación (8-26), es linealmente dependiente de la intensidad de corriente en el circuito. Por tanto, para un circuito estacionario rígido, los únicos cambios de flujo resultan de cambios en la corriente. Esto es,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (11-14)$$

Este resultado es válido aun cuando la ecuación (8-26) no lo sea. El único requisito es que Φ dependa sólo de la corriente. No obstante, si la ecuación (8-26) es válida o, con mayor generalidad, si Φ es directamente proporcional a la intensidad de corriente, entonces $d\Phi/dI$ es una constante, igual a Φ/I .

En cualquier caso, la *autoinductancia*, L , se define como

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \quad (11-15)$$

Cuando es esencial distinguir entre Φ/I y $d\Phi/dI$, esta última se llama *inductancia incremental*. A menos que se indique otra cosa, es más seguro asociar la palabra *inductancia* con la ecuación (11-15). De las ecuaciones (11-14), (11-15) y (11-2) se desprende que la expresión de la fem inducida está dada por

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (11-16)$$

Esta ecuación es de considerable importancia práctica.

Como ilustración del empleo de la ecuación (11-15) para el cálculo de la inductancia, se calculará la autoinductancia de una bobina toroidal.

EJEMPLO 11.1
Autoinductancia de una bobina toroidal

La bobina a la que hacemos referencia (con N vueltas) se muestra en la figura 11.2. Queremos calcular su autoinductancia. La ecuación (11-15) se aplica a un circuito completo; es decir, no sólo a la bobina toroidal de la figura 11.2, sino también al circuito externo conectado a los terminales 1 y 2. Utilizando conductores trenzados o un cable coaxial, que no producen prácticamente ningún campo magnético externo, la parte del circuito externo que produce campo puede llevarse lo suficientemente lejos como para que no contribuya al flujo en el toroide.

Solución: Si el toroide está, pues, aislado y si por la fem entendemos el voltaje entre los terminales 1 y 2, entonces se puede utilizar la ecuación (11-15) para obtener la inductancia de la bobina toroidal. De la ley de circuitos de Ampère, la inducción magnética en el interior de una bobina toroidal es

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \quad (11-17)$$

donde N es el número de vueltas, l la longitud media e I la intensidad de corriente en la bobina. (Las ecuaciones 11-17 y 11-18 implican la aproximación de despreciar la variación de la inducción magnética sobre el área de la sección transversal. En el problema 11.10 se considerarán los detalles de esta aproximación.) El flujo que atraviesa cada vuelta es entonces

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 N I A}{l} \quad (11-18)$$

y el flujo total que pasa por las N vueltas es

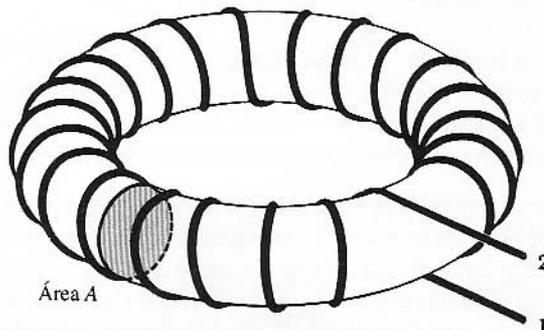
$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} I \quad (11-19)$$

La inductancia, entonces, es simplemente

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (11-20)$$

FIGURA 11.2

Arrollamiento toroidal



La unidad de inductancia en el sistema mks es el henry (H) que, de la ecuación (11-16), es igual a un volt-segundo/ampere, ya que la unidad de la fem es el volt. La ecuación (11-20) indica que las dimensiones de μ_0 , que se dieron anteriormente como weber/ampere-metro o tesla-metro/ampere, pueden darse como henries/metro.

11.3 INDUCTANCIA MUTUA

En la sección anterior sólo se consideraron circuitos aislados, de modo que todo el flujo que atravesaba el circuito se debía a la corriente en el propio circuito. Esta restricción puede eliminarse si se supone que hay n circuitos, identificados con 1, 2, El flujo que atraviesa uno de estos circuitos, digamos el identificado con i , puede expresarse como

$$\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \cdots + \Phi_{ii} + \cdots + \Phi_{in} = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} \quad (11-21)$$

Esto es, puede escribirse como la suma de los flujos debidos a cada uno de los n circuitos, siendo Φ_{ij} el flujo que pasa por el i -ésimo circuito debido al circuito j , y así sucesivamente. La fem inducida en el i -ésimo circuito, \mathcal{E}_i , puede escribirse como

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\left\{ \frac{d\Phi_{i1}}{dt} + \cdots + \frac{d\Phi_{ii}}{dt} + \cdots + \frac{d\Phi_{in}}{dt} \right\} = -\sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dt} \quad (11-22)$$

Si cada uno de estos circuitos es estacionario y rígido, los únicos cambios en los Φ_{ij} son los que resultan de los cambios en las intensidades de corriente. Por tanto,

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt} \quad (11-23)$$

Los coeficientes $d\Phi_{ij}/dI_j$ son constantes, independientes de la corriente, si el medio magnético en el problema es lineal.

En cualquier caso, lineal o no lineal,

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}, \quad i \neq j \quad (11-24)$$

se define como la *inductancia mutua* entre el circuito i y el circuito j .

Se verá posteriormente que $M_{ij} = M_{ji}$ y, en consecuencia, no hay posibilidad de ambigüedad en los subíndices. Por supuesto, $d\Phi_{ii}/dI_i$ es simplemente la autoinductancia del i -ésimo circuito, que se expresa como L_i o M_{ii} . Las unidades de la inductancia mutua son las mismas que las de la autoinductancia, es decir, henries.

Ejemplo 11.2
Inductancia mutua entre dos
embobinados toroidales

Consideremos la configuración de la figura 11.2 con un embobinado o arrollamiento de N_1 vueltas, al cual se le añade un segundo embobinado toroidal de N_2 vueltas. Para esta situación, una corriente de intensidad I_1 en el primer embobinado produce una inducción magnética

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

¿Cuál es la inductancia mutua entre los dos circuitos?

Solución: Los flujos que atraviesan los dos circuitos son:

$$\Phi_{11} = \frac{\mu_0 N_1^2 A I_1}{l} \quad \text{y} \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A I_1}{l}$$

De estos flujos se sigue que

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{l} \quad (11-25)$$

como encontramos en la sección anterior, y utilizando la ecuación (11-24),

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad (11-26)$$

Invirtiendo el procedimiento y considerando una corriente I_2 , se tiene

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{l} \quad (11-27)$$

y

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad (11-28)$$

lo que demuestra que para este caso $M_{12} = M_{21}$. Este resultado es general y será analizado posteriormente en la sección 12.1. Además, las ecuaciones (11-25), (11-26) y (11-27) pueden combinarse para dar

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (11-29)$$

La ecuación (11-29) representa un límite que está impuesto sobre la inductancia mutua entre dos circuitos; es decir, siempre es menor o igual que la raíz cuadrada del producto de las autoinductancias de los dos circuitos. En vista de este límite, a menudo se introduce un coeficiente k de acoplamiento, que se define como

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (11-30)$$

Un valor de $k = 1$ implica que todo el flujo magnético producido por el circuito 1 atraviesa el circuito 2 y viceversa.

11.4 LA FÓRMULA DE NEUMANN

Para dos circuitos rígidos estacionarios en un medio lineal (el vacío, por el momento), la inductancia mutua es

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \quad (11-31)$$

Esta ecuación es válida simplemente porque Φ_{21} es proporcional a I_1 , lo que hace que Φ_{21}/I_1 y $d\Phi_{21}/dI_1$ sean iguales. En este caso, se puede usar la ecuación (8-26) para calcular M_{21} . El flujo está dado por

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right\} \cdot \mathbf{n} da_2 \quad (11-32)$$

Sin embargo,

$$\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (11-33)$$

Por tanto,

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \nabla_2 \times \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right\} \cdot \mathbf{n} da_2 \quad (11-34)$$

Utilizando el teorema de Stokes para transformar la integral de superficie, se tiene

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (11-35)$$

que se llama *fórmula de Neumann* para la inductancia mutua. La simetría mencionada anteriormente es evidente de la ecuación (11-35).

La fórmula de Neumann es igualmente aplicable a la autoinductancia, en cuyo caso se expresa como

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}'_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} \quad (11-36)$$

Debe tenerse cuidado al aplicar la ecuación (11-36) debido a la singularidad en $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1$; no obstante, si se tiene cuidado, esta ecuación es útil algunas veces.

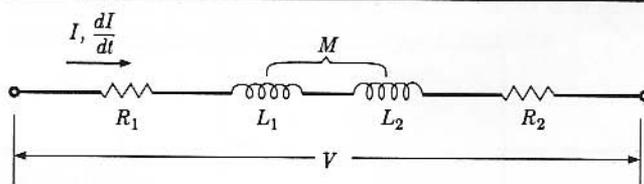
Las ecuaciones (11-35) y (11-36) son generalmente difíciles de aplicar en el cálculo de la inductancia, excepto para circuitos de forma geométrica sencilla. Pero la ecuación (11-35) en particular es muy importante en el estudio de fuerzas y momentos de rotación ejercidos por un circuito sobre otro. Esta aplicación se considerará en el capítulo 12.

11.5 INDUCTANCIAS EN SERIE Y EN PARALELO

Las inductancias se conectan a menudo en serie y en paralelo y, como en el caso de los resistores y condensadores, es importante conocer el resultado de dichas conexiones.

FIGURA. 11.3

Conexión en serie de dos inductores.



Podríamos proceder con una derivación basada simplemente en $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$ y obtener fórmulas para la inductancia efectiva de dos inductancias en serie o en paralelo. Sin embargo, hacer esto significaría dejar de lado el hecho práctico de que un inductor siempre tiene cierta resistencia interna. Una inductancia perfecta es mucho más difícil de aproximar prácticamente que una capacidad perfecta o una resistencia perfecta. Por este motivo, las combinaciones en serie y en paralelo de esta sección contendrán siempre tanto resistencias como inductancias.

El circuito de la figura 11.3 corresponde a dos inductores en serie. Al sumar las caídas de voltaje en el circuito es importante observar que M puede ser positiva o negativa (al cambiar el sentido en que cualquiera de los dos circuitos, C_1 o C_2 es atravesado, cambia el signo de M en la ecuación 11-35). Teniendo en cuenta esto, se ve que la suma de las caídas de voltaje del circuito de la figura 11.3 es

$$V + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = R_1 I + R_2 I$$

o

$$V = R_1 I + L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} + R_2 I + L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} \quad (11-37)$$

Este resultado es equivalente a

$$V = (R_1 + R_2)I + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt} \quad (11-38)$$

El circuito se parece entonces a un resistor de resistencia $R_1 + R_2$ en serie con una inductancia $L_1 + L_2 + 2M$. La magnitud de la inductancia es $L_1 + L_2 + 2|M|$ para el acoplamiento positivo (es decir, para flujos debidos a I_1 y a I_2 en el mismo sentido en cada bobina) y es $L_1 + L_2 - 2|M|$ para el acoplamiento negativo. Una descripción alternativa de la inductancia mutua es

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad -1 \leq k \leq 1 \quad (11-39)$$

La inductancia efectiva del circuito en serie será entonces

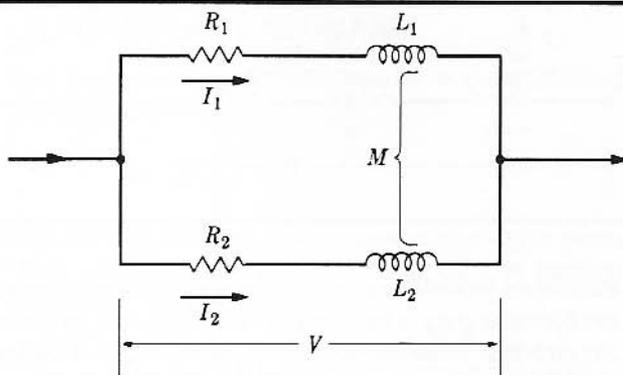
$$L_{ef} = L_1 + 2k\sqrt{L_1 L_2} + L_2 \quad (11-40)$$

Si se puede variar k , entonces puede construirse una inductancia variable. (En los primeros días de la radio ésta fue la forma común de sintonizar circuitos resonantes; véase el Cap. 13.)

La conexión en paralelo que muestra la figura 11.4 no es tan sencilla como la del circuito en serie. De hecho, el circuito representado no se comporta como un simple

FIGURA 11.4

Conexión en paralelo de dos inductores.



circuito L - R en serie, de aquí que no sea posible decir que la inductancia efectiva y la resistencia efectiva sean determinadas funciones de L_1 , L_2 , R_1 y R_2 . Sin embargo, si R_1 y R_2 son despreciables, entonces

$$V = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \quad (11-41)$$

$$V = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

Si primero se elimina dI_1/dt y luego dI_2/dt de las ecuaciones (11-41), se tiene como resultado

$$V(L_2 - M) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_1}{dt} \quad (11-42)$$

$$V(L_1 - M) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_2}{dt}$$

Sumando éstas se tiene

$$V = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt} \quad (11-43)$$

Por tanto, la inductancia efectiva de dos inductores en paralelo es

$$L_{\text{ef}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (11-44)$$

donde, nuevamente, el signo de M depende de la forma en que se conecten los inductores.

El uso más importante de las inductancias se da en circuitos de corriente alterna. Para un circuito que funciona a una sola frecuencia, se puede obtener un circuito serie

equivalente a la figura 11.4; sin embargo, tanto la resistencia equivalente como la inductancia equivalente dependen de la frecuencia.

11.6 RESUMEN

En este capítulo hemos pasado de los campos estáticos a los que se llaman lentamente variables. La nueva generalización de las ecuaciones del campo es

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Ésta es la **tercera** de las **cuatro ecuaciones de Maxwell**, que es siempre válida, junto con las dos ecuaciones de la divergencia y la de la **fuerza de Lorentz**,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

(En este punto de nuestro desarrollo de las ecuaciones fundamentales de la electricidad y magnetismo, tenemos tres de las cuatro ecuaciones de Maxwell en forma final. Únicamente queda por generalizar la ecuación del rotacional de H .) La forma integral de la ecuación diferencial, recién dada, de la **ley de Faraday** es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde la **fem** \mathcal{E} alrededor de un circuito fijo C se define como

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

(Puede suceder que en ciertos problemas sea posible encontrar un sistema coordinado en el que $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ y el problema puede analizarse electrostáticamente, pero éste no es necesariamente el caso.)

- La manera más sencilla de determinar la polaridad correcta de un voltaje inducido es mediante la **ley de Lenz**.
- La "**fem por movimiento**" de un alambre recto que se mueve en un campo magnético es:

$$\mathcal{V} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v}$$

- La **autoinductancia** de un circuito fijo (o elemento de circuito) se define como

$$L = \frac{d\Phi}{dI}$$

de modo que

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

Para un toroide (o un solenoide largo) se deduce fácilmente que L es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

- La **inductancia mutua** de dos circuitos se define como

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dl_j}$$

De aquí que

$$M_{ii} = L_i$$

y

$$M_{12} = M_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad -1 \leq k \leq 1$$

- Las inductancias puras conectadas en serie o en paralelo se suman de acuerdo con las mismas fórmulas que se utilizan para las resistencias, suponiendo que su inductancia mutua y su resistencia intrínseca pueden despreciarse.

PROBLEMAS

11.1 Un conductor metálico que tiene la forma de un segmento de alambre de longitud l se mueve en un campo magnético \mathbf{B} con velocidad \mathbf{v} . Partiendo de una consideración detallada de la fuerza de Lorentz sobre los electrones en el alambre, demuestre que los extremos de éste se encuentran a la diferencia de potencial: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v}$.

11.2 Una varilla metálica de un metro de longitud gira en torno a un eje, que pasa por uno de sus extremos y que es perpendicular a la varilla, con una velocidad angular de 12 rad/s. El plano de rotación de la varilla es perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.3 T. ¿Cuál es la fem inducida por movimiento entre los extremos de la varilla?

11.3 En un acelerador betatrón, un ion de carga q y masa m recorre una órbita circular a una distancia R del eje de simetría de la máquina. El campo magnético tiene simetría cilíndrica; es decir, su componente z es $B_z = B(r)$ en el plano de la órbita, donde r es la distancia al eje de simetría. (a) Demuestre que la velocidad del ion es $v = qB(R)R/m$. (b) Si la magnitud del campo magnético se incrementa lentamente, demuestre que la fem inducida en la órbita del ion es tal que acelera al ion. (c) Demuestre que para que el ion permanezca en la misma órbita, la variación radial del campo B dentro de la órbita debe satisfacer la siguiente condición: el promedio espacial del incremento de $B(r)$ (promediado sobre el área encerrada por la órbita) debe ser igual al doble del incremento de $B(R)$ durante el mismo intervalo de tiempo.

11.4 El generador unipolar de Faraday consiste en un disco de metal que gira en un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano del disco. Demuestre que la diferencia de potencial que se genera entre el centro y la periferia del disco es $\mathcal{V} = f\Phi$, donde Φ es el flujo que atraviesa el disco y f es la frecuencia con la que gira. ¿Cuál será el voltaje si $f = 3000$ r/min y $\Phi = 0.1$ Wb?

11.5 Un alternador consiste en una bobina de N vueltas de área A , que gira con una frecuencia f en un campo B , de modo tal que el diámetro siempre se encuentra perpendicular al campo. (a) Encuentre la fem en la bobina. (b) ¿Cuál es la amplitud del voltaje alterno si $N = 100$ vueltas, $A = 10^{-2}$ m², $B = 0.1$ T y $f = 2000$ r/min?

Energía magnética

Establecer un campo magnético requiere un gasto de energía, lo cual se concluye directamente de la ley de inducción de Faraday. Si una fuente de voltaje \mathcal{V} se aplica a un circuito, entonces la intensidad de corriente que pasa por el circuito puede expresarse con la ecuación

$$\mathcal{V} + \mathcal{E} = IR \quad (12-1)$$

donde \mathcal{E} es la fem inducida y R es la resistencia del circuito de corriente. El trabajo realizado por \mathcal{V} para mover el incremento de carga $dq = I dt$ a través del circuito es

$$\mathcal{V} dq = \mathcal{V} I dt = -\mathcal{E} I dt + I^2 R dt = I d\Phi + I^2 R dt \quad (12-2)$$

cuya última expresión se obtiene con ayuda de la ley de Faraday, ecuación (11-2). El término $I^2 R dt$ representa la conversión irreversible de energía eléctrica en calor que se lleva a cabo en el circuito, pero este término incluye todo el trabajo realizado por \mathcal{V} sólo en los casos en los que el cambio de flujo sea cero. El término adicional, $I d\Phi$, es el trabajo efectuado contra la fem inducida en el circuito. Es la parte del trabajo realizado por \mathcal{V} que se invierte en alterar la estructura del campo magnético. Despreciando el término $I^2 R dt$, escribimos

$$dW_b = I d\Phi \quad (12-3)$$

donde el subíndice b indica que éste es el trabajo realizado por fuentes de energía eléctrica externas (es decir, por baterías). El incremento de trabajo, ecuación (12-3), puede ser positivo o negativo. Es positivo cuando el cambio de flujo $d\Phi$ a través del circuito tiene el mismo sentido que el flujo producido por la corriente I .

Para un circuito rígido estacionario que no tenga otras pérdidas de energía que no sean pérdidas de calor por efecto Joule (es decir, no hay histéresis), el término dW_b es igual al cambio en la *energía magnética* del circuito. En este capítulo desarrollaremos

un número de expresiones equivalentes para la energía magnética de un sistema de circuitos acoplados, y además deduciremos la ecuación para la fuerza o momento de rotación sobre un circuito rígido. Las pérdidas por histéresis se analizarán en la sección 12.4; por ahora restringiremos nuestra atención a los sistemas magnéticos reversibles. El desarrollo será muy semejante al del capítulo 6.*

12.1 ENERGÍA MAGNÉTICA DE CIRCUITOS ACOPLADOS

En esta sección obtendremos una expresión para la energía magnética de un sistema de circuitos de corriente que interactúan. Si hay n circuitos, entonces, según la ecuación (12-3), el trabajo eléctrico hecho en contra de las fem inducidas está dado por

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i \quad (12-4)$$

Esta expresión es perfectamente general; es válida independientemente de cómo se producen los incrementos de flujo $d\Phi_i$. Sin embargo, nos interesa particularmente el caso en que los $d\Phi_i$ se producen por cambios de corriente en los mismos n circuitos. En estas circunstancias los cambios de flujo se correlacionan directamente con los cambios en dichas corrientes:

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j \quad (12-5)$$

Si los circuitos son rígidos† y estacionarios, entonces no hay trabajo mecánico asociado a los cambios de flujo $d\Phi_i$, y dW_b es exactamente igual al cambio en la energía magnética, dU , del sistema. Observe que aquí limitamos nuestra atención a los circuitos estacionarios, de modo que la energía magnética pueda calcularse como un término de trabajo. Posteriormente, dejaremos que los circuitos se muevan uno con respecto a otro, pero entonces no podremos identificar dU con dW_b .

La energía magnética U de un sistema de n circuitos estacionarios rígidos se obtiene integrando la ecuación (12-4) desde la situación de flujo cero (correspondiente a todas las $I_i = 0$) hasta el conjunto final de valores del flujo. Para un grupo de *circuitos rígidos* que contienen o están inmersos en *medios magnéticos lineales*, los Φ_i se relacionan linealmente con las corrientes de los circuitos y la energía magnética es

* Una llamada de atención: Está implícita en las deducciones de este capítulo la consideración de que los circuitos eléctricos *no irradian* energía electromagnética. En otras palabras, las corrientes en los circuitos deben "variar lentamente" (para un análisis de lo que se quiere decir con esta terminología, véase la sección 13.1). Si se quiere tratar el caso general, sin restricciones en las corrientes o en el tamaño del circuito, deben utilizarse las relaciones de energía deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell (véase la sección 16.3).

† Por circuito rígido, entendemos un circuito cuya forma es fija, pero que puede ser movido en su totalidad.

independiente de la forma en que estas corrientes se llevan a su conjunto final de valores. Como esta última situación es de considerable importancia, restringiremos nuestra atención al caso lineal del circuito rígido.

Debido a que la energía final es independiente del orden en el que se varían las corrientes, podemos elegir un proceso particular para el cual W se calcule fácilmente. Este proceso es aquel en el que todas las corrientes (y, en consecuencia, todos los flujos) se llevan juntas a sus valores finales, es decir, en cualquier instante, todas las corrientes (y todos los flujos) estarán a una misma fracción de sus valores finales. Llamemos α a esta fracción. Si a los valores finales de la corriente se les asignan los símbolos

$$I_1, I_2, \dots, I_n$$

entonces, en cualquier etapa, $I'_i = \alpha I_i$; además, $d\Phi_i = \Phi_i d\alpha$. La integración de la ecuación (12-4) da

$$\int dW_b = \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^n I'_i \Phi_i = \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i$$

Por tanto, la *energía magnética* de n circuitos acoplados es

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad (\text{circuitos rígidos, medios lineales}) \quad (12-6)$$

Con la ayuda de la ecuación (12-5), que para circuitos rígidos el sistema lineal puede integrarse directamente, la energía magnética puede expresarse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j \\ &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \dots + \frac{1}{2} L_n I_n^2 \\ &\quad + M_{12} I_1 I_2 + M_{13} I_1 I_3 + \dots + M_{1n} I_1 I_n \\ &\quad + M_{23} I_2 I_3 + \dots + M_{n-1,n} I_{n-1} I_n \\ &\quad (\text{circuitos rígidos, medios lineales}) \end{aligned} \quad (12-7)$$

Aquí hemos utilizado los resultados y la notación de las secciones 11.3 y 11.4: $M_{ij} = M_{ji}$; $M_{ii} = L_i$.

Para *dos* circuitos acoplados, la última ecuación se reduce a

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (12-8)$$

donde, para simplificar, hemos escrito M en lugar de M_{12} . El término $M I_1 I_2$ puede ser positivo o negativo, pero la energía magnética total U debe ser positiva (o cero) para

cualquier par de valores de corriente: I_1 e I_2 . Representando la razón de corrientes I_1/I_2 con x obtenemos

$$U = \frac{1}{2}I_2^2(L_1x^2 + 2Mx + L_2) \geq 0$$

El valor de x que hace que U sea un mínimo (o un máximo) se encuentra derivando U con respecto a x e igualando el resultado a cero:

$$x = -\frac{M}{L_1} \quad (12-9)$$

La segunda derivada de U con respecto a x es positiva, lo que demuestra que la ecuación (12-9) es la condición para que haya un mínimo. La energía magnética $U \geq 0$ para todo x ; en particular, el valor mínimo de U (definido por $x = -M/L_1$) es cero o mayor que cero. Por tanto,

$$\frac{M^2}{L_1} - \frac{2M^2}{L_1} + L_2 \geq 0$$

o

$$L_1L_2 \geq M^2 \quad (12-10)$$

resultado que se estableció, pero no se demostró, en la sección 11.3.

Para un solo circuito

$$\Phi = LI \quad (12-11)$$

$$U = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}$$

DENSIDAD DE ENERGÍA EN EL CAMPO MAGNÉTICO

La ecuación (12-7) da la energía magnética para un sistema de corrientes en función de los parámetros del circuito: corrientes e inductancias. Dicha formulación es particularmente útil porque estos parámetros pueden medirse experimentalmente de forma directa. Por otra parte, una formulación alternativa de la energía magnética en función de los vectores de campo \mathbf{B} y \mathbf{H} es de considerable interés, porque proporciona una imagen en la que la energía se almacena en el campo magnético mismo. Esta imagen puede ampliarse, como se hará en el capítulo 16, para demostrar cómo se mueve la energía a través del campo electromagnético en procesos no estacionarios.

Consideremos un grupo de circuitos rígidos por los que circulan corrientes, ninguno de los cuales se extiende hasta el infinito, y que se encuentran inmersos en un medio con propiedades magnéticas lineales. La energía de este sistema está dada por

la ecuación (12-6). Para nuestro análisis es conveniente suponer que cada circuito consta de una sola espira; entonces, el flujo Φ_i puede expresarse como

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (12-12)$$

donde \mathbf{A} es el potencial vector local. La sustitución de este resultado en la ecuación (12-6) da

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (12-13a)$$

Nos gustaría hacer la ecuación (12-13a) algo más general. Supongamos que no tenemos circuitos definidos por alambres, sino que cada "circuito" es una trayectoria cerrada en el medio (que se supone conductor) que sigue una línea de densidad de corriente. Se puede hacer que la ecuación (12-13a) represente esta situación eligiendo un gran número de circuitos contiguos (C_i), sustituyendo $I_i d\mathbf{l}_i \rightarrow \mathbf{J} \, dv$ y, finalmente, sustituyendo

$$\int_V \text{for } \sum_i \oint_{C_i}$$

En consecuencia,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \, dv \quad (12-13b)$$

La última expresión puede transformarse aún más utilizando la ecuación de campo $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ y la identidad vectorial (1.1.8):

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

de donde

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, dv - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (12-14)$$

donde S es la superficie que limita al volumen V . Como, por suposición, ninguno de los "circuitos" de corriente se extiende al infinito, es conveniente mover la superficie S a una distancia muy grande, de modo que todas las partes de esta superficie estén lejos de las corrientes. Por supuesto, el volumen del sistema debe aumentarse correspondientemente. Ahora \mathbf{H} cae al menos tan rápidamente como $1/r^2$, donde r es la distancia desde un origen cerca del centro de la distribución de corriente hasta un punto característico de la superficie S ; \mathbf{A} cae al menos tan rápidamente como $1/r$; y el área superficial es proporcional a r^2 . Por tanto, la contribución de la integral de superficie de la ecuación (12-14) decae como $1/r$ o más rápido, y si S se aleja hasta el infinito, esta contribución se anula.

Eliminando la integral de superficie en (12-14) y extendiendo el término de volumen para que incluya todo el espacio, obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv \quad (12-15)$$

puesto que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Este resultado es completamente análogo a la expresión electrostática, ecuación (6-17). La ecuación (12-15) se restringe a sistemas que contienen medios magnéticos lineales, ya que se dedujo de la ecuación (12-6).

Razonando de forma análoga a como lo hicimos en la sección 6.3, llegamos al concepto de *densidad de energía* en un campo magnético:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (12-16a)$$

Para el caso de materiales magnéticos lineales isótropos, esta ecuación se reduce a

$$u = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (12-16b)$$

12.3 FUERZAS Y MOMENTOS DE ROTACIÓN SOBRE CIRCUITOS RÍGIDOS

Hasta ahora hemos desarrollado varias expresiones alternativas para la energía magnética de un sistema de circuitos de corriente. Éstas se dan en las ecuaciones (12-6), (12-7) y (12-15). Demostraremos ahora cómo la fuerza, o el momento de rotación, sobre uno de los componentes de este circuito puede calcularse a partir del conocimiento de la energía magnética.

Supongamos que permitimos que una parte del sistema efectúe un desplazamiento rígido $d\mathbf{r}$ bajo la influencia de las fuerzas magnéticas que actúan sobre él, permaneciendo constantes todas las corrientes. El trabajo mecánico efectuado por la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre el sistema es:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (12-17)$$

al igual que en la ecuación (6-32). En estas circunstancias, el trabajo tiene dos contribuciones, como en la ecuación (6-37):

$$dW = dW_b - dU \quad (12-18)$$

donde dU es el cambio en la energía magnética del sistema y dW_b es el trabajo efectuado por las fuentes de energía externas contra las fem inducidas para mantener las corrientes constantes.

Antes de proceder a encontrar una expresión que enlace U y la fuerza sobre una parte del sistema, será necesario eliminar dW_b de la ecuación (12-18). Esto se hace fácilmente para un sistema de circuitos rígidos en medios magnéticos *lineales*. Si la forma geométrica del sistema se cambia al moverse una o más partes como unidades

rígidas, pero las corrientes permanecen inalteradas, entonces, según la ecuación (12-6),

$$dU = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i$$

Pero, de la ecuación (12-4),

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i$$

Por tanto,

$$dW_b = 2 dU \quad (12-19)$$

Utilizando esta ecuación para eliminar dW_b de la ecuación (12-18) y combinando el resultado con (12-17), obtenemos

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

o

$$\mathbf{F} = \nabla U \quad (12-20)$$

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_I$$

La fuerza sobre el circuito es el gradiente de la energía magnética cuando I se mantiene constante.

Si el circuito en consideración se restringe a moverse de tal modo que gire en torno a un eje, la ecuación (12-17) puede sustituirse por

$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \tau_1 d\theta_1 + \tau_2 d\theta_2 + \tau_3 d\theta_3$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el momento magnético sobre el circuito y $d\boldsymbol{\theta}$ es un desplazamiento angular. En estas condiciones,

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_I \quad (12-21)$$

y así sucesivamente. Los resultados (12-20) y (12-21) para corriente constante son análogos al caso electrostático de potencial constante, donde se requiere el trabajo efectuado por una batería para mantener los potenciales constantes.

En algunos otros casos de interés, los flujos que atraviesan los circuitos pueden mantenerse constantes en lugar de las corrientes. Entonces, de acuerdo con la ecuación (12-4), $dW_b = 0$, de modo que los sistemas pueden considerarse aislados.* Por consiguiente,

* No consideramos el hecho de que, en un circuito normal, podría ser necesaria una batería para abastecer la disipación de potencial IR . Si los alambres fueran superconductores ($R = 0$), el sistema podría estar, de hecho, aislado.

rígidas, pero las corrientes permanecen inalteradas, entonces, según la ecuación (12-6),

$$dU = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i$$

Pero, de la ecuación (12-4),

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i$$

Por tanto,

$$dW_b = 2 dU \quad (12-19)$$

Utilizando esta ecuación para eliminar dW_b de la ecuación (12-18) y combinando el resultado con (12-17), obtenemos

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

o

$$\mathbf{F} = \nabla U \quad (12-20)$$

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_I$$

La fuerza sobre el circuito es el gradiente de la energía magnética cuando I se mantiene constante.

Si el circuito en consideración se restringe a moverse de tal modo que gire en torno a un eje, la ecuación (12-17) puede sustituirse por

$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \tau_1 d\theta_1 + \tau_2 d\theta_2 + \tau_3 d\theta_3$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el momento magnético sobre el circuito y $d\boldsymbol{\theta}$ es un desplazamiento angular. En estas condiciones,

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_I \quad (12-21)$$

y así sucesivamente. Los resultados (12-20) y (12-21) para corriente constante son análogos al caso electrostático de potencial constante, donde se requiere el trabajo efectuado por una batería para mantener los potenciales constantes.

En algunos otros casos de interés, los flujos que atraviesan los circuitos pueden mantenerse constantes en lugar de las corrientes. Entonces, de acuerdo con la ecuación (12-4), $dW_b = 0$, de modo que los sistemas pueden considerarse aislados.* Por consiguiente,

* No consideramos el hecho de que, en un circuito normal, podría ser necesaria una batería para abastecer la disipación de potencial IR . Si los alambres fueran superconductores ($R = 0$), el sistema podría estar, de hecho, aislado.

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW = -dU$$

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\phi \quad (12-22)$$

$$\tau_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1}\right)_\phi \quad (12-23)$$

Igual que en el caso electrostático, para utilizar el método de la energía es necesario expresar U de forma analítica; es decir, debe darse una dependencia específica de U con respecto a las coordenadas variables ($x, y, z, \theta_1, \theta_2, \text{ o } \theta_3$). Cuando U puede expresarse de esta forma, el método de la energía se convierte en una técnica potente para calcular fuerzas y momentos de rotación.

Ilustraremos el método considerando dos ejemplos. Ejercicios adicionales de este tipo se encontrarán en los problemas al final del capítulo.

EJEMPLO 12.1

Fuerza entre dos circuitos por los que circulan corrientes

Calculemos la fuerza entre dos circuitos rígidos de corrientes constantes usando la energía magnética como se da en la ecuación (12-8).

Solución: La fuerza sobre el circuito 2 es

$$\mathbf{F}_2 = \nabla_2 U = I_1 I_2 \nabla_2 M,$$

donde la inductancia mutua M debe escribirse de modo que muestre su dependencia respecto a \mathbf{r}_2 . La fórmula de Neumann, ecuación (11-35), muestra esta dependencia explícitamente, de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \end{aligned} \quad (11-24)$$

expresión que evidentemente presenta simetría propia; es decir, $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

No obstante, tenemos ya una expresión para la fuerza entre dos circuitos, ecuación (8-25), y ésta parece estar en desacuerdo con la fórmula que acabamos de deducir. En realidad, las dos expresiones son equivalentes, como puede verificarse fácilmente. Desarrollemos el triple producto vectorial del integrando de la ecuación (8-25):

$$d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] = d\mathbf{l}_1 [d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)$$

La integral que contiene el último término en el lado derecho es idéntica a la ecuación (12-24); la que contiene al primer término puede escribirse como

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} d\mathbf{l}_1 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (12-25)$$

Ahora $d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ es $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ veces la proyección de $d\mathbf{l}_2$ sobre el vector $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Representemos $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ con r_{21} ; entonces, la proyección de $d\mathbf{l}_2$ es solamente dr_{21} . La integral sobre C_2 puede efectuarse para una $d\mathbf{l}_1$ fija:

$$\oint_{C_2} \frac{dr_{21}}{r_{21}^2} = -\frac{1}{r_{21}} \Big|_a^a$$

siendo los límites superior e inferior idénticos, debido a que se considera el circuito completo. Por tanto, la expresión (12-25) se anula y la ecuación (12-24) es equivalente a (8-25).

EJEMPLO 12.2**Fuerza sobre una barra de hierro en un solenoide**

Consideremos un solenoide largo, de N vueltas y longitud l , por el que circula una corriente constante de intensidad I . Una barra de hierro, de permeabilidad μ y área de sección transversal A , se introduce a lo largo del eje del solenoide. Si la barra se saca (Fig. 12.1a) hasta que sólo la mitad de su longitud permanezca dentro del solenoide, calcule aproximadamente la fuerza que tiende a hacerla volver a su posición original.

Solución: La estructura del campo magnético asociada con este problema es bastante complicada, si se consideran los efectos de bordes. Sin embargo, afortunadamente no tenemos que calcular toda la energía magnética del sistema, sino simplemente la diferencia de energía entre las dos configuraciones mostradas en la figura 12.1(a) y (b). La estructura del campo es relativamente uniforme lejos de los extremos de la barra y del solenoide. La diferencia esencial entre las configuraciones (a) y (b) es que una longitud Δx del extremo derecho de la barra (fuera de la región del campo) se traslada efectivamente a la región del campo uniforme dentro del solenoide, en un lugar más allá de la influencia desmagnetizante del polo magnético. Por tanto, ya que \mathbf{H} es aproximadamente longitudinal en la región Δx , y como la componente tangencial de \mathbf{H} es continua en la vecindad de la barra, usaremos

$$U = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dv$$

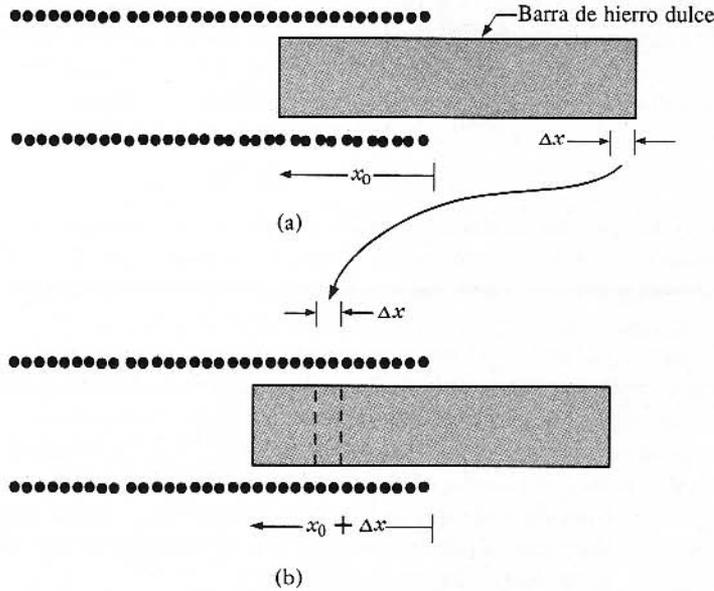
donde \mathbf{H} es constante dentro y fuera de la barra, puesto que I es constante.

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} U(x_0 + \Delta x) &\approx U(x_0) + \frac{1}{2} \int_{A \Delta x} (\mu - \mu_0) H^2 dv \\ &= U(x_0) + \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2}{l^2} A \Delta x \end{aligned}$$

FIGURA 12.1

Fuerza sobre una barra de hierro dulce introducida en un solenoide (por el método de la energía).



y de la ecuación (12-20)

$$F_x \approx \frac{1}{2}(\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2 A}{l^2} = \frac{1}{2} \chi_m \mu_0 H^2 A \quad (12-26)$$

en la dirección de x_0 creciente.

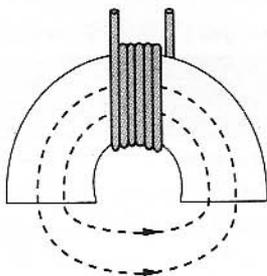
Un ejemplo en el que F es constante se encontrará en el problema 12.7.

*12.4 PÉRDIDA POR HISTÉRESIS

En las secciones anteriores nos hemos limitado a los sistemas magnéticos reversibles y, en la mayoría de los casos, a sistemas lineales. Haremos ahora algún comentario sobre los cambios de energía en sistemas que contienen un material de imán permanente, esto es, en sistemas en los que la histéresis tiene un papel destacado. Consideremos un circuito eléctrico en forma de una bobina con un devanado muy apretado de N vueltas, la cual envuelve una pieza de material ferromagnético (Fig. 12.2). Si la bobina se conecta a una fuente externa de energía eléctrica, el trabajo hecho en contra de la fem inducida en la bobina está dado por la ecuación (12-3). Sin embargo, en la ecuación (12-3) el cambio de flujo $\delta\Phi$ es el cambio de flujo total que atraviesa el circuito; para nuestro propósito, es conveniente dejar que el símbolo $\delta\Phi$ represente el cambio de

FIGURA 12.2

Muestra ferromagnética que forma parte de un circuito magnético.



flujo a través de una sola vuelta de la bobina. Entonces, suponiendo que el mismo flujo atraviesa cada vuelta,

$$\delta W_b = NI \delta \Phi \quad (12-3a)$$

Consideremos que la muestra ferromagnética forma parte de un circuito magnético. Entonces NI puede sustituirse $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de una trayectoria típica de flujo, y la ecuación (12-3a) se convierte en*

$$\delta W_b = \oint \delta \Phi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A \delta B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

donde A es la sección transversal del circuito magnético correspondiente al segmento de longitud $d\mathbf{l}$. Como $d\mathbf{l}$ siempre es tangente a la trayectoria del flujo, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\delta W_b = \oint A \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_V \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (12-27)$$

donde V es el volumen del circuito magnético, es decir, la región del espacio en la que el campo magnético es diferente de cero.

Si el material ferromagnético en el sistema muestra un comportamiento magnético reversible, la ecuación (12-27) puede integrarse desde $\mathbf{B} = 0$ hasta su valor final,

* El análisis presentado aquí puede establecerse sobre una base algo más rigurosa sustituyendo el circuito magnético por un gran número de trayectorias de flujo magnético de distintas longitudes (circuitos magnéticos en paralelo). La ecuación (12-3a) se convierte entonces en

$$\delta W_b = NI \sum_j \delta \Phi_j = \sum_j \oint_j \delta \Phi_j \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_j$$

donde $\delta \Phi_j$ es el cambio de flujo asociado con una de estas trayectorias. El resultado final, ecuación (12-27), no varía.

para dar la energía magnética del sistema. Para un material lineal, la energía así obtenida es idéntica a la dada por la ecuación (12-15). Pero la ecuación (12-27) es mucho más general; predice correctamente el trabajo realizado sobre el sistema magnético aun para los casos en que hay histéresis.

Según la ecuación (12-27), un cambio en la estructura del campo magnético implica la realización de un trabajo

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (12-28)$$

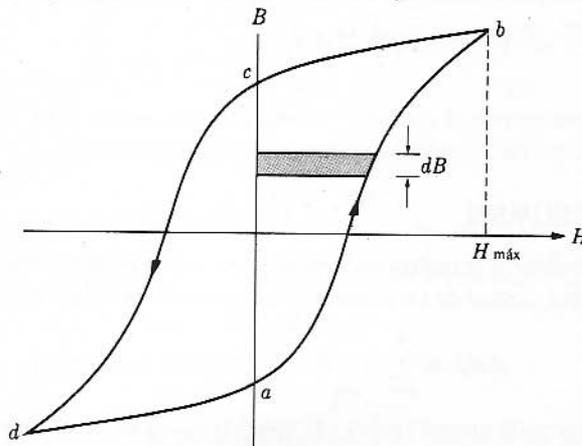
asociado con cada unidad de volumen de material magnético (o de vacío) en el sistema. El caso en que el material se somete a ciclos es de especial interés, como lo sería cuando la bobina que rodea la muestra se sometiera a la acción de una corriente alterna. En un ciclo, la intensidad magnética H (para un punto típico de la muestra) comienza en cero, aumenta hasta un máximo, $H_{\text{máx}}$, disminuye hasta $-H_{\text{máx}}$ y luego vuelve a cero. La inducción magnética B muestra una variación semejante, pero para un ferromagnético típico se retrasará con respecto a H , describiendo así una curva de histéresis (Fig. 12.3). La aportación de trabajo (por unidad de volumen) necesaria para cambiar la inducción magnética desde un punto a hasta otro b sobre la curva de histéresis,

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H dB$$

es exactamente el área entre el segmento de la curva de histéresis ab y el eje B . Es positiva, porque tanto H como dB son positivas. La contribución $(w_b)_{bc}$ es también el área entre el adecuado segmento de la curva de histéresis (bc) y el eje B , pero debe tomarse como negativa, ya que H y dB son de signo contrario. Pueden darse argumentos similares para $(w_b)_{cd}$ y $(w_b)_{da}$. Por tanto, al someter el material a un ciclo alrededor

FIGURA 12.3

Trabajo realizado por unidad de volumen en un material ferromagnético sometido a un ciclo.



de la curva de histéresis, el trabajo necesario por unidad de volumen es

$$w_b = \oint H dB \quad (12-29)$$

que es el área encerrada por la curva de histéresis.

Al final de un ciclo completo, el estado magnético del material es el mismo que aquel con que se empezó el ciclo. En consecuencia, la “energía magnética” del material es la misma. Es evidente, por tanto, que la ecuación (12-29) representa un pérdida de energía. Esta pérdida aparece como calor que se produce por los cambios irreversibles en la estructura de dominios del material. La pérdida por histéresis es un factor importante en los circuitos sujetos a operaciones de corriente alterna. La ecuación (12-29) representa la pérdida de energía por unidad de volumen *en cada ciclo*. Por tanto, la pérdida de energía por unidad de tiempo es directamente proporcional a la frecuencia de la corriente alterna.

Según la ecuación (12-28), el trabajo necesario para cambiar la inducción magnética en una unidad de volumen de material es

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (12-28a)$$

A veces es conveniente considerar que el término $\mu_0 H dH$ (el trabajo realizado en el vacío) tiene lugar haya o no material presente. Entonces, desde este punto de vista, el término $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ es el trabajo específico realizado sobre el material. Éste es el enfoque que generalmente se toma en los textos de termodinámica y constituye la base para el análisis de procesos tales como el “enfriamiento magnético”.

Como la integral de $H dH$ se anula para un ciclo completo, la ecuación (12-29) es equivalente a

$$w_b = \mu_0 \oint H dM \quad (12-29a)$$

A partir de $d(MH) \equiv H dM + M dH$, ésta puede escribirse también como

$$w_b = -\mu_0 \oint M dH \quad (12-29b)$$

12.5

RESUMEN

El trabajo que realiza un agente externo (por ejemplo, una batería) para alterar el campo magnético de un sistema de circuitos de corriente es

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i$$

(expresión que no incluye el trabajo necesario para compensar la pérdida de calor de Joule de los circuitos resistivos). La **energía potencial magnetostática** de un sistema

de circuitos de corriente en un medio magnético lineal es

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i$$

donde

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} I_j$$

Para una distribución de corriente continua en un medio lineal, la energía magnética se convierte en

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \, dv$$

donde el potencial vectorial \mathbf{A} es el producido por la densidad de corriente \mathbf{J} . La integración por partes transforma la energía de materiales magnéticos lineales en una integral,

$$U = \int u \, dv$$

sobre la **densidad de energía** del campo magnético,

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

- Para un solo circuito,

$$U = \frac{1}{2} I \Phi$$

con

$$\Phi = LI$$

- La **fuerza magnética** sobre parte de un sistema aislado, con flujo constante atravesando cada circuito, es menos el gradiente negativo de la energía magnetostática,

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\Phi}$$

Si el sistema no está aislado, sino que la corriente en cada circuito se mantiene constante mediante un agente externo (batería), la fuerza está dada por:

$$F_x = + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_I$$

- En presencia de un material no lineal, incluida la histéresis,

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

En un ciclo completo de un proceso cíclico,

$$w_b = \oint H \, dB = \mu_0 \oint H \, dM = -\mu_0 \oint M \, dH$$

Corrientes que varían lentamente

En el capítulo 7 se introdujo la idea de un circuito eléctrico, y se hizo un análisis de las corrientes en dichos circuitos cuando se excitaban por voltajes constantes. En este capítulo, estas ideas se ampliarán ahora para incluir los voltajes que varían lentamente y las corrientes resultantes que varían lentamente. Para entender de forma adecuada el significado de la expresión “que varían lentamente” deben usarse las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, las ideas generales pueden entenderse sin recurrir a los detalles de estas ecuaciones.

Para variaciones senoidales de voltaje en circuitos que contienen elementos lineales, base para la teoría elemental de circuitos, el comportamiento de un circuito se caracteriza por una frecuencia ω *. Una onda electromagnética de esta frecuencia en el espacio libre tiene una longitud de onda $\lambda = 2\pi c/\omega$, donde c es la velocidad de la luz. La restricción principal que debe imponerse para que la corriente en el circuito pueda llamarse de variación lenta es que el circuito no deberá radiar una cantidad apreciable de potencia. Esta restricción puede satisfacerse exigiendo que la mayor dimensión lineal del sistema, $l_{\text{máx}}$, sea mucho menor que la longitud de onda en el espacio libre asociada con la frecuencia excitadora; esto es,

$$l_{\text{máx}} \ll \frac{2\pi c}{\omega} \quad \text{o} \quad \omega \ll \frac{2\pi c}{l_{\text{máx}}} \quad (13-1)$$

* La cantidad ω es 2π veces la frecuencia y a veces se llama frecuencia angular. El uso de ω en lugar de $2\pi f$ es muy útil en muchas ramas de la física. En particular, en este análisis elimina una multitud de 2π en las ecuaciones de los circuitos.

TABLA 13.1

f (Hz)	ω (rad/s)	λ (m)	$l_{m\acute{a}x}$ (m)
60	376	5×10^6	5×10^5 (300 millas)
10^6	6.28×10^6	300	30
10^8	6.28×10^8	3	0.3
10^{10}	6.28×10^{10}	0.03	0.003

Si se satisface esta condición, entonces para cada elemento $d\mathbf{l}$ del circuito por el que circula una corriente I , hay, a una distancia mucho menor que una longitud de onda, un elemento correspondiente $-d\mathbf{l}$ por el que circula la misma corriente. Esta duplicidad asegura claramente la cancelación de los campos producidos por estos elementos a distancias del orden de unas cuantas longitudes de onda en todas direcciones y, por tanto, muestra que los campos asociados al circuito están restringidos a la vecindad del mismo. Para ver qué restricciones prácticas impone la ecuación (13-1), se ha construido la tabla 13.1 usando $l_{m\acute{a}x} \sim \lambda/10$ como máxima dimensión del circuito. Las frecuencias elegidas son la frecuencia de operación de una línea de transmisión de energía eléctrica, una radiofrecuencia baja (banda de radiodifusión AM), una radiofrecuencia alta (FM y TV) y una frecuencia de microondas. Es evidente que para las tres primeras frecuencias los circuitos comunes satisfacen el criterio. Sin embargo, para la última, el circuito debe construirse en un cubo de aproximadamente 0.1 pulgadas de lado, lo que restringe su aplicabilidad a circuitos integrados. Deberá también observarse que a 100 MHz, la longitud de onda y las dimensiones del circuito son de tamaño adecuado para un laboratorio y, en consecuencia, debe tenerse cuidado al aplicar la teoría de circuitos comunes a estas frecuencias y a otras mayores. En el resto de este capítulo se supondrá que se satisface el criterio de variación lenta, sin más comentarios explícitos.

13.1

COMPORTAMIENTO TRANSITORIO Y EN ESTADO ESTACIONARIO

Si una red de elementos pasivos se conecta repentinamente a una o varias fuentes de voltaje, surgen corrientes. Independientemente de la naturaleza de los voltajes aplicados, la variación inicial de las intensidades de dichas corrientes con el tiempo no es periódica. No obstante, si los voltajes varían periódicamente con el tiempo,* entonces

* Un voltaje constante deberá entenderse como un caso especial de voltaje periódico, en el cual el periodo es infinito o la frecuencia es cero.

mucho después de su aplicación las corrientes también variarán periódicamente con el tiempo. (De hecho, se vuelven estrictamente periódicas sólo después de un tiempo infinito; sin embargo, cualquier aproximación deseada a la periodicidad puede obtenerse esperando un tiempo suficientemente largo.)

Es conveniente analizar el comportamiento de los circuitos en dos fases, dependiendo de si es importante el comportamiento periódico o el no periódico. El comportamiento periódico se llama comportamiento *en estado estacionario*, mientras que el no periódico se conoce como comportamiento *transitorio*. Ambos aspectos se rigen por las mismas ecuaciones básicas integrodiferenciales; sin embargo, las técnicas elementales usadas para resolverlas son radicalmente distintas en los dos casos.

El análisis presentado aquí se restringirá al análisis transitorio elemental (principalmente, excitación por voltajes constantes) y al análisis en estado estacionario para excitaciones senoidales. Para más detalles, el lector debe consultar los libros clásicos de Guillemin y Bode,* y otros textos de ingeniería más recientes.†

13.2

LEYES DE KIRCHHOFF

En el capítulo 7 se presentaron las leyes de Kirchhoff para circuitos de corriente directa (c.d.); éstas deben generalizarse ahora para incluir corrientes que varían lentamente. La primera generalización consiste en observar que no sólo los resistores, sino también los condensadores e inductores deben incluirse como elementos de circuito. Cada uno de estos elementos tiene una diferencia de potencial entre sus terminales que debe incluirse en la ley de mallas de Kirchhoff. El nombre “caída de IR ” ya no es apropiado para todos los elementos, por lo que se adoptará el de *contravoltaje* para especificar la diferencia de potencial entre las terminales de un elemento pasivo. La otra generalización consiste en observar que ambas leyes de Kirchhoff deben ser válidas en todo momento, esto es, deben ser válidas para los valores instantáneos de las corrientes, los voltajes aplicados y los contravoltajes. Las leyes pueden ahora enunciarse así:

* E. A. Guillemin, *Communication Networks*, 2 tomos, Nueva York, Wiley, 1931 y 1935; y H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Princeton, N. J., D. Van Nostrand, 1945, Huntington, Nueva York, Krieger, 1975, reimpresión de la edición de 1945.

† Por ejemplo, F. P. Yatso y D. M. Hata, *Circuits: Principles, Analysis and Simulation*, Nueva York, Saunders College Publishing, 1992.

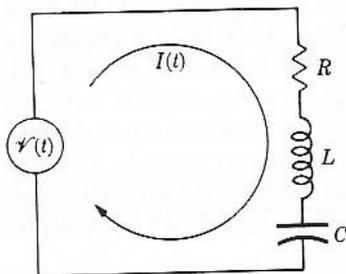
Ley de Kirchhoff I. La suma algebraica de las corrientes instantáneas que fluyen hacia un nodo es cero.

Ley de Kirchhoff II. La suma algebraica de los voltajes aplicados instantáneos en una malla cerrada es igual a la suma algebraica de los contravoltajes instantáneos en la malla.

El significado de la primera de estas leyes está claro: si las corrientes que se dirigen hacia un nodo se consideran positivas, entonces las que se dirigen en sentido contrario deberán llamarse negativas, y la ley dice que la cantidad de corriente que entra en el nodo sale de él. Básicamente, la segunda ley representa la integral del campo eléctrico a lo largo de la malla; sin embargo, es necesario establecer el convenio de signos. El convenio de signos que adaptaremos se explica mejor considerando sólo una malla sencilla, como la que muestra la figura 13.1. En esta figura, el voltaje aplicado $\mathcal{V}(t)$ está conectado en serie con una resistencia R , una inductancia L y una capacidad C . Se ha trazado una flecha, identificada como $I(t)$, para indicar el supuesto sentido positivo (arbitrario) de la corriente. Todos los signos se refieren finalmente a este sentido. El voltaje $\mathcal{V}(t)$ es positivo si hace que la corriente se mueva en el sentido considerado; es decir, si el terminal superior de la figura 13.1 es positivo con respecto al terminal inferior. El contravoltaje resistivo es sólo IR , como en los circuitos de c.d. Si dI/dt es positiva, en la inductancia se inducirá una fem que tiende a causar una corriente en el sentido opuesto al que se supuso para I ; esto es, el terminal superior de L debe ser positivo con respecto al terminal inferior. Como éste es el mismo sentido que el de IR con respecto al de I , el contravoltaje es exactamente $L(dI/dt)$.* El contravoltaje capacitivo

FIGURA 13.1

Circuito serie de elementos de circuito.



* Vale la pena observar que la fem inducida se escribe como $-L(dI/dt)$; sin embargo, siendo una fem, debería escribirse normalmente en el otro lado de la ecuación de contravoltajes. Por tanto, no se introduce inconsistencia al escribir $+L(dI/dt)$ para el contravoltaje.

depende de la carga del condensador, que puede ser positiva o negativa, dependiendo de si consideramos el conductor superior o el inferior. Esta dificultad se elimina escribiendo

$$Q = \int_{t_0}^t I(t) dt \quad (13-2)$$

donde t_0 se elige de modo que $Q(t_0)$ sea cero. Con esta elección de Q , una Q positiva hace que el terminal superior del condensador sea positivo y, por tanto, produce el contravoltaje capacitivo $+Q/C$. La ley de voltaje de Kirchhoff para el circuito de la figura 13.1 es

$$\mathcal{V}(t) = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt \quad (13-3)$$

que es la ecuación básica integro-diferencial de la teoría de circuitos.

13.3

COMPORTAMIENTO TRANSITORIO ELEMENTAL

El único comportamiento transitorio que consideraremos aquí es el asociado a la aplicación repentina de un voltaje constante \mathcal{V} a una red de resistores, condensadores e inductores, siendo el primer ejemplo el circuito R - L representado en la figura 13.2. Para este circuito, la ecuación (13.3) se convierte en

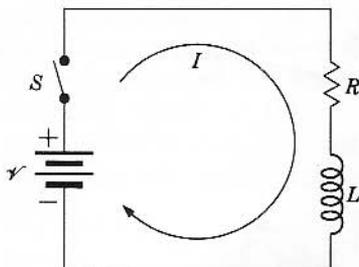
$$\mathcal{V} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (13-4)$$

después de haber cerrado el interruptor S . Antes de que se cierre el interruptor, la solución es trivial, $I = 0$. La ecuación (13-4) es una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes y, en consecuencia, puede resolverse siempre con una constante arbitraria en la solución. Esta solución es

$$I(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} - Ke^{-tR/L} \quad (13-5)$$

FIGURA 13.2

Circuito R - L . Respuesta transitoria cuando se cierra el interruptor.



siendo K la constante arbitraria. Como el circuito contiene una inductancia que impide un cambio brusco en la corriente, ésta debe ser exactamente la misma antes y después de cerrar el interruptor, es decir, cero. Por tanto, si el interruptor se cierra en $t = t_0$,

$$\frac{\mathcal{V}}{R} - Ke^{-t_0 R/L} = 0 \quad (13-6)$$

o

$$K = \frac{\mathcal{V}}{R} e^{t_0 R/L} \quad (13-7)$$

La solución completa es entonces

$$I(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} [1 - e^{-R(t-t_0)/L}] \quad (13-8)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 13.3. Hay varios detalles útiles que se obtienen fácilmente y que pueden deducirse de la ecuación (13-8) y de la figura 13.3. Primero, L/R tiene las dimensiones de tiempo y se denomina *constante de tiempo*. Dado que $1/e \cong 0.368$, la constante de tiempo es el tiempo necesario para que la corriente alcance 0.632 veces su valor final, \mathcal{V}/R . En cinco veces la constante de tiempo, la corriente alcanza 0.993 veces su valor final, lo que se recuerda fácilmente como el 99%. La pendiente inicial dI/dt es justamente la corriente final \mathcal{V}/R dividida por la constante de tiempo L/R , es decir, una pendiente tal que si la corriente continuara aumentando de intensidad a esta razón, alcanzaría su valor final en una constante de tiempo. La utilidad de estos hechos consiste en que, trazando simplemente una curva exponencial estándar, nos permiten calcular la función exponencial correspondiente a un problema transitorio sencillo, con una razonable exactitud. Se pueden investigar muchos otros aspectos de un circuito de resistencia-inductancia y puede aplicarse un tratamiento análogo a los circuitos de resistencia-capacidad. Varios de los problemas del final de este capítulo están dedicados a lograr este propósito.

El segundo ejemplo que se va a considerar es un circuito serie $R-L-C$ que se conecta repentinamente a un voltaje constante \mathcal{V} . Dicho circuito se muestra en la figura 13.4. La ecuación correspondiente después de que se ha cerrado el interruptor es

$$\mathcal{V} = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t) dt \quad (13-9)$$

FIGURA 13.3

Respuesta transitoria de un circuito $R-L$.

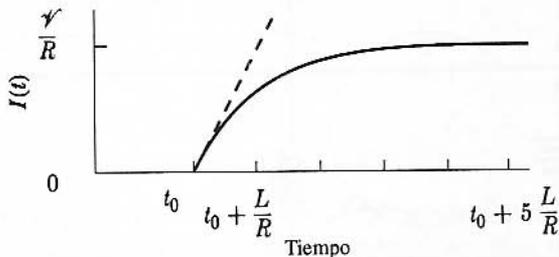
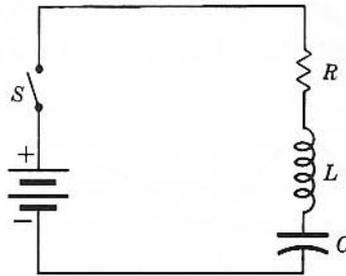


FIGURA 13.4

Circuito R - L - C .
Respuesta transitoria
cuando se cierra el
interruptor.



donde, nuevamente, t_0 es un tiempo en el que la carga del condensador es cero. Por simplicidad, supondremos que el condensador está inicialmente descargado y que el interruptor S se cierra en $t_0 = 0$. La ecuación (13-9) puede ser poco familiar; no obstante, mediante una simple derivación con respecto al tiempo, se convierte en

$$\frac{d^2\mathcal{V}}{dt^2} = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C} \quad (13-10)$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden, con coeficientes constantes (la ecuación del oscilador armónico). La técnica para resolver dichas ecuaciones es bien conocida y, de hecho, para el caso en consideración, $d^2\mathcal{V}/dt^2 = 0$, la solución es*

$$I = \{Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\}e^{-Rt/2L} \quad (13-11)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

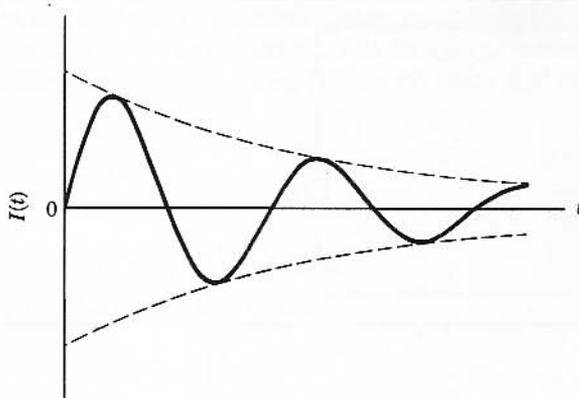
mientras no sean cero ni L ni C . Si cualquiera de los dos se anula, aparece indeterminación en la ecuación (13-11); sin embargo, la ecuación (13-10) puede aún resolverse para $L = 0$; de hecho, la solución es más sencilla que la de la ecuación (13-11). Además, el caso $C = 0$ corresponde al caso sin interés de un circuito abierto. Para completar el análisis de este punto, si $C = \infty$, lo que corresponde a poner en cortocircuito el condensador, la ecuación (13-11) se reduce a la ecuación (13-5), ahora con dos constantes arbitrarias que pueden obtenerse ajustando las condiciones en la frontera. Esta diferencia, por supuesto, refleja el hecho de que todo conocimiento de \mathcal{V} se perdió al ir de la ecuación (13-9) a la (13-10).

Volvamos ahora a la solución de la ecuación (13-11), donde nos falta calcular las constantes A y B . Para que la corriente sea real, B debe ser el complejo conjugado de A .

* Aquí, i es la unidad imaginaria; es decir, $i \equiv \sqrt{-1}$.

FIGURA 13.5

Respuesta transitoria de un circuito $R-L-C$.



Como el interruptor se cerró en $t = 0$, para este valor la corriente debe ser cero, lo que significa que las dos exponenciales imaginarias deben combinarse para dar una función senoidal. Estas observaciones conducen a

$$I(t) = D e^{-Rt/2L} \text{ sen } \omega_n t \quad (13-12)$$

donde D es una sola constante real que debe aún calcularse. Este cálculo se hace observando que en $t = 0$, Q e I son ambas cero y, en consecuencia, que

$$\mathcal{V} = L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} \quad (13-13)$$

Utilizando esta condición inicial, se tiene

$$D = \frac{\mathcal{V}}{\omega_n L} = \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}} \quad (13-14)$$

La solución está ahora completa. La corriente oscila con la *frecuencia natural*

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

pero con una amplitud que decrece con el tiempo y está dada por $D e^{-Rt/2L}$. Este comportamiento se muestra en la figura 13.5. Si el tiempo t_0 al cerrar el interruptor no es 0, sólo es necesario sustituir t por $t - t_0$.

Se ha completado aquí el análisis transitorio elemental. El resto de este capítulo se dedicará a circuitos excitados por voltajes senoidales en estado estacionario; es decir, después de que ha transcurrido un tiempo suficientemente largo desde que se aplicó la excitación para asegurar que los transitorios sean despreciables.

13.4

COMPORTAMIENTO EN ESTADO ESTACIONARIO DE UN CIRCUITO EN SERIE SIMPLE

Estudiaremos ahora el comportamiento del circuito de la figura 13.1, con la siguiente excitación:

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 \cos \omega t \quad (13-15)$$

donde ω es una frecuencia dada, no necesariamente igual a ω_n . Podríamos simplemente usar esta $\mathcal{V}(t)$ en la ecuación (13-3) o en la (13-10) y resolver la ecuación resultante. Sin embargo, es más sencillo, si observamos que $\mathcal{V}_0 \cos \omega t$ es la parte real de $\mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$, desarrollar un método para encontrar la corriente física a partir de la solución de la ecuación (13-10) con una excitación compleja.

Si se aplicara al circuito un voltaje complejo ficticio, $\mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2$, lo más probable es que la corriente resultante también fuera compleja, $I_1 + iI_2$ (aquí se supone que $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, I_1$ e I_2 son todos reales). Poniendo estas cantidades ficticias en la ecuación (13-10) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}_1}{dt} + i \frac{d\mathcal{V}_2}{dt} \\ = \left(L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C} \right) + i \left(L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C} \right) \end{aligned} \quad (13-16)$$

La única forma de que esta ecuación se cumpla es que las partes reales del lado derecho y del lado izquierdo de la ecuación sean iguales y que las partes imaginarias también lo sean. Por tanto, si la excitación física, $\mathcal{V}_p(t)$, es la parte real de una función compleja, $\mathcal{V}(t)$ es suficiente para resolver la ecuación (13-10) con la excitación compleja $\mathcal{V}(t)$ y luego tomar la parte real de $I(t)$ resultante como la corriente física. En algunos casos puede ser preferible usar $e^{i(\omega t + \phi)}$ para obtener la respuesta a $\cos(\omega t + \phi)$, donde ϕ es un ángulo de fase dado. En lo que resta de este capítulo trabajaremos principalmente con voltajes y corrientes complejos. Utilizaremos el subíndice P , como en el anterior $\mathcal{V}_p(t)$, donde sea importante distinguir las cantidades físicas de las correspondientes cantidades complejas.

Si se usa $\mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$ en la ecuación (13-10), la intensidad de corriente será $I_0 e^{i\omega t}$, siendo I_0 alguna constante compleja. Sustituyendo directamente en la ecuación, tenemos

$$i\omega \mathcal{V}_0 e^{i\omega t} = \left[-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right] I_0 e^{i\omega t} \quad (13-17)$$

Dividiendo por $i\omega$ se transforma en

$$\mathcal{V}_0 e^{i\omega t} = \left[R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right] I_0 e^{i\omega t} \quad (13-18)$$

que está en la forma

$$\mathcal{V}_0 e^{i\omega t} = Z I_0 e^{i\omega t} \quad (13-19)$$

con

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \quad (13-20a)$$

o

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (13-20b)$$

La impedancia Z del circuito consta de dos partes: la parte real o *resistencia* (R) y la parte imaginaria o *reactancia* (X). La reactancia se divide a su vez en *reactancia inductiva* $X_L = \omega L$ y *reactancia capacitiva* $X_C = -1/\omega C$. El hecho de que la impedancia sea compleja significa que la corriente no está en fase con el voltaje aplicado.

A veces resulta conveniente escribir la impedancia en forma polar:

$$Z = |Z| e^{i\theta} \quad (13-21)$$

con

$$|Z| = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2} \quad (13-22)$$

y

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) \quad (13-23)$$

Empleando esta forma para la impedancia, la corriente compleja puede escribirse como

$$I(t) = \frac{\mathcal{V}_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)} \quad (13-24a)$$

y la corriente física está dada por

$$I_P(t) = \frac{\mathcal{V}_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta) \quad (13-24b)$$

Si θ es mayor que cero, la corriente alcanza una fase dada más tarde que el voltaje y se dice que se retrasa con respecto al voltaje. En caso contrario, la corriente se adelanta al voltaje. Las corrientes que varían según $e^{i\alpha x}$ o $\cos(\alpha x - \theta)$ se llaman *corrientes alternas (c.a.)*. Este cálculo completa formalmente el estudio del circuito serie simple, aunque en la sección 13.7 examinaremos más detalladamente la ecuación (13-24) para mejorar nuestra comprensión física de la situación.

13.5

CONEXIÓN DE IMPEDANCIAS EN SERIE Y EN PARALELO

Si dos impedancias se conectan en serie, entonces fluye la misma corriente a través de cada una de ellas. Los voltajes* a través de las dos impedancias son $V_1 = Z_1 I$ y $V_2 = Z_2 I$. El voltaje de la combinación $V_1 + V_2 = (Z_1 + Z_2)I$. Está claro, entonces, que en la conexión de impedancias en serie se suman las impedancias; esto es,

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots \quad (\text{conexión en serie}) \quad (13-25)$$

Por tanto, la ecuación (13-20a) es la suma de la impedancia de una resistencia R ,

$$Z_1 = R$$

de una inductancia L ,

$$Z_2 = i\omega L$$

y de una capacitancia C ,

$$Z_3 = \frac{1}{i\omega C}$$

todas en serie. Es importante observar que las impedancias se suman como números complejos. Si $Z_1 = R_1 + iX_1$ y $Z_2 = R_2 + iX_2$, entonces

$$Z = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + i(X_1 + X_2) \quad (13-26)$$

En forma polar,

$$Z = |Z| e^{i\theta}, \quad |Z| = [(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2]^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2} \quad (13-27)$$

Observe que la magnitud de Z **no** es la suma de las magnitudes de Z_1 y Z_2 .

Si las impedancias se conectan en paralelo, entonces el mismo voltaje aparece a través de cada una de ellas y las corrientes estarán dadas por $I_1 = V/Z_1$, $I_2 = V/Z_2$, etcétera. La corriente total es

$$I = I_1 + I_2 + \dots = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \dots = V \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots \right)$$

* En ésta y en las restantes secciones del presente capítulo utilizaremos el símbolo V en lugar de $\Delta\phi$ para la diferencia de potencial a través de un elemento o grupo de elementos.

de la cual queda claro que

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots \quad (\text{conexión en paralelo}) \quad (13-28)$$

Aquí, también, la suma es la adición de números complejos. Las ecuaciones (13-25) y (13-28) proporcionan la base para resolver problemas en los que intervienen configuraciones más complejas con un solo voltaje aplicado.

EJEMPLO 13.1 Impedancia de un circuito

Consideremos el circuito de la figura 13.6. La impedancia consiste en un resistor en serie con la combinación en paralelo de un condensador y un inductor. Encuentre la corriente que circula por este circuito.

Solución: Una expresión conveniente para escribir la impedancia es

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2 + i\omega L} + \frac{1}{1/i\omega C}} \quad (13-29)$$

Alternativamente,

$$Z = R_1 + \frac{R_2 + i\omega L}{1 + i\omega C(R_2 + i\omega L)} \quad (13-30)$$

o

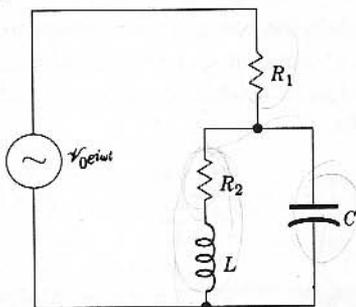
$$Z = R_1 + \frac{(R_2 + i\omega L)[(1 - \omega^2 LC) - i\omega R_2 C]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} \quad (13-31)$$

La única otra manipulación que vale la pena hacer ahora es la separación en partes real e imaginaria:

$$Z = R_1 + \frac{R_2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} + i \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R_2^2 C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} \quad (13-32)$$

FIGURA 13.6

Circuito típico de c.a.



Habiendo encontrado Z , determinaremos ahora la corriente, dividiendo $V_0 e^{i\omega t}$ por Z . El estudio de este circuito se continuará en la sección 13.7 en relación con los fenómenos de resonancia.

13.6

POTENCIA Y FACTORES DE POTENCIA

La potencia suministrada a un resistor puede determinarse multiplicando el voltaje a través de cada resistor por la corriente que pasa a través de él. Sin embargo, para el caso más general, tal como la impedancia mostrada en la figura 13.7(a), se necesita un enfoque más sutil.

Si $V(t)$ e $I(t)$ son el voltaje y la corriente complejos, como se muestra, entonces la *potencia instantánea* es

$$P(t) = \operatorname{Re} I(t) \operatorname{Re} V(t) \quad (13-33)$$

La *potencia media* es una cantidad más importante, obtenida al tomar el promedio durante un periodo completo o durante un tiempo muy largo (muchos periodos). Si las fases se escogen de tal modo que V_0 sea real y, como de costumbre, $Z = |Z| e^{i\theta}$, entonces es inmediato ver (Problema 13.11) que

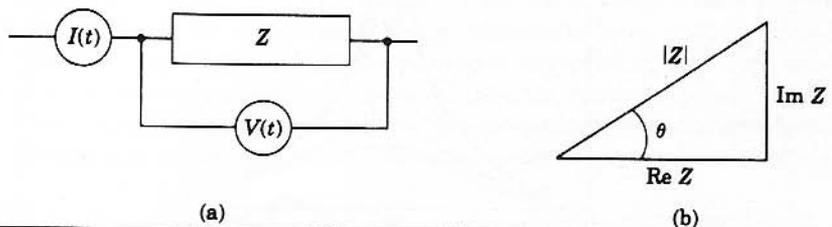
$$\bar{P} = \overline{\operatorname{Re} I(t) \operatorname{Re} V(t)} = \frac{1}{2} |I_0| |V_0| \cos \theta \quad (13-34)$$

El factor un medio de la ecuación (13-34) representa el hecho de que el valor medio de $\sin^2 \omega t$ o $\cos^2 \omega t$ es un medio. El otro factor interesante es el coseno de θ , que tiene en cuenta el hecho de que la corriente y el voltaje no están en fase. El coseno de θ se llama frecuentemente *factor de potencia* de un circuito de corriente alterna (c.a.). En la sección 17.3 se demuestra que

$$\overline{\operatorname{Re} (I_0 e^{i\omega t}) \operatorname{Re} (V_0 e^{i\omega t})} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (I_0^* V_0) \quad (13-35)$$

FIGURA 13.7

Medida de la potencia.



donde I_0^* es el complejo conjugado de I_0 . Esta forma es fácil de recordar y conduce directamente a la expresión (13-34).

Ya que $\cos \theta = \text{Re } Z / |Z|$ (véase la figura 13.7b), la ecuación (13-34) puede expresarse como

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{|Z|^2} \text{Re } Z \quad (13-36)$$

Como comentario final, mencionaremos que los *valores eficaces* del voltaje y de la corriente se definen normalmente como

$$V_{\text{ef}} = \frac{\sqrt{2}}{2} |V_0|, \quad I_{\text{ef}} = \frac{\sqrt{2}}{2} |I_0| \quad (13-37)$$

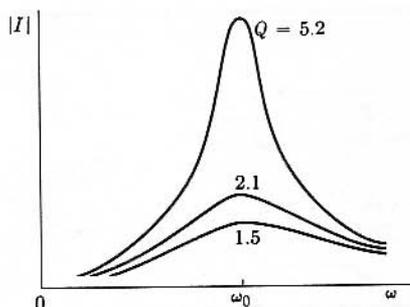
La virtud de estas definiciones es que un V_{ef} dado que se aplica a una resistencia disipa la misma potencia que un voltaje constante de la misma magnitud. La especificación de valores eficaces es muy común; por ejemplo, líneas de 115 volts c.a. son líneas de voltaje eficaz de 115 volts.

13.7 RESONANCIA

La ecuación (13-22) pone de manifiesto que un circuito serie L - R - C simple tiene una impedancia dependiente de la frecuencia que tiene valor mínimo en $\omega^2 = \omega_0^2 \equiv 1/LC$. A esta frecuencia, la impedancia es justamente R , el ángulo de fase es cero y la corriente es máxima y de magnitud V_0/R . Éste es un fenómeno resonante muy parecido al observado en los osciladores mecánicos de amortiguamiento forzado. Si se hace una gráfica de la magnitud de la corriente en estado estacionario para el circuito en la figura 13.1 (con $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V} \cos \omega t$) en función de la frecuencia, se obtiene una curva como la de la figura 13.8. Se muestran varias curvas; todas se basan en los mismos valores de L y C , pero la resistencia en serie varía de una curva a otra. Las curvas se ven más pronunciadas para valores pequeños que para valores grandes de la resistencia en serie.

FIGURA 13.8

Curvas de resonancia para un circuito R - L - C serie.



Una medida cuantitativa de la forma de la curva puede obtenerse de la siguiente manera. Definamos el "ancho" de la curva de resonancia como el intervalo de frecuencias entre las "frecuencias de potencia mitad", que son las dos frecuencias a las que la potencia disipada es la mitad de la potencia disipada a la frecuencia pico ω_0 . De este modo, buscamos los valores de ω que satisfagan

$$\bar{P}(\omega) = \frac{1}{2}\bar{P}(\omega_0)$$

o utilizando las ecuaciones (13-22) y (13-36),

$$\frac{1}{2} \frac{|V_0|^2 R}{|Z(\omega)|^2} = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{R^2} R$$

Por tanto

$$|Z(\omega)|^2 = 2R^2$$

o

$$\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = R \quad (13-38)$$

Para respuestas de pico relativamente pronunciado, la ecuación (13-38) será válida para valores de ω no muy distintos de ω_0 . Escribimos entonces $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ y obtenemos

$$\left| \omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0} \right| = R$$

Utilizando $\omega_0^2 = 1/LC$ y $(1 + \Delta\omega/\omega_0)^{-1} \cong 1 - \Delta\omega/\omega_0$ se tiene

$$2|\Delta\omega|L = R$$

o

$$\frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (13-39)$$

El ancho de la curva de resonancia definida anteriormente es, por tanto, aproximada por $2|\Delta\omega|$. La cantidad

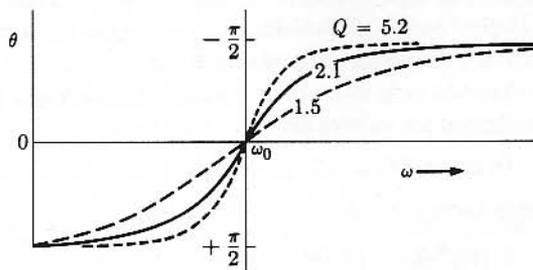
$$Q = \omega_0 L/R \quad \text{o} \quad Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} \quad (13-40)$$

caracteriza la agudeza de la resonancia y se conoce como factor de calidad Q del circuito.* Para fines prácticos, Q puede considerarse como una propiedad del inductor solamente, puesto que la mayor parte de la resistencia en serie inevitable está asociada al alambre devanado alrededor del inductor. Sin embargo, un tratamiento más refinado muestra que las pérdidas en el condensador deben también incluirse al calcular la Q . Las curvas de la figura 13.8 están marcadas con los valores correctos de Q .

* Esta Q no tiene nada que ver con la carga.

FIGURA 13.9

Ángulo de fase de la impedancia en un circuito típico R - L - C serie.



A medida que varía la frecuencia excitadora, no sólo varía la magnitud, sino también la fase de la corriente. Esta variación se muestra en la figura 13.9 para los mismos valores de Q usados en la figura 13.8. Por debajo de la resonancia, el ángulo de fase de la función de impedancia es negativo. Por tanto, la fase de la corriente es positiva y se adelanta al voltaje. Por encima de la resonancia sucede lo contrario y la corriente se retrasa con respecto al voltaje.

Es interesante observar que los circuitos resonantes de radiofrecuencia usual, hallados en equipos de comunicaciones, son circuitos resonantes serie a pesar de su aspecto de circuitos paralelo. En el caso más simple, la razón es que la señal de alimentación se acopla inductivamente en L y así aparece como una fem en serie con L .

La resonancia no se restringe a circuitos serie como los que acabamos de estudiar. Los circuitos paralelo también pueden presentar características de resonancia. El circuito de la figura 13.6 pone de manifiesto tal resonancia. Definir la frecuencia de resonancia para un circuito resonante paralelo no es tan sencillo como lo es para un circuito serie. Algunas de las posibilidades son: (1) $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; (2) la frecuencia a la que la magnitud de la impedancia [dada por la ecuación (13-31)] es un máximo, o (3) la frecuencia a la que el factor de potencia es igual a la unidad. Cada una de estas tres elecciones da una frecuencia distinta. Sin embargo, para circuitos de alta Q son casi iguales. La primera posibilidad es, con mucho, la más útil en la práctica porque hace que gran número de resultados de resonancia serie sean directamente aplicables al caso resonante paralelo. Un resultado muy interesante se obtiene usando la ecuación (13-31) para calcular Z , con $R_1 = 0$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. El resultado es

$$Z = \omega_0 L \left[\frac{\omega_0 L}{R} - i \right], \quad (\omega = \omega_0) \quad (13-41)$$

Para un circuito de alta Q , la i puede despreciarse, con el resultado de que la impedancia en la resonancia es Q veces la reactancia inductiva en la resonancia.

El tema de los circuitos resonantes podría desarrollarse más extensamente. Sin embargo, hacerlo aquí no estaría probablemente justificado. Algunos de los problemas al final de este capítulo amplían esta sección.

*13.8

INDUCTANCIAS MUTUAS EN CIRCUITOS DE c.a.

La resolución de problemas de circuitos de c.a. que contienen inductancias mutuas presenta una pequeña dificultad en la asignación del signo correcto a la inductancia mutua. Esta dificultad puede resolverse fácilmente observando que el signo que debe asociarse a la inductancia mutua depende del sentido supuesto de la corriente en los dos circuitos considerados, y de la forma en que se conectan los arrollamientos (devanados). La notación M_{ij} se usará para la inductancia mutua pura entre dos circuitos.

Se demostró en el capítulo 11 que la fem en el devanado 2, debida a una corriente que varía en el devanado 1, está dada en magnitud por

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (13-42)$$

Para corrientes senoidales, usando la notación compleja, tenemos

$$\mathcal{E}_2 = i\omega M_{21} I_{10} e^{i\omega t} \quad (13-43)$$

o

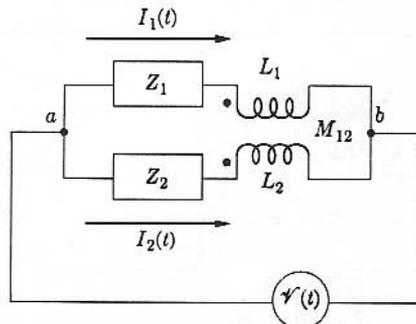
$$\mathcal{E}_2 = i\omega M_{21} I_1 \quad (13-44)$$

En lo sucesivo, el símbolo M_{21} se considerará como una cantidad positiva y el signo de \mathcal{E}_2 se pondrá explícitamente. En otras palabras, M_{21} de la ecuación (13-44) se sustituirá por $\pm M_{21}$, siendo M_{21} una cantidad positiva.

Para demostrar la técnica de asignar los signos, consideremos el circuito de la figura 13.10, en el que dos impedancias Z_1 y Z_2 se combinan con una inductancia mutua y se conectan a una fuente de voltaje aplicado, $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$. La inductancia mutua está indicada por M_{12} y se considera como un número positivo. Los puntos negros de la figura indican los extremos de los dos arrollamientos que son simultáneamente positivos; esto es, si el arrollamiento inferior se excita por una corriente senoidal que hace que el terminal de la izquierda sea positivo en algún instante t_1 , entonces el voltaje inducido en el arrollamiento superior hace que el terminal izquierdo del superior sea positivo en t_1 . La ecuación para la rama de la parte superior, de acuerdo con la ley de

FIGURA 13.10

Circuito con inductancia mutua.



Kirchhoff, es

$$Z_1 I_1 + i\omega L_1 I_1 + i\omega M_{12} I_2 = \mathcal{V} \quad (13-45)$$

Se usa el signo más con la inductancia mutua porque una I_2 positiva da un voltaje en la rama de la parte superior que tiene el mismo sentido que una caída en $I_1 R$. La segunda ecuación es

$$i\omega M_{21} I_1 + Z_2 I_2 + i\omega L_2 I_2 = \mathcal{V} \quad (13-46)$$

donde se ha escrito $M_{12} = M_{21}$ por simetría.

La asignación del signo se hace con la misma base que antes y podemos verificarla observando que M_{12} deberá aparecer en la ecuación de la rama uno con el mismo signo que M_{21} en la ecuación de la rama dos. Las ecuaciones (13-45) y (13-46) pueden resolverse simultáneamente con técnicas comunes para dar

$$I_1 = \mathcal{V} \frac{Z_2 + i\omega L_2 - i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2} \quad (13-47)$$

$$I_2 = \mathcal{V} \frac{Z_1 + i\omega L_1 - i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2}$$

Combinando las dos para obtener la corriente total $I_1 + I_2$ se tiene

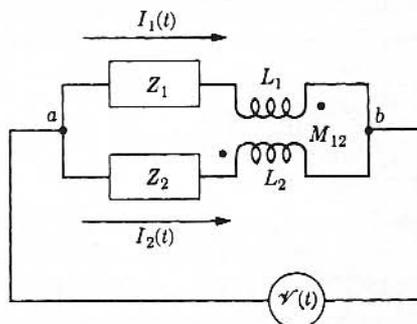
$$I = I_1 + I_2 = \mathcal{V} \frac{Z_1 + i\omega L_1 + Z_2 + i\omega L_2 - 2i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2} \quad (13-48)$$

El coeficiente de \mathcal{V} en el lado derecho de la ecuación es el recíproco de la impedancia presentada al generador, o la impedancia neta entre los puntos a y b . Es evidente que si M_{12} es cero, la impedancia es la combinación en paralelo de las dos impedancias de las ramas. Para la conexión ilustrada, a medida que M_{12} aumenta, aumenta también la impedancia.

El circuito que se obtiene al intercambiar los conductores en los terminales de un arrollamiento de la inductancia mutua se muestra en la figura 13.11. Observe que la única diferencia es que el punto negro se ha cambiado del extremo izquierdo del arrollamiento superior al extremo derecho. Como resultado, se cambia el signo del término

FIGURA 13.11

Circuito de la figura 13.10 con el signo de la inductancia mutua invertido.



M_{12} en las ecuaciones (13-45) y (13-46), con lo que

$$(Z_1 + i\omega L_1)I_1 - i\omega M_{12}I_2 = \mathcal{V}$$

y

$$-i\omega M_{12}I_1 + (Z_2 + i\omega L_2)I_2 = \mathcal{V}$$

(13-49)

Las corrientes se hallan y se combinan fácilmente para obtener la impedancia:

$$Z_{ab} = \frac{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2}{Z_1 + i\omega L_1 + Z_2 + i\omega L_2 + 2i\omega M_{12}}$$

(13-50)

que es igual que en el caso anterior cuando la inductancia mutua es cero. La relación entre Z_{ab} para M_{12} finita y Z_{ab} para $M_{12} = 0$ depende del parámetro de una forma bastante complicada. Aquí sólo estableceremos que $|Z_{ab}|$ puede ser mayor o menor que $|Z_{ab}|$ para $M_{12} = 0$.

El circuito básico para el dispositivo más común de inductancia mutua, el transformador, se muestra en la figura 13.12. R_1 y R_2 son las resistencias de los arrollamientos primario (excitador) y secundario (excitado), L_1 y L_2 son sus autoinductancias, y M es la inductancia mutua (positiva) entre ellos. Z_L es la impedancia de la carga conectada al secundario y $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$ es el voltaje entre los extremos del arrollamiento primario. Si se supone que las corrientes $I_1 e^{i\omega t}$ e $I_2 e^{i\omega t}$ siguen los sentidos indicados, entonces la ley de voltaje de Kirchhoff requiere que las ecuaciones

$$\mathcal{V}_0 = I_1 R_1 + i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2$$

y

$$0 = I_2 R_2 + i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1 + I_2 Z_L$$

(13-51)

se satisfagan. Las soluciones a estas ecuaciones son

$$I_1 = \frac{Z_L + R_2 + i\omega L_2}{(R_1 + i\omega L_1)(Z_L + R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2} \mathcal{V}_0$$

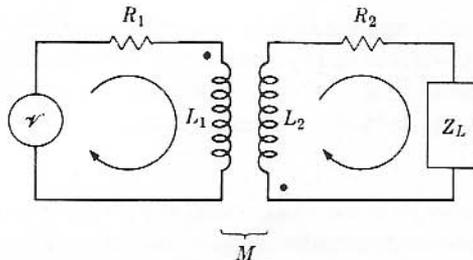
y

$$I_2 = \frac{-i\omega M}{(R_1 + i\omega L_1)(Z_L + R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2} \mathcal{V}_0$$

(13-52)

FIGURA 13.12

Circuito de un transformador.



Estas ecuaciones relativamente complejas representan una solución exacta para el circuito de la figura 13.12.

Para muchos propósitos es mucho más conveniente pensar en términos de un transformador *ideal*; es decir, aquel que satisface las relaciones

$$V_L = a\mathcal{V}_0, \quad I_2 = -\frac{I_1}{a} \quad (13-53)$$

donde la constante a es independiente de la frecuencia, V_L es el voltaje entre los extremos de Z_L y todas las demás cantidades corresponden a las de la figura 13.12. Multiplicando entre sí las ecuaciones (13-53) y suponiendo que los factores de potencia en los dos arrollamientos son iguales, encontramos que la potencia $\mathcal{V}_0 I_1 \cos \theta_1$ es totalmente suministrada a la carga, $V_L I_2 \cos \theta_2$. En otras palabras, no hay pérdidas en el transformador.* La condición que debe satisfacerse para asegurar la segunda de estas relaciones es

$$\frac{Z_L + R_2 + i\omega L_2}{i\omega M} = a \quad (13-54)$$

que se satisface si $\omega L_2 \gg |Z_L + R_2|$. De la ecuación (13-54), $a \approx L_2/M - iZ_L/\omega M$ si $|Z_L| \gg R_2$. Para satisfacer la primera ecuación (13-53), es suficiente requerir: $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$, $\omega L_1 \gg R_1$, $|Z_L| \gg R_2$ y $|Z_L| \gg a^2 R_1$. Entonces es fácil demostrar que la segunda de las ecuaciones (13-52) junto con la (13-54) implica que $V_L/V_0 = a$, donde $V_L \equiv -I_2 Z_L$:

$$\begin{aligned} \frac{V_L}{\mathcal{V}_0} &= -\frac{I_2 Z_L}{\mathcal{V}_0} \approx \frac{i\omega M Z_L}{i\omega L_1(i\omega M a) + \omega^2 M^2} \\ &= \frac{iZ_L}{\omega(M - L_1 a)} \approx \frac{iZ_L M}{\omega(M^2 - L_1 L_2) + iZ_L L_1} \\ &\approx M/L_1 \approx L_2 L_1 / (M L_1) \approx a \end{aligned}$$

Las aproximaciones realizadas pueden ser un poco extremas, pero en la práctica existen los transformadores que se aproximan a los transformadores ideales en un amplio intervalo de frecuencias. Para tales dispositivos,

$$I_2 = -\frac{I_1}{a}, \quad V_L = a\mathcal{V}_0$$

y

$$\frac{\mathcal{V}_0}{I_1} = -\frac{V_L}{a^2 I_2} = \frac{Z_L}{a^2} \quad (13-55)$$

La última de estas relaciones pone de manifiesto que el transformador actúa también como un transformador de impedancia, con razón de transformación a^{-2} . Se deja como ejercicio demostrar que para un acoplamiento muy estrecho de los dos arrollamientos $a = N_2/N_1$, esto es, la razón de transformación.

* En la aproximación de un transformador ideal, se puede demostrar que los factores de potencia en los dos arrollamientos son aproximadamente iguales (es decir, $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$). Si Z_L es puramente resistivo, entonces cada factor de potencia ≈ 1 .

***13.9 ECUACIONES DE MALLA Y DE NODO**

Los circuitos de c.a. más complejos pueden estudiarse de dos formas: una basada en la ley del voltaje de Kirchhoff y conocida como *análisis de mallas* y la otra basada en la ley de la corriente de Kirchhoff y llamada *análisis de nodos*. Cada método tiene sus ventajas e inconvenientes. Ya que la elección del método apropiado puede simplificar enormemente algunos problemas, se considerarán ambos en esta sección.

El primer paso para aplicar el análisis de mallas es la asignación de mallas. Esto se logra suponiendo que existen corrientes en los circuitos (o lazos) cerrados de tal modo que al menos una corriente pasa por cada elemento. Con tal elección de corrientes, la primera ley de Kirchhoff se satisface automáticamente. Por ejemplo, en la figura 13.13 se muestran tres mallas, identificadas con I_1, I_2 e I_3 . Este conjunto de mallas no es, por supuesto, la única elección posible; son posibles y útiles algunas otras. Si la segunda ley del voltaje de Kirchhoff se aplica a cada una de estas mallas, obtenemos

$$\begin{array}{rclcl}
 I_1(Z_3 + Z_4) & -I_2Z_4 & -I_3Z_3 & = & \mathcal{V} \\
 -I_1Z_4 & +I_2(Z_1 + Z_2 + Z_4) & -I_3Z_2 & = & 0 \\
 -I_1Z_3 & -I_2Z_2 & +I_3(Z_2 + Z_3 + Z_5) & = & 0
 \end{array} \tag{13-56}$$

Observe que el signo menos aparece porque en la malla uno, por ejemplo, I_2 fluye a través de Z_4 en sentido contrario a I_1 . Las ecuaciones (13-56) pueden resolverse más fácilmente mediante técnicas de determinantes, dando como resultado las expresiones para el conjunto de corrientes de malla en el circuito. Es útil observar que las ecuaciones de malla pueden escribirse como

$$\sum_{j=1}^n Z_{ij}I_j = \mathcal{V}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{13-57}$$

(con $n = 3$ en el circuito anterior). En esta notación, $Z_{ij} = Z_{ji}$, lo que sirve de comprobación para las ecuaciones de malla.

Como segundo ejemplo, considere el circuito de la figura 13.14. Las ecuaciones adecuadas para estos circuitos se escriben como

FIGURA 13.13

Ilustración del uso del análisis de mallas en circuitos de c.a.

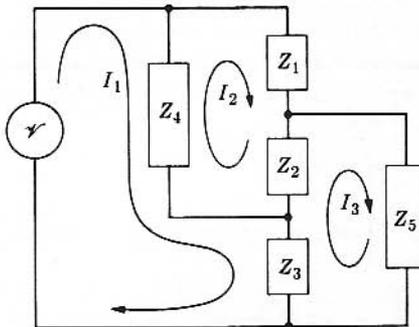
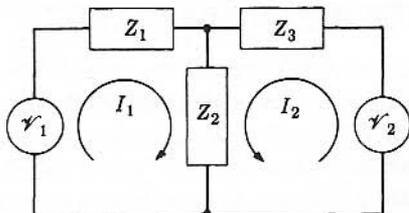


FIGURA 13.14

Otro uso de las ecuaciones de malla.



$$\begin{aligned} I_1(Z_1 + Z_2) + I_2Z_2 &= \mathcal{V}_1 \\ I_1Z_2 + I_2(Z_2 + Z_3) &= \mathcal{V}_2 \end{aligned} \quad (13-58)$$

No hay razón por la que \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 deban estar en fase; generalmente no lo están, pero pueden expresarse como $\mathcal{V}_1 = |\mathcal{V}_1| e^{i\omega t}$, $\mathcal{V}_2 = |\mathcal{V}_2| e^{i(\omega t + \phi)}$. Sin embargo, es muy importante asignar las fases correctamente y esto se logra con mayor facilidad examinando las fases relativas en $t = 0$ y asignando direcciones (sentidos) con respecto a las corrientes de malla asignadas. También es importante observar que, a menos que todos los generadores tengan la misma frecuencia, toda la técnica falla (más exactamente, el problema se reduce a la superposición de dos problemas independientes, cada uno de los cuales tiene que ver con un generador y una frecuencia).

Antes de proceder a analizar las otras ecuaciones para los nodos, conviene explicar los generadores de voltaje y de corriente. En las secciones anteriores, se han propuesto problemas de circuitos en términos de fuentes puras de voltaje aplicado. Dichos dispositivos ideales no pueden construirse, por supuesto, ya que los dispositivos prácticos tienen siempre cierta impedancia interna. Por tanto, un generador práctico está formado por una fuente de voltaje $\mathcal{V}(t)$ en serie con una impedancia Z_I , que es la impedancia interna. Dicho generador se muestra en la figura 13.15 conectado a una carga Z_L . Se pueden hacer varias observaciones. En primer lugar, para la máxima transferencia de potencia a la carga externa, $Z_L = Z_I^*$; esto es, Z_I y Z_L deberán tener partes resistivas iguales, y partes reactivas que son iguales en magnitud pero de signo contrario. La demostración de esto se deja como un ejercicio. En segundo lugar, un generador de

FIGURA 13.15

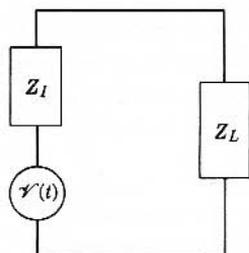
Generador práctico conectado a una carga Z_L .

FIGURA 13.16

“Generador de corriente”
que es equivalente al
generador de voltaje de la
figura 13.15.

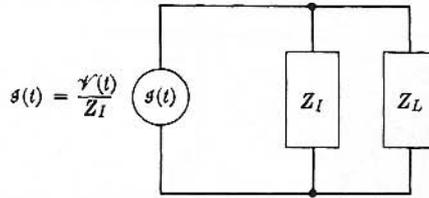
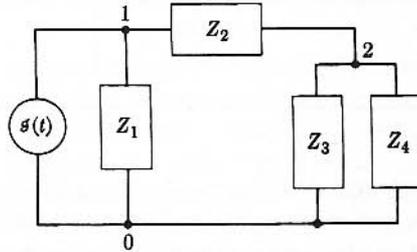


FIGURA 13.17

Ilustración del método de
análisis de nodos en
circuitos de c.a.



voltaje es equivalente a un generador de corriente que proporciona una corriente de intensidad $\mathcal{I}(t) = \mathcal{V}(t)/Z_I$ como consecuencia de la impedancia interna. Esta equivalencia para el circuito de la figura 13-15 se muestra en la figura 13.16. Es fácil demostrar esta equivalencia si se observa que un generador ideal de corriente proporciona la corriente $\mathcal{I}(t)$ a *cualquier* carga conectada a sus terminales. La equivalencia significa además que, en cualquier problema de circuitos, los generadores pueden considerarse como generadores de voltaje o como generadores de corriente, según convenga a la situación.

Las ecuaciones para los nodos de un circuito resultan de la aplicación de la primera ley de la corriente de Kirchhoff a cada uno de los nodos, donde un nodo es un punto en el que concurren tres o más elementos. En este método, la segunda ley del voltaje de Kirchhoff se satisface de forma automática. Como ejemplo sencillo de la aplicación de las ecuaciones para los nodos, consideremos el circuito de la figura 13.17. Las ecuaciones para los nodos se obtienen exigiendo que la suma algebraica de las corrientes en cada nodo sea cero. Los nodos se numeran, partiendo de cero para aquel nodo cuyo potencial sea el de referencia para el circuito. Si el potencial en el nodo 0 se considera cero, entonces en el nodo 1

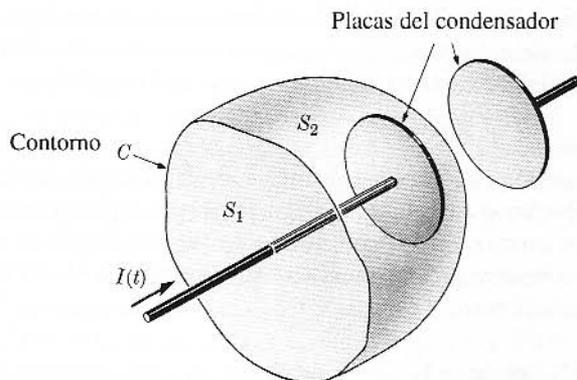
$$\mathcal{I}(t) = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_1 - V_2}{Z_2} \quad (13-59)$$

donde V_1 y V_2 son los potenciales de los nodos 1 y 2, respectivamente. En el nodo 2,

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{Z_2} + \frac{V_2}{Z_3} + \frac{V_2}{Z_4} \quad (13-60)$$

FIGURA 16.1

Contorno C y dos superficies, S_1 y S_2 , para comprobar la ley de circuitos de Ampère.



C y a la superficie S_2 , entonces J es cero en todos los puntos de S_2 y

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (16-3)$$

Las ecuaciones (16-2) y (16-3) se contradicen y, por tanto, ambas no pueden ser correctas. Si imaginamos que C está a una gran distancia del condensador, está claro que la situación es básicamente la misma que la de los casos estándar de la ley de Ampère considerados en el capítulo 8. Esto nos conduce a pensar que la ecuación (16-2) es la correcta, ya que no depende de la nueva característica, es decir, del condensador. Por otra parte, es necesario considerar el condensador para deducir la ecuación (16-3). Podría parecer, entonces, que la ecuación (16-3) requiere alguna modificación.

Esta dificultad puede resolverse de una forma algo diferente mediante la combinación de las ecuaciones (16-2) y (16-3). S_2 y $-S_1$ juntas forman una superficie cerrada S . Utilizando \mathbf{n} como el vector normal con dirección hacia afuera en cualquier parte, llegamos a la conclusión de que

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = -I \quad (16-4)$$

con el signo menos debido al cambio en la dirección de la normal en la ecuación (16-2). Por otro lado, las integrales de superficie en las ecuaciones (16-2) y (16-3) son iguales a la integral de línea de \mathbf{H} alrededor de la misma curva C . Siguiendo este enfoque,

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} - \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (16-5)$$

donde el signo menos surge del cambio en el sentido del recorrido de C en el caso S_1 . La contradicción ahora toma la forma de una corriente finita I , que se supuso que fluía hacia dentro del volumen limitado por S , y que es igual a cero. Por tanto, hay un conflicto entre la ley de Ampère, ecuación (16.1), de la que se obtuvo el cero, y la suposición inicial de una corriente I . La corriente que fluye hacia el interior del volumen

Ecuaciones de Maxwell

Ahora estamos listos para introducir la piedra angular de la teoría electromagnética, la llamada *corriente de desplazamiento*. Aun cuando su efecto observable a veces es despreciable (en realidad, ha estado en todos los fenómenos tratados hasta ahora), es lo que completa esencialmente la teoría, y tiene un papel crucial en otros temas—ondas, óptica, relatividad— que conforman el resto del libro.

16.1 GENERALIZACIÓN DE LA LEY DE AMPÈRE: CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

En el capítulo 9 encontramos que el campo magnético debido a una distribución de corriente satisface la ley de circuitos de Ampère,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (16-1)$$

Examinaremos ahora esta ley, demostraremos que falla en algunas ocasiones y encontraremos una generalización válida.

Consideremos el circuito de la figura 16.1, que consiste en un pequeño condensador de placas paralelas, que se está cargando con una corriente de intensidad constante I (no necesitamos preocuparnos de lo que está generando la corriente). Si se aplica la ley de Ampère al contorno C y a la superficie S_1 , encontramos que

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = I \quad (16-2)$$

Si, por otra parte, se aplica la ley de Ampère al mismo contorno

de hecho es distinta de cero, y, en efecto, es igual a la razón de cambio de la carga en las placas del condensador (de acuerdo con la ley de conservación de la carga).

Esta inconsistencia puede analizarse y resolverse más fácilmente en la formulación diferencial donde la ley de Ampère toma la forma dada por la ecuación (9-30):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (9-30), (16-6)$$

La ecuación (16-2) es precisamente el resultado de la integración de la ecuación (16-6) sobre la superficie S_1 . Si tomamos la divergencia de la ecuación (16-6), el resultado es cero ya que la divergencia de cualquier rotacional es cero. Pero tenemos otra expresión para la divergencia de \mathbf{J} , es decir, la ecuación de la conservación de la carga, ecuación (7-9):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7-9), (16-7)$$

Nuevamente hay una inconsistencia significativa: la divergencia de \mathbf{J} no puede ser cero y $-\partial\rho/\partial t$. No hay problema aparente con la ecuación (16-7); es difícil imaginar una forma de modificarla para quitar esta inconsistencia. Lo que aparentemente se necesita es una modificación de la ecuación (16-6) que convierta el lado derecho en un vector con divergencia cero. Una manera de hacer esto es utilizar la ley de Gauss en la forma de la ecuación (4-29)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4-29), (16-8)$$

para reemplazar ρ en la ecuación (16-7) por $\nabla \cdot \mathbf{D}$. Entonces

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0 \quad (16-9)$$

donde hemos considerado que \mathbf{D} es una función suficientemente continua de las variables del espacio y tiempo de tal forma que el orden de las derivadas puede intercambiarse. Ahora está claro que si $\partial\mathbf{D}/\partial t$ se añadiera al lado derecho de la ecuación (16-6), la inconsistencia desaparecería, es decir, la divergencia de cualquiera de los lados sería cero.

Por lo tanto, tenemos que corregir la ley de Ampère y escribirla de la forma

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (16-10)$$

y nos referiremos a la derivada respecto al tiempo de \mathbf{D} como *corriente de desplazamiento*.

La introducción de la corriente de desplazamiento hace posible las ondas electromagnéticas, como veremos a continuación, y es la esencia de la gran contribución de Maxwell a la teoría electromagnética. Nuestro desarrollo es similar al suyo. Debemos enfatizar que esto no es una demostración, sino una hipótesis motivada por observaciones.

experimentales. Experimentos posteriores han elevado la hipótesis a un principio sobre el que se han basado los desarrollos ulteriores.

En los primeros capítulos dejamos de lado la corriente de desplazamiento. Hacer esto fue posible por una de estas tres razones: los campos eran constantes en el tiempo de tal forma que las derivadas en el tiempo fueron cero; los materiales eran buenos conductores de electricidad de tal forma que la corriente de desplazamiento era pequeña comparada con la corriente de conducción; o la corriente de desplazamiento estaba confinada a regiones pequeñas del espacio que no necesitaron considerarse explícitamente (como en los condensadores). La razón del campo constante es evidente, pero las otras dos exigen un poco más de consideración. Para un buen conductor —un metal— la conductividad es del orden de 10^8 S/m para frecuencias por debajo del infrarrojo. Por tanto, la corriente de conducción es del orden de 10^8 E. La magnitud de la corriente de desplazamiento está dominada por el factor $\epsilon\omega$. Como $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ C²/N · m², este factor es pequeño excepto a muy altas frecuencias (más allá del infrarrojo) donde el análisis básico falla por otras razones. Para frecuencias de hasta, digamos, 10^{11} Hz, la corriente de desplazamiento en metales puede ignorarse. En el caso de buenos dieléctricos, la corriente de conducción es muy pequeña o cero; la corriente de desplazamiento nunca puede ignorarse. Aun a 60 Hz, toda la corriente que pasa a través de un condensador en un circuito de c.a. es corriente de desplazamiento. No fue necesario considerar explícitamente la corriente de desplazamiento en el capítulo 13 porque no se examinaron los campos que varían con el tiempo en el interior del condensador cuando se analizaron los circuitos de c.a.

Regresemos ahora al examen del conjunto completo de las ecuaciones de Maxwell y sus implicaciones.

16.2 ECUACIONES DE MAXWELL Y SUS BASES EMPÍRICAS

Las ecuaciones de Maxwell consisten en la ecuación (16-10) más las tres ecuaciones con las que ya estamos familiarizados, a saber:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (16-10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11-6), (16-11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4-29), (16-12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8-30), (16-13)$$

Cada una de estas ecuaciones representa una generalización de algunas observaciones experimentales: la ecuación (16-10) representa una extensión de la ley de Ampère; la ecuación (16-11) es la forma diferencial de la ley de inducción electromagnética de Faraday; la ecuación (16-12) es la ley de Gauss, que a su vez se deduce de la ley de

Coulomb; y la ecuación (16-13) representa generalmente el hecho de que nunca se han observado los monopolos magnéticos.

Está claro que las ecuaciones de Maxwell representan expresiones matemáticas de algunos resultados experimentales. Con esta aclaración, es evidente que no pueden demostrarse; sin embargo, la aplicabilidad a cualquier situación puede verificarse. Como resultado del extenso trabajo experimental, ahora se sabe que las ecuaciones de Maxwell se aplican a casi todas las situaciones macroscópicas y se usan generalmente, al igual que la conservación de la cantidad de momento, como principios físicos. Son las ecuaciones básicas que rigen los campos electromagnéticos producidos por fuentes de carga y densidades de corrientes ρ y \mathbf{J} . Si están presentes cuerpos materiales, para poder usar las ecuaciones de Maxwell deben conocerse las ecuaciones constitutivas $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$, ya sea experimentalmente o a partir de la teoría microscópica de la clase particular de materia. La densidad de corriente \mathbf{J} en un material incluye una contribución dada por una tercera ecuación constitutiva, $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$, que también debe conocerse experimental o teóricamente. Junto con la ecuación de la fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, que describe la acción de los campos sobre partículas cargadas, este conjunto de leyes nos da una descripción clásica completa de las partículas que interactúan electromagnéticamente.

Hemos visto que la corriente de desplazamiento, introducida en la sección anterior, es necesaria para mantener la conservación de la carga, y que cuando se incluye en las ecuaciones de Maxwell, éstas ya implican la ecuación de continuidad, de modo que esta última no necesita añadirse al conjunto de ecuaciones fundamentales. Las ecuaciones de Maxwell tienen dos grandes consecuencias de interés, que se exponen en las siguientes secciones. Se verá que dependen de manera crucial de la corriente de desplazamiento.

16.3 ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA

Se demostró en el capítulo 6 que la cantidad

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv \quad (16-14)$$

puede identificarse con la energía potencial electrostática del sistema de cargas que producen el campo eléctrico. Esto se derivó calculando el trabajo realizado para establecer el campo. De forma semejante,

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv \quad (16-15)$$

se identificó en el capítulo 12 con la energía almacenada en el campo magnético. Surge ahora la cuestión de la aplicabilidad de estas expresiones a situaciones no estáticas.

Si se hace el producto escalar de la ecuación (16-10) por \mathbf{E} y la ecuación resultante se resta del producto escalar de la ecuación (16-11) por \mathbf{H} , la ecuación que

se obtiene es

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (16-16)$$

El lado izquierdo de esta expresión puede convertirse en una divergencia utilizando la identidad

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$$

para obtener

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (16-17)$$

Si en el medio en el que se aplica la ecuación (16-17) $\mathbf{D}(t)$ es proporcional a $\mathbf{E}(t)$, y $\mathbf{B}(t)$ es proporcional a $\mathbf{H}(t)$ con constantes de proporcionalidad que no dependen explícitamente del tiempo,* entonces las derivadas con respecto al tiempo en el lado derecho pueden escribirse como

* Por proporcionalidad queremos decir que g , ϵ y μ no dependen explícitamente del campo o de los valores del tiempo. Dicho medio se llama lineal y no dispersivo. Tanto la linealidad como la dispersión se analizarán con mayor detalle en el capítulo 19. Los capítulos 17 y 18 se relacionan con radiación monocromática para la cual no es necesario considerar la dispersión de forma explícita. Así mismo, nos referimos exclusivamente a medios lineales en estos capítulos. Incluso una propagación de ondas monocromáticas en un medio no lineal genera frecuencias armónicas; no consideramos este fenómeno aunque tiene una importancia práctica significativa. Cuando se requieran restricciones adicionales, se indicarán explícitamente.

Debe observarse también que la anisotropía sola no invalida las expresiones

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad \text{y} \quad \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

En el caso de un medio anisótropo, la relación entre \mathbf{E} y \mathbf{D} puede escribirse como

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \left(E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial t} E_j \right)$$

Un argumento sencillo basado en la conservación de la energía (Wooster, *Crystal Physics*, Cambridge University Press, pág. 277, 1938) demuestra que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Utilizando este resultado para intercambiar i y j en el último término, tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 E_i \epsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t}$$

Si $\{\hat{f}_{ij}\}$ es un conjunto de constantes independientes de \mathbf{E} y de t , entonces

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^3 E_i \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j = \sum_{i=1}^3 E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Por tanto, se ve que la sola anisotropía no es restrictiva para esta deducción.

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

y también

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

Usando esta relación, la ecuación (16-17) toma la forma

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (16-18)$$

El primer término del lado derecho es la derivada con respecto al tiempo de la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética; el segundo término es, en muchos casos (en particular si $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$), exactamente menos la razón de calentamiento por Joule por unidad de volumen.

Al integrar sobre un volumen fijo V limitado por la superficie S se tiene

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (16-19)$$

Aplicando el teorema de la divergencia al lado izquierdo, se obtiene

$$\oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv$$

Escribiendo de nuevo esta ecuación

$$-\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv + \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da \quad (16-20)$$

queda claro que el término $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ se compone de dos partes: la razón de cambio de la energía electromagnética almacenada en V y una integral de superficie. El lado izquierdo de la ecuación (16-20) es la potencia transferida al campo electromagnético a través del movimiento de carga libre en el volumen V . Si no hay fuentes de fem en V , entonces el lado izquierdo de la ecuación (16-20) es negativo e igual a menos la producción de calor por Joule por unidad de tiempo. Sin embargo, en algunas circunstancias el lado izquierdo de la ecuación (16-20) puede ser positivo. Supongamos que una partícula cargada q se mueve con una velocidad constante \mathbf{v} bajo la influencia combinada de fuerzas mecánicas, eléctricas y magnéticas; la razón a la que la fuerza mecánica hace trabajo sobre la partícula es

$$\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{n} = -q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = -q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

Pero según la ecuación (7-4), la densidad de corriente se define como

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i$$

Por tanto, la razón a la que se efectúa el trabajo mecánico (por unidad de volumen) es

$$\sum_i N_i \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v}_i = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

y esta densidad de potencia se transfiere al campo electromagnético.

Como la integral de superficie de (16-20) contiene sólo los campos eléctricos y magnéticos, es factible interpretar este término como la razón de flujo de la energía a través de la superficie. La ecuación (16-20) expresa, por tanto, la conservación de la energía en un volumen fijo V .

Regresemos a la ecuación diferencial correspondiente (Ec.16-18), que expresa la *conservación de energía* en un punto. Si hacemos las abreviaturas

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (16-21)$$

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (16-22)$$

donde \mathbf{S} se llama *vector de Poynting*, entonces la ecuación (16-18) implica que en cualquier punto

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (16-23)$$

No hay duda de que $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ es el trabajo realizado por el campo local sobre las partículas cargadas por unidad de volumen. Anteriormente, u se interpretó como la densidad de energía de los campos eléctricos y magnéticos. Si $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$, la ecuación (16-23) expresaría la conservación local de la energía: La razón de cambio de la energía del campo es igual a la disipación de potencia por unidad de volumen en cada punto. Si, por otro lado, $\nabla \cdot \mathbf{S} \neq 0$, pero $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$ (por ejemplo en un medio no conductor), entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (16-24)$$

Esta expresión tiene exactamente la forma matemática de la ecuación de continuidad (16-7) para la carga, excepto que la densidad de energía u toma el lugar de la densidad de carga ρ . Si la ecuación (16-24) ha de describir la conservación de energía, $\nabla \cdot \mathbf{S}$ debe representar la divergencia de una densidad de corriente de energía o, en otras palabras, una razón de flujo de energía por unidad de área. Generalmente $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ se trata como el flujo local de energía por unidad de área.* Usaremos estas interpretaciones

* Existe una continua controversia sobre este punto. Para un buen análisis, véase W. H. Furry, *American Journal of Physics*, vol. 37, pág. 621, 1969.

de μ y S , aunque reconociendo que sólo se requieren directamente en las ecuaciones de Maxwell las interpretaciones de su derivada temporal y su divergencia, respectivamente. Por lo general, sólo estos dos últimos valores pueden medirse físicamente. En cualquier caso, la ecuación (16-23) expresa la conservación de la energía en forma local, como lo hace la ecuación (16-20) en forma integral.

16.4 LA ECUACIÓN DE ONDA

Una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones de Maxwell es la deducción de las ecuaciones de propagación de ondas electromagnéticas en un medio lineal. La ecuación de onda para \mathbf{H} se deduce tomando el rotacional de (16-10):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Al poner $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$ y suponiendo que g y ϵ son constantes, tenemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = g \nabla \times \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}$$

El orden de las derivadas con respecto al tiempo y al espacio puede intercambiarse si \mathbf{E} es una función que se comporta lo suficientemente bien, lo que suponemos es el caso. Se puede usar ahora la ecuación (16-11) para eliminar $\nabla \times \mathbf{E}$, dando

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (16-25)$$

donde se ha utilizado $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, siendo μ una constante. La identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2 \quad (16-26)$$

se utiliza ahora para obtener

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (16-27)$$

Como μ es una constante,

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Por consiguiente, el primer término del lado izquierdo de la ecuación (16-27) se anula. La ecuación de onda final es

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (16-28)$$

El vector \mathbf{E} satisface la misma ecuación de onda, como se ve fácilmente tomando primero el rotacional de la ecuación (16-11):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Utilizando la ecuación (16-10) para eliminar el campo magnético y considerando g , μ y ϵ como constantes, se tiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Al aplicar la identidad vectorial (16-26) y restringir la aplicación de la ecuación a un medio libre de carga, de modo que $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (16-29)$$

Las ecuaciones de onda deducidas antes rigen el campo electromagnético en un medio lineal homogéneo en el que la densidad de carga es cero, sea este medio conductor o no. Sin embargo, no es suficiente que estas ecuaciones se satisfagan; las ecuaciones de Maxwell también deben satisfacerse. Está claro que las ecuaciones (16-28) y (16-29) son una consecuencia necesaria de las ecuaciones de Maxwell, pero lo inverso no es cierto. Al resolver las ecuaciones de onda, debe tenerse especial cuidado en obtener soluciones a las ecuaciones de Maxwell.

16.5 ONDAS MONOCROMÁTICAS

Las ondas monocromáticas son ondas en las que todos los campos están caracterizados por una sola frecuencia. En este caso, podemos resolver la ecuación (16-29) para encontrar \mathbf{E} y entonces utilizar las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas para encontrar los otros campos. Esto obviamente garantiza que se satisfagan las ecuaciones de Maxwell.

Los métodos de análisis complejo proporcionan una forma conveniente para instrumentar este procedimiento. Se considera que la dependencia del campo con respecto al tiempo (para concretar tomaremos el vector \mathbf{E}) es $e^{-i\omega t}$, de modo que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (16-30)$$

Debe recordarse que el campo eléctrico físico se obtiene tomando la parte real* de la ecuación (16-30). Además, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ es en general complejo, de modo que el campo

* Como se estudió en el capítulo 13, se pasa de la práctica descripción matemática en términos de las variables complejas a las cantidades físicas, tomando ya sea la parte real o la imaginaria de la cantidad compleja. La elección de la parte real o imaginaria es arbitraria. Las dos elecciones difieren sólo en un cambio de fase de $\pi/2$; sin embargo, siempre debe hacerse la misma elección en un problema dado. En este capítulo y en los siguientes, la parte real de las cantidades complejas representará las cantidades físicas, a menos que se indique explícitamente otra cosa.

eléctrico real es proporcional a $\cos(\omega t + \phi)$, donde ϕ es la fase de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Empleando (16-30) en la ecuación (16-29), se tiene

$$e^{-i\omega t} \{ \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E} + i\omega g \mu \mathbf{E} \} = 0 \quad (16-31)$$

para la ecuación que rige la variación espacial del campo eléctrico (el factor común $e^{-i\omega t}$ puede omitirse por supuesto). El siguiente problema es resolver la ecuación (16-31) en los distintos casos especiales de interés para determinar la variación espacial del campo electromagnético. Esto se tratará en el siguiente capítulo; aquí solamente estudiaremos algunos de los casos más sencillos.

Primero, supondremos que el "medio" es el espacio vacío, de modo que $g = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$. Además, supondremos que $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ varía sólo en una dimensión, digamos la dirección z , y que es independiente de x e y . Entonces la ecuación (16-31) se convierte en

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} + (\omega/c)^2 \mathbf{E} = 0 \quad (16-32)$$

donde hemos escrito

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$$

como se sugirió en el capítulo 8 por razones dimensionales; c tiene las dimensiones de una velocidad. Esta ecuación (ecuación de Helmholtz) es matemáticamente la misma que la ecuación de un oscilador armónico y tiene como solución

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i\kappa z}$$

donde \mathbf{E}_0 es un vector constante y

$$\kappa = \omega/c \quad (16-33)$$

Sustituyendo este $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en la ecuación (16-30), obtenemos la solución total

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \mp \kappa z)} \quad (16-34)$$

o, tomando la parte real,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t \mp \kappa z) \quad (16-35a)$$

Con (16-33), una forma equivalente es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t \mp z/c) \quad (16-35b)$$

La ecuación (16-35) representa una onda senoidal que se desplaza hacia la derecha o hacia la izquierda en la dirección z (según se use el signo más o menos). La velocidad de propagación de la onda es c . Si la luz es una forma de radiación electromagnética, entonces las ecuaciones de Maxwell predicen que $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2.9979 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. Este resultado, que ya habíamos anticipado, fue enunciado por primera vez por Maxwell y se consideró un gran triunfo de su teoría, ya que en ese tiempo la naturaleza electromagnética de la luz era sólo pura especulación. La forma de la ecuación (16-35a) muestra que la frecuencia de la onda es $f = \omega/2\pi$ y la

longitud de onda es $\lambda = 2\pi/\kappa$. Por tanto, la ecuación (16-33) es el conocido resultado de una onda,

$$\lambda f = c$$

En un dieléctrico no magnético y no conductor seguiremos teniendo $g = 0, \mu = \mu_0$, pero ahora $\epsilon = K\epsilon_0$. La deducción anterior conducirá exactamente a lo mismo, excepto que ahora la ecuación (16-33) se transforma en

$$\kappa = \sqrt{K} \omega/c \quad (16-33a)$$

Definiendo $n = \sqrt{K}$, observamos que los resultados son los mismos que en el vacío,* excepto que la velocidad de la propagación de onda es ahora c/n en lugar de c . La cantidad n se llama *índice de refracción* del medio dieléctrico; para el vacío, $n = 1$. Ésta es la causa de los efectos de refracción en materiales transparentes como veremos en el capítulo 18.

Si el medio es conductor, $g > 0$, el tercer término en la ecuación (16-31) debe mantenerse. Cuando g es pequeña, el resultado será una onda amortiguada, como se verá en el próximo capítulo. Al decir g pequeña, queremos indicar que el tercer término de la ecuación (16-31) es pequeño comparado con el segundo término, que llevó a la solución de onda, o sea:

$$\omega g \mu \ll \omega^2 \epsilon \mu, \quad g \ll \omega \epsilon$$

Por otro lado, cuando $g \gg \omega \epsilon$, podemos despreciar el segundo término de la ecuación (16-31). De nuevo, restringiéndonos al caso unidimensional, obtenemos

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} + i\omega g \mu \mathbf{E} = 0$$

Podemos hacer real el coeficiente de \mathbf{E} si consideramos que $\alpha = i\omega \epsilon$ es real o, en otras palabras, que la frecuencia es imaginaria. Entonces, si

$$\kappa = \sqrt{\alpha g \mu}$$

la dependencia espacial $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ de la solución es exactamente la misma de antes. La diferencia es que la dependencia con el tiempo en (16-30) se convierte en

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-\alpha t}$$

Esto es, el campo simplemente decae de manera exponencial con el tiempo, en lugar de oscilar como una onda. La transición entre el decaimiento y el comportamiento de onda sucede cuando

$$|\omega| = |\alpha| \equiv \left| \frac{g}{\epsilon} \right| = 1/t_c$$

* Si la permeabilidad relativa no es 1, entonces la ecuación (16-33) se convierte en $\kappa = \sqrt{K K_m} \omega/c$ y $n = \sqrt{K K_m}$. Para muchos propósitos, es suficiente considerar sólo el caso $K_m = 1$ y esto es lo que haremos en el resto del libro.

donde t_c es el tiempo de relajación del material estudiado en el capítulo 7. (Repetimos que es necesario tener mucho cuidado cuando esta condición se aplique a un metal, ya que el propio término g/ϵ depende fuertemente de ω .)

Finalmente, si seguimos el proceso de la deducción de la ecuación (16-31) regresando hasta las ecuaciones de Maxwell, observamos que el segundo término, o $\partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2$ de la ecuación (16-29), se deduce a partir de la corriente de desplazamiento $\partial \mathbf{D}/\partial t$ en la ecuación (16-10), mientras que el tercer término, o $\partial \mathbf{E}/\partial t$ de la ecuación (16-29), se deduce de la corriente de transporte \mathbf{J} en la ecuación (16-10). Por tanto, la existencia misma de la propagación de ondas electromagnéticas depende de la corriente de desplazamiento introducida por Maxwell. Sin ella, sólo ocurriría el decaimiento exponencial de los campos.

16.6 CONDICIONES EN LA FRONTERA

Las condiciones que los campos eléctricos y magnéticos deben satisfacer en una zona interfacial entre dos medios se deducen de las ecuaciones de Maxwell exactamente como en el caso estático. La condición en la frontera más evidente y universal se aplica a la inducción magnética \mathbf{B} , que satisface la ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (16-36)$$

En cualquier zona interfacial entre dos medios se puede construir una superficie con forma de caja de pastillas, como se muestra en la figura 16.2. El teorema de la divergencia puede aplicarse a la divergencia de \mathbf{B} sobre el volumen encerrado por esta superficie, para obtener

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 \, da + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 \, da + \int_{S_3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_3 \, da = 0 \quad (16-37)$$

Si \mathbf{B} está limitado, el que h tienda a cero hace que el último término se anule y que S_1 tienda hacia S_2 geoméricamente. Teniendo en cuenta los sentidos opuestos de \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 , se concluye rápidamente que

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (16-38)$$

exactamente como en el caso estático.

La componente tangencial del campo eléctrico puede analizarse de modo igualmente sencillo. La ecuación básica es otra vez una de las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (16-39)$$

FIGURA 16.2

Superficie en forma de caja de pastillas en la zona interfacial entre dos medios que puede utilizarse para obtener las condiciones en la frontera sobre los vectores de campo.

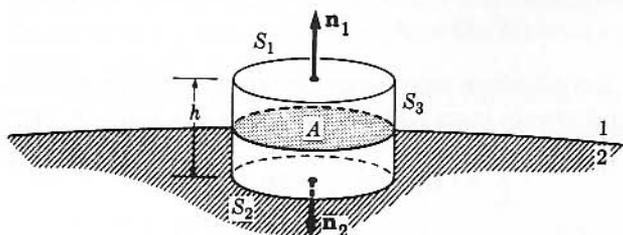
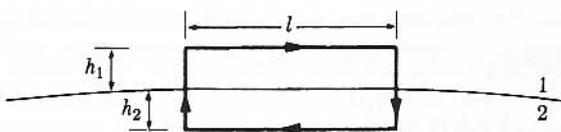


FIGURA 16.3

La trayectoria rectangular indicada sobre la zona interfacial entre dos medios puede utilizarse para obtener condiciones en la frontera sobre los vectores de campo.



Integrando esta ecuación sobre la superficie limitada por una espira rectangular, como la de la figura 16.3, se tiene

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (16-40)$$

y aplicando el teorema de Stokes al lado izquierdo se tiene

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1E_{1n} + h_2E_{2n} - h_1E'_{1n} - h_2E'_{2n} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (16-41)$$

Si la espira se reduce ahora dejando que h_1 y h_2 tiendan a cero, los últimos cuatro términos del lado izquierdo se anulan, así como el lado derecho, siempre y cuando $\partial \mathbf{B} / \partial t$ esté limitada. La ecuación resultante contiene a l como factor común; suprimiéndolo se tiene

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (16-42)$$

Por tanto, la componente tangencial de \mathbf{E} debe ser continua al atravesar la zona interfacial.

La condición en la frontera sobre la componente normal del desplazamiento eléctrico es más compleja; sin embargo, también se deduce de una de las ecuaciones de Maxwell. La ecuación apropiada para este caso es

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (16-43)$$

Si construimos un volumen con forma de caja de pastillas, como el de la figura 16.2, e integramos la ecuación (16-43) sobre este volumen, obtenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv = \int_V \rho \, dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia y dejando que h tienda a cero, encontramos que

$$(D_{1n} - D_{2n}) = \sigma \quad (16-44)$$

donde σ es la densidad de carga superficial en la zona interfacial. El hecho de que, en general, σ no sea cero, introduce alguna complejidad en esta condición de frontera; sin embargo, observando que la carga debe conservarse, es decir que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (16-45)$$

podemos hacer algunas simplificaciones. Si integramos esta ecuación como lo hicimos con la ecuación (16-43) y reducimos la caja de pastillas de la misma forma, obtenemos

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (16-46)$$

Si se considera únicamente la radiación monocromática, la densidad de carga superficial debe variar como $e^{-i\omega t}$; por tanto, el segundo miembro de la ecuación (16-46) puede escribirse como $i\omega\sigma$. Utilizando las relaciones constitutivas $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$, las ecuaciones (16-44) y (16-46) pueden escribirse de la forma

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma \quad (16-47)$$

$$g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = i\omega\sigma \quad (16-48)$$

Pueden observarse varios casos de interés práctico. Si σ es cero, entonces

$$\frac{\epsilon_1}{g_1} = \frac{\epsilon_2}{g_2}$$

lo que puede ser cierto para materiales elegidos adecuadamente, o bien, si $g_1 = g_2 = 0$, o ∞ . El caso en el que ambas conductividades son infinitas no es de gran interés; sin embargo, el caso en el que ambas se anulan tiene lugar aproximadamente en la superficie de separación entre dos buenos dieléctricos. Si σ no es cero, que es tal vez el caso más común, entonces puede eliminarse de las ecuaciones (16-47) y (16-48). El resultado de esta eliminación es

$$\left(\epsilon_1 + i\frac{g_1}{\omega}\right)E_{1n} - \left(\epsilon_2 + i\frac{g_2}{\omega}\right)E_{2n} = 0 \quad (16-49)$$

Un último caso de interés ocurre cuando una conductividad, digamos g_2 , es infinita. En este caso, E_{2n} debe anularse y E_{1n} tiene que ser igual a σ/ϵ_1 para que las ecuaciones (16-48) y (16-47) se satisfagan.

La condición final en la frontera es la impuesta sobre la componente tangencial de la intensidad magnética \mathbf{H} . Esta condición en la frontera se obtiene integrando la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (16-50)$$

sobre el área encerrada por una espira tal como la que muestra la figura 16.3. Si se hace esto y la espira se reduce como antes, la condición en la frontera resultante es

$$H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp} \quad (16-51)$$

donde j_{\perp} es la componente de la densidad de corriente superficial perpendicular a la dirección de la componente de \mathbf{H} que se está igualando. La idea de una densidad de corriente superficial es análoga a la densidad de carga superficial; representa una corriente finita en una capa infinitesimal. La densidad de corriente superficial es cero a menos que la conductividad sea infinita; en consecuencia, para una conductividad finita,

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (16-52)$$

Es decir, a menos que un medio tenga una conductividad infinita, la componente tangencial de \mathbf{H} es continua. Si la conductividad del medio 2 es infinita, entonces, como ya se ha demostrado, $E_{2n} = 0$. Un resultado más general puede obtenerse considerando la ecuación de Maxwell (16-50) aplicada al medio 2:

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 - \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} = \mathbf{J}_2 \quad (16-53)$$

Usando las relaciones constitutivas y suponiendo que \mathbf{E}_2 varía con el tiempo como $e^{-i\omega t}$, se tiene

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{g_2 - i\omega\epsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}_2 \quad (16-54)$$

Si se hace la suposición razonable de que \mathbf{H}_2 sea tanto limitada como derivable, entonces la ecuación (16-54) implica que \mathbf{E}_2 es cero en un medio de conductividad infinita. Con las mismas suposiciones hechas anteriormente,

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{E}_2 \quad (16-55)$$

y la anulación de \mathbf{E}_2 implica también la anulación de \mathbf{H}_2 . Si \mathbf{H}_2 se anula, entonces la condición en la frontera sobre la componente tangencial de \mathbf{H} en una zona interfacial en que uno de los medios tiene una conductividad infinita es

TABLA 16.1

Condiciones en la frontera

g	E_t	D_n	H_t	B_n
$g_1 = g_2 = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$D_{1n} = D_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
$g_2 = \infty$	$E_{2t} = 0$	$D_{2n} = 0$	$H_{2t} = 0$	$B_{2n} = 0$
	$E_{1t} = 0$	$D_{1n} = \sigma$	$H_{1t} = j_{\perp}$	$B_{1n} = 0$
$g_1, g_2 \text{ arb. } \neq \infty$	$E_{1t} = E_{2t}$	$\left(\epsilon_1 + i\frac{g_1}{\omega}\right)E_{1n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
		$= \left(\epsilon_2 + i\frac{g_2}{\omega}\right)E_{2n}$		

$$H_{1t} = j_{\perp} \quad (16-56)$$

Se han obtenido las condiciones en la frontera; como referencia conveniente, se presentan en la tabla 16.1 para $g = 0$, $g = \infty$ y g arbitraria.

16.7 LA ECUACIÓN DE ONDA CON FUENTES

En las secciones anteriores se demostró que las ecuaciones de Maxwell predicen la propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas a través de un medio lineal y también que los campos deben adaptarse en una zona interfacial entre dos medios diferentes, de acuerdo con las condiciones en la frontera adecuadas. Se ha considerado que la densidad de carga ρ en el medio era cero y que la única densidad de corriente \mathbf{J} surgía de la respuesta pasiva de un medio óhmico al campo eléctrico de la onda. No preguntamos cómo eran producidas esas ondas, pero ahora encontraremos que son campos producidos por fuentes de carga distantes que sufren un movimiento acelerado.

El problema ahora es considerar las distribuciones de carga y de corriente especificadas, $\rho(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, y hallar los campos producidos por ellas. Hay diversas formas de enfocar el problema; la más fructífera es el enfoque del potencial que se desarrolla de forma análoga a los procedimientos usados en electrostática y magnetostática. Como la inducción magnética tiene divergencia cero, puede representarse siempre como el rotacional de un potencial vectorial. Esto es

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (16-57)$$

Utilizando esta expresión para \mathbf{B} en la ecuación (16-11) se tiene

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (16-58)$$

Suponiendo una continuidad suficiente de los campos para intercambiar las derivadas espacial y temporal, la ecuación (16-58) puede escribirse como

$$\nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (16-59)$$

El vector $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ tiene, por tanto, un rotacional cero y puede escribirse como el gradiente de un escalar:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (16-60)$$

Las ecuaciones (16-57) y (16-60) dan los campos eléctrico y magnético en función de un potencial vector \mathbf{A} y un potencial escalar φ . Estos potenciales satisfacen ecuaciones de onda que son muy similares a las satisfechas por los campos. La ecuación de onda para \mathbf{A} se deduce sustituyendo en la ecuación (16-10) las expresiones para \mathbf{B} y \mathbf{E} dadas en las ecuaciones (16-57) y (16-60), con el resultado

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \mathbf{J} \quad (16-61)$$

Escribiendo $\nabla \nabla \cdot - \nabla^2$ para $\nabla \times \nabla \times$ y multiplicando por μ se tiene

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \mathbf{J} \quad (16-62)$$

Hasta ahora sólo se ha especificado el rotacional de \mathbf{A} ; la elección de la divergencia de \mathbf{A} es aún arbitraria. Es evidente a partir de la ecuación (16-62) que, imponiendo la llamada *condición de Lorentz* (o norma de Lorentz, cf. pág. 412),

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (16-63)$$

se tiene una simplificación considerable. Si se satisface esta condición, entonces \mathbf{A} satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (16-64)$$

Además, sustituyendo la ecuación (16-60) en (16-12), se tiene

$$-\epsilon \left[\nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \rho \quad (16-65)$$

Intercambiando el orden de la divergencia y la derivada con respecto al tiempo que se aplica a \mathbf{A} y utilizando la condición de Lorentz (Ec.16-63), se tiene

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (16-66)$$

Por tanto, imponiendo la condición de Lorentz, tanto el potencial escalar como el vector están obligados a satisfacer ecuaciones de onda no homogéneas que tienen igual forma.

El problema de hallar la solución general de la ecuación de onda escalar no homogénea es análogo al de hallar la solución general de la ecuación de Poisson. Recordemos que, en este último caso, la solución general consiste en una solución particular de la ecuación no homogénea, más una solución general de la homogénea. La inclusión de las soluciones de la ecuación homogénea proporciona los medios para satisfacer las condiciones en la frontera arbitrarias adecuadas, mientras que la solución particular asegura que la función total satisfaga la ecuación no homogénea. Exactamente las mismas consideraciones se aplican a la ecuación de onda no homogénea; la solución general consiste en una solución particular más una solución general de la ecuación homogénea. Los métodos para encontrar algunas soluciones de la ecuación homogénea se tratarán en el capítulo 17. Estos métodos pueden ampliarse y complementarse para dar soluciones a casi cualquier problema que pueda resolverse. Se dispone de métodos aproximados para problemas que no pueden resolverse en términos de funciones conocidas. Resta, entonces, hallar la solución particular necesaria de la ecuación no homogénea. La ecuación de onda escalar no homogénea (16-66) se reduce en el caso estático, $\partial\phi/\partial t = 0$, a la ecuación de Poisson, de la que ya conocemos una solución particular a partir de la ecuación (3-1) (para el vacío):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (16-67)$$

La ecuación de onda vectorial (16-64) tiene una solución semejante en el caso estático (vacío), dada en la ecuación (8-61). Desafortunadamente, no podemos obtener soluciones para el caso dependiente del tiempo por simple sustitución de $\rho(\mathbf{r}', t)$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ en las soluciones estáticas, por razones que veremos.

Escribamos la ecuación (16-66) para el vacío, utilizando $1/\sqrt{\epsilon\mu} = c/n$, con el índice de refracción $n = 1$:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (16-68)$$

puede resolverse más fácilmente hallando la solución para una carga puntual y luego sumando todos los elementos de carga $\rho \Delta v$ de la distribución de carga adecuada. La localización más conveniente para la carga puntual es en el origen de coordenadas. Por tanto, la ecuación

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (16-69)$$

debe satisfacerse en todo punto menos en el origen, mientras que en un pequeño volumen Δv que rodea al origen,

$$\int_{\Delta v} dv \left[\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] = -\frac{1}{\epsilon_0} q(t) \quad (16-70)$$

debe satisfacerse. Se supone que la función $q(t)$ representa una carga puntual de magnitud q que está localizada en el origen en el tiempo t ; esto es simplemente un artificio matemático para resolver la ecuación sin tener que hacer ninguna suposición acerca de cómo se conservó la carga puntual en tiempos anteriores o posteriores. (Esto no representa un movimiento físico de la carga puntual, y la solución resultante para φ no es el potencial correcto para una carga puntual en movimiento. Esto último es más complicado y se tratará en el Cap. 21.) Está claro, de la simetría de la distribución de carga, que la dependencia espacial de φ debe ser sólo con respecto a r . Con esto como guía, puede hacerse un intento para resolver la ecuación (16-69). Como φ no depende ni del ángulo azimutal ni de la colatitud, la ecuación (16-69) se convierte en

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (16-71)$$

Ahora, al poner

$$\varphi(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r} \quad (16-72)$$

la ecuación (16-71) se transforma en

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (16-73)$$

Ésta es la ecuación de onda unidimensional que es satisfecha por cualquier función de $r - ct$ o de $r + ct$. Para verificar esto, sea

$$u = r - ct$$

y sea $f(u)$ una función de u que pueda derivarse dos veces; entonces

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{d^2 f}{du^2} \quad (16-74)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2} \quad (16-75)$$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (16-74) y (16-75) en (16-73), se verifica que cualquier función de $(r - ct)$ que sea derivable dos veces es una solución de la ecuación (16-73). Un cálculo análogo verifica que una función de $(r + ct)$ es una solución. Por tanto,

$$\chi = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (16-76)$$

es una solución muy arbitraria de la ecuación (16-73). Se encontrará que $g(r + ct)$ no

existe en nuestras aplicaciones de la ecuación de onda. Por esta razón se omitirá, y sólo se utilizará el primer término de la ecuación (16-76), puesto que este procedimiento simplifica las ecuaciones que resultan y no origina omisiones particulares. Puede observarse que $f(r - ct)$ representa una onda que se propaga hacia afuera de la carga fuente q que está en el origen, mientras que $g(r + ct)$ representa una onda que se propaga del infinito hacia dentro de la carga fuente. Conservaremos la primera y dejamos de lado la última prácticamente por la misma razón por la que conservaríamos la solución de una onda plana que se propaga hacia la derecha si estuviéramos situados a la derecha de la fuente, abandonando la otra dirección de propagación.

Se dispone ahora de una solución esféricamente simétrica de la ecuación (16-69),

$$\varphi = \frac{f(r - ct)}{r} \quad (16-77)$$

Además, esta solución contiene una función arbitraria que puede elegirse de modo que la ecuación (16-70) también se satisfaga. La elección adecuada se obtiene observando que, para una carga estática, el potencial compatible con las ecuaciones (16-69) y (16-70) es

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (16-78)$$

Se puede hacer que concuerden las dos formas funcionales para φ dadas por las ecuaciones (16-77) y (16-78) escogiendo

$$f(r - ct) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0} \quad (16-79)$$

La solución a las ecuaciones (16-69) y (16-70) es entonces

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (16-80)$$

Con este resultado, encontramos directamente que la ecuación (16-66) es satisfecha por

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (16-81)$$

donde $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ se llama *tiempo de retardo*; φ se llama *potencial escalar retardado*.

La solución de la ecuación (16-64) puede construirse exactamente de la misma forma. Los vectores \mathbf{A} y \mathbf{J} se descomponen primero en sus componentes rectangulares. Las tres ecuaciones son bastante análogas a la ecuación (16-66), siendo la

ecuación en x , por ejemplo,

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x \quad (16-82)$$

Cada una de estas ecuaciones puede resolverse exactamente como se hizo para la ecuación (16-66), dando, por ejemplo,

$$A_x(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_x(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (16-83)$$

Estas componentes se combinan entonces para dar

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (16-84)$$

que es el *potencial vector retardado*.

La interpretación física de los potenciales retardados es interesante. Las ecuaciones (16-81) y (16-84) indican que, en un punto dado \mathbf{r} y en un instante dado t , los potenciales se determinan por la carga y la corriente que existían en otros puntos del espacio \mathbf{r}' en los instantes anteriores t' . El tiempo adecuado para cada punto fuente es anterior a t en una cantidad igual al tiempo necesario para desplazarse desde la fuente al punto \mathbf{r} del campo con velocidad c . Si, por ejemplo, una carga puntual q situada en el origen de coordenadas se cambiara repentinamente, entonces el efecto de este cambio no se sentiría a una distancia r hasta que transcurriera un tiempo r/c después de que el cambio se hubiera producido. El efecto del cambio se propaga hacia afuera aproximadamente como un frente de onda esférica. (El caso real para una carga puntual es algo más complicado porque la densidad de carga y la densidad de corriente están íntimamente relacionadas por $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$; cf. Cap. 21.)

Habiendo encontrado los potenciales escalar y vector, podemos determinar los campos aplicando el gradiente a φ , y la derivada con respecto al tiempo y el rotacional a \mathbf{A} . Estas operaciones son directas en principio; sin embargo, se verá que son relativamente complicadas en la práctica.

En el procedimiento anterior fue esencial imponer la condición de Lorentz, ecuación (16-63), sobre los potenciales; de otro modo, no serían las ecuaciones de onda simple las que los potenciales tendrían que satisfacer. Para verificar que siempre tenemos la libertad de imponer esta condición, supongamos que \mathbf{A} y φ son una elección particular de las funciones potenciales que dan los campos correctos \mathbf{E} y \mathbf{B} de acuerdo con las ecuaciones (16-57) y (16-60). Entonces, si eligiéramos unos nuevos potenciales,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\xi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\xi}{\partial t} \quad (16-85)$$

éstos darían exactamente los mismos campos \mathbf{E} y \mathbf{B} cuando se sustituyeran en las ecuaciones (16-57) y (16-60), sin importar el valor que usemos para la función ξ , que es completamente arbitraria. Este cambio a los nuevos pero físicamente equivalentes potenciales se llama *transformación de norma*. Al sustituir ahora \mathbf{A}' y φ' en la ecuación (16-63), obtenemos, después de reordenar términos, una ecuación de onda escalar para ξ ,

$$\nabla^2 \xi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

como la condición de que \mathbf{A}' , φ' deberán satisfacer la condición de Lorentz. Por tanto, si los potenciales originales satisfacen la condición de Lorentz, los nuevos también lo harán, siempre que ξ satisfaga la ecuación de onda escalar homogénea. Si los \mathbf{A} , φ originales no la satisfacen, aún podemos encontrar nuevos potenciales que sí lo harán, eligiendo ξ como una solución de la ecuación de onda escalar no homogénea con

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

como el término fuente. Acabamos de ver cómo se encuentra dicha solución. Una elección de potenciales que satisfaga la condición de Lorentz se llama *norma de Lorentz*. Otras elecciones de norma (es decir, otras elecciones de $\nabla \cdot \mathbf{A}$) son útiles en otras circunstancias.

Con el desarrollo de los potenciales retardados hemos completado el trabajo básico sobre la radiación. Resta aplicar este trabajo a la solución de problemas prácticos. Éste es el objetivo de los cinco capítulos siguientes.

RESUMEN

Este capítulo contiene los fundamentos de la teoría electromagnética clásica. Las **ecuaciones de Maxwell** son las ecuaciones diferenciales que determinan (junto con las condiciones en la frontera para una situación particular) los campos producidos por fuentes de carga y corriente:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} \end{aligned}$$

Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} están operacionalmente definidos por la **fuerza de Lorentz**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

y los campos \mathbf{D} y \mathbf{H} están relacionados con los anteriores por las **ecuaciones constitutivas** del medio, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$.

Las ecuaciones de Maxwell tienen las siguientes consecuencias importantes:

- La **carga eléctrica se conserva**, de acuerdo con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- La **energía se conserva**, de acuerdo con

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

donde la densidad de energía del campo es (en un medio lineal)

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

y el flujo de energía por unidad de área es el **vector de Poynting**,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

- Las **ondas electromagnéticas** se propagan con la velocidad de la luz, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ en el vacío.

- Las **condiciones en la frontera** sobre los campos se determinan en una zona interfacial entre dos medios; la más importante nos indica que las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} son continuas.

- Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} se deducen a partir de las funciones potenciales

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

- Los potenciales satisfacen las ecuaciones de onda no homogéneas

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

si la **condición de Lorentz**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

se impone. Éstas determinarán la generación de ondas electromagnéticas por distribuciones de carga y corriente específicas. Las soluciones particulares (en el vacío) son

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

donde

Propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas

Las ecuaciones de Maxwell tienen algunas soluciones especiales que describen ondas electromagnéticas, tal como vimos en la deducción de la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell. En este capítulo consideraremos estas soluciones en detalle. Comenzaremos por considerar la propagación de ondas a través de un medio lineal, que idealizaremos como de extensión infinita. Dejaremos para capítulos posteriores la cuestión de cómo son generadas las ondas y cómo entran en el medio en primer lugar.

El término *propagación de ondas electromagnéticas* cubre un amplio espectro de fenómenos físicos tales como ondas, luz visible y rayos X. En el vacío, todas las ondas se propagan a la misma velocidad c , pero se distinguen entre sí por sus frecuencias f (o sus longitudes de onda λ). La tabla 17.1 lista las regiones representativas del espectro de frecuencias electromagnéticas, desde ondas de radio de baja frecuencia (10^4 Hz) hasta los penetrantes rayos gamma (10^{22} Hz).

ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS EN MEDIOS NO CONDUCTORES

Las soluciones a la ecuación (16-31) que se manejan con más facilidad son las que se conocen como soluciones de onda plana. Una onda plana se define como una onda que, en un instante dado, presenta la misma fase en todos los puntos que están sobre

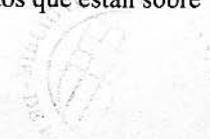


TABLA 17.1

El espectro
electromagnético

Tipo de radiación EM	Frecuencia f (Hz)	Longitud de onda λ (m)
Ondas de radio	10^4 a 10^8	3 a 3×10^4
TV, FM	10^8	3
Microondas, RADAR	10^9 a 10^{11}	3×10^{-3} a 3×10^{-1}
Infrarrojo lejano	10^{12}	3×10^{-4}
Radiación infrarroja	10^{13} a 4×10^{14}	8×10^{-7} a 3×10^{-5}
Luz visible	4×10^{14} a 8×10^{14}	4×10^{-7} a 8×10^{-7}
Radiación ultravioleta	8×10^{14} a 10^{17}	3×10^{-9} a 4×10^{-7}
Rayos X blandos	10^{17} a 10^{19}	3×10^{-11} a 3×10^{-9}
Rayos X	10^{19} a 10^{20}	3×10^{-12} a 3×10^{-11}
Rayos gamma	10^{19} a 10^{22}	3×10^{-14} a 3×10^{-12}

cada *plano* perpendicular a alguna dirección específica.* Si, por ejemplo, la dirección especificada es la dirección z , entonces E debe tener la misma fase en todos los puntos que tienen el mismo valor de z , esto es, en todos los puntos en un plano paralelo al plano xy . De aquí que la solución de la ecuación (16-34), que ya hemos estudiado, es una solución de onda plana ya que $(\omega t - \kappa z)$ es una constante para t y z dados, sin importar cuáles sean los valores de x e y . Las ondas planas que se desplazan en la dirección z son adecuadas para problemas en los que la elección de la dirección z es arbitraria. Sin embargo, en muchos problemas se escoge un sistema de ejes por otras razones, por ejemplo, debido a las condiciones en la frontera. En tales casos, es necesario construir ondas planas con direcciones arbitrarias de propagación. Supongamos que se tiene que construir una solución de onda plana con una dirección de propagación \mathbf{u} , donde \mathbf{u} es un vector unitario. Entonces la variable z en el exponente debe cambiarse por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$, la proyección de \mathbf{r} en la dirección de \mathbf{u} . Por tanto, una onda plana con dirección de propagación \mathbf{u} se representa como

$$e^{-i(\omega t - \kappa \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}$$

Definiremos un vector, el *vector de propagación*,

$$\mathbf{\kappa} = \kappa \mathbf{u}$$

* Quizás sea más natural definir una onda plana como una onda para la que los campos E y B son los mismos en todos los puntos que están sobre cada uno de los planos perpendiculares a alguna dirección especificada. Para medios no conductores las dos definiciones generalmente son equivalentes. Para medios conductores un ω real conduce a un κ complejo y puede ocurrir que haya ondas no verdaderas a las que se aplique esta definición. Sin embargo, siempre hay ondas planas a las que se aplica la definición de fase constante, y utilizaremos de manera consistente esa definición.

y escribiremos la exponencial dependiente del espacio y del tiempo de la onda plana como

$$e^{-i(\omega t - \mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{r})}$$

Si $\mathbf{u} = \mathbf{\kappa}$, el vector unitario en la dirección z , entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = z$ como en el caso especial; pero en cualquier caso, la longitud de onda $\lambda = 2\pi/\kappa$

La velocidad de propagación de una onda plana monocromática es precisamente la velocidad con la que se mueven los planos de fase constante. Obviamente, por fase constante queremos decir que

$$\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{constante} \quad (17-1)$$

Si $\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{r}$ se escribe como $\kappa\xi$, siendo κ la magnitud de $\mathbf{\kappa}$ y ξ la proyección de \mathbf{r} en la dirección $\mathbf{\kappa}$, entonces la ecuación (17-1) se convierte en

$$\kappa\xi - \omega t = \text{constante}$$

Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la *velocidad de fase*,

$$v_p = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{n} \quad (17-2)$$

donde hemos usado el resultado de la ecuación (16-33a) $\kappa = n\omega/c$. En el espacio libre

$$v_p = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Ahora, para obtener la solución detallada de onda plana para \mathbf{E} y \mathbf{B} , podríamos regresar a la ecuación (16-31), pero en realidad es mejor volver a las mismas ecuaciones de Maxwell. No hay distribuciones especificadas de carga ni de corrientes en el medio y la conductividad es $g = 0$, de modo que las ecuaciones son

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (17-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (17-4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (17-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (17-6)$$

De nuestro análisis previo de la ecuación de onda, ya conocemos la dependencia respecto al espacio y al tiempo que debe esperarse en una onda plana, de modo que supongamos que los campos tienen la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}, \dots \quad (17-7)$$

donde $\hat{\mathbf{E}}$ es el vector de amplitud constante complejo de la onda plana (se analizará con mayor detalle en la siguiente sección), y sustituyamos las soluciones supuestas en las ecuaciones de Maxwell (17-3) a (17-6). Esta sustitución impondrá condiciones que las supuestas constantes $\boldsymbol{\kappa}$, $\hat{\mathbf{E}}$, etc., tendrán que satisfacer para que las funciones de onda plana sean realmente soluciones de las ecuaciones de Maxwell.

Al derivar una función de la forma $\hat{\mathbf{E}}e^{-i\omega t}$ con respecto a t , puede observarse que el operador $\partial/\partial t$ es equivalente a multiplicar por $-i\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

para una función de esta forma particular. Igualmente, se encuentra que (problema 17.1), para una función de la forma $\hat{\mathbf{E}}e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}$, el operador ∇ es equivalente a

$$\nabla = i\boldsymbol{\kappa}$$

Por tanto, las ecuaciones de Maxwell para ondas planas (después de que se han cancelado i y la exponencial) se transforman en

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{D}} = 0 \quad (17-8)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (17-9)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \quad (17-10)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{H}} = -\omega \hat{\mathbf{D}} \quad (17-11)$$

Si suponemos que el medio es lineal, las ecuaciones constitutivas son

$$\hat{\mathbf{D}} = \epsilon \hat{\mathbf{E}} \quad (17-12)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{B}} \quad (17-13)$$

Consideraremos también que el medio es homogéneo e isótropo, de modo que ϵ y μ son escalares constantes. Todas nuestras aplicaciones serán en medios no magnéticos,*

* Los únicos medios para los que μ difiere significativamente de μ_0 a frecuencias bajas son los ferromagnéticos, que, en todo caso, no son lineales. Para frecuencias ópticas, $\mu \cong \mu_0$ para todos los materiales. No incluimos la consideración de resonancia paramagnética, que puede observarse en circunstancias especiales a frecuencias de radio y de microondas.

de modo que por simplicidad supondremos que $\mu = \mu_0$. Recordando que $\epsilon = K\epsilon_0$ y $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, obtenemos las ecuaciones de Maxwell en la forma

$$K\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (17-14)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (17-15)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \quad (17-16)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c^2} K \hat{\mathbf{E}} \quad (17-17)$$

Si tomamos ω como una frecuencia dada y K como una constante dada del material, debemos tratar de satisfacer este conjunto de ecuaciones vectoriales algebraicas mediante una elección adecuada de $\boldsymbol{\kappa}$, $\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$. Primero, si suponemos que $K \neq 0$, vemos que $\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$; $\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$ siempre. Esto es, tanto \mathbf{E} como \mathbf{B} deben ser perpendiculares a $\boldsymbol{\kappa}$. Tal onda se llama *onda transversal*. (El caso $K = 0$ es realmente posible y no es trivial, pero dejaremos este análisis para más adelante.) Además, ya que \mathbf{B} es proporcional a $\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}}$, \mathbf{E} y \mathbf{B} son también perpendiculares entre sí. Los vectores $\boldsymbol{\kappa}$, \mathbf{E} y \mathbf{B} (en este orden) forman un conjunto ortogonal a derechas. La magnitud relativa de $\hat{\mathbf{E}}$ y de $\hat{\mathbf{B}}$ está también determinada por la ecuación (17-16), $\hat{\mathbf{B}} = (\boldsymbol{\kappa}/\omega)\hat{\mathbf{E}}$. Finalmente, encontramos la magnitud de $\boldsymbol{\kappa}$ obteniendo el producto vectorial de $\boldsymbol{\kappa}$ con la ecuación (17-16) y utilizando $\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ de la ecuación (17-17):

$$\boldsymbol{\kappa} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}}) = \omega \boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{B}} = -K(\omega/c)^2 \hat{\mathbf{E}}$$

Con el vector identidad

$$\boldsymbol{\kappa} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}}) = (\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}})\boldsymbol{\kappa} - \kappa^2 \hat{\mathbf{E}}$$

ya que $\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ para una onda transversal,

$$-K(\omega/c)^2 \hat{\mathbf{E}} = -\kappa^2 \hat{\mathbf{E}}$$

lo que es equivalente a la ecuación de onda para soluciones de la forma dada por la ecuación (17-7). $\hat{\mathbf{E}}$ puede eliminarse de ambos lados de la ecuación para dar

$$\kappa = \sqrt{K} \omega/c \quad (17-18)$$

Esta relación, llamada *relación de dispersión transversal*, determina la magnitud del vector de onda $\boldsymbol{\kappa}$ en términos de las ω y K supuestas.

Para recapitular, una onda monocromática transversal plana que se propaga en la dirección positiva de \mathbf{u} está descrita por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \quad (17-9)$$

donde $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{u}$. La dirección de \mathbf{u} y la frecuencia ω son completamente arbitrarias. La amplitud $\hat{\mathbf{E}}$ es arbitraria, excepto que debe ser perpendicular a \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (17-19)$$

La magnitud de κ está determinada, para una frecuencia dada ω , por el índice de refracción del material:

$$\kappa = n\omega/c \quad (17-20)$$

donde n se define como

$$n = \sqrt{K} \quad (17-21)$$

Entonces $\hat{\mathbf{B}}$ está completamente determinado en magnitud y dirección:

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad (17-22)$$

Observe que en el vacío ($n = 1$), $c\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{E}}$ en unidades mks.* La velocidad de fase de la onda es c/n . Con estos resultados es posible considerar algunos problemas ópticos importantes y de gran interés. Sin embargo, pospondremos el estudio de estos problemas hasta el próximo capítulo.

En este análisis hemos excluido explícitamente el caso $K = 0$. Además, por considerar de forma implícita que κ es real, hemos excluido un conjunto de soluciones de ondas planas que se necesitan en algunos casos para satisfacer las condiciones en la frontera en una zona interfacial plana entre dos medios no conductores. Si κ no es real, tenemos

$$\kappa = \kappa_r + i\kappa_i$$

de modo que la ecuación (17-18) deberá escribirse como

$$\kappa_r \cdot \kappa_r - \kappa_i \cdot \kappa_i + 2i\kappa_r \cdot \kappa_i = K \frac{\omega^2}{c^2}$$

La parte imaginaria del lado izquierdo de esta ecuación debe anularse, y para que las partes reales sean iguales, κ_r^2 deberá ser mayor que κ_i^2 . Hay dos formas en las que la parte imaginaria puede anularse: la parte imaginaria de κ , κ_i , puede anularse, o puede ser perpendicular a κ_r . El primer caso ya ha sido analizado anteriormente. El segundo caso consiste en ondas en las que los planos de fase constante son perpendiculares a los planos de amplitud constante, como explicaremos en la sección 17.4. (Estas ondas se considerarán con más detalle en la sección 18.4 en relación con la reflexión total interna.). En cualquier caso, $\kappa \cdot \kappa$ es real, y en consecuencia, una magnitud real de κ puede definirse de modo que satisfaga la ecuación (17-18). Los vectores de onda complejos se analizarán con más detalle en la sección 17.4.

Aunque las soluciones de ondas planas son solamente una clase restringida de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell, son muy importantes puesto que forman la base de una clase más amplia de soluciones. Como las ecuaciones son lineales, una

* En unidades gaussianas, de acuerdo con el análisis del capítulo 8, reemplazamos B por B/c , de modo que $B = E$. Es decir, los campos E y B tienen magnitudes iguales para una onda plana en el vacío.

combinación lineal de soluciones (superposición de ondas planas) es también una solución. Por tanto, podríamos formar otras soluciones haciendo las sumas de ondas planas

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\kappa}_i, \omega_i) \exp[-i(\omega_i t - \boldsymbol{\kappa}_i \cdot \mathbf{r})] \quad (17-23)$$

donde cada coeficiente $\hat{\mathbf{E}}$ dependería de $\boldsymbol{\kappa}_i$ y ω_i . Esta superposición de ondas planas tiene la forma de una serie (compleja) de Fourier y, por tanto, podría representar cualquier solución que fuera periódica, pero no necesariamente senoidal. Cada término de la serie deberá satisfacer por separado las condiciones de las ecuaciones (17-14) a (17-17). Para una solución que no sea periódica, la suma en la ecuación (17-23) puede convertirse en una integral, la integral de Fourier,* con $\hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ como una función continua de \mathbf{k} y ω . La función $\hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ se llama *transformada de Fourier* de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. En este caso, deberemos considerar también la posibilidad de que n dependa tanto de $\boldsymbol{\kappa}$ como de ω ,

$$n = n(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$$

Este último efecto, conocido como *dispersión*, se analizará en el capítulo 19.

17.2 POLARIZACIÓN

Hay más que decir acerca de las amplitudes vectoriales complejas $\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$. De hecho, aún no hemos establecido explícitamente qué queremos decir por un vector complejo. Hay dos significados obvios que se sugieren: una cantidad compleja cuyas partes real e imaginaria son vectores reales

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_r + i\mathbf{E}_i$$

o un vector cuyas componentes (con respecto a los vectores base reales) son escalares complejos,

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} + \hat{E}_u \mathbf{u}$$

Utilizaremos la notación circunfleja para cantidades que son complejas cuando sea necesario distinguirlas; en la segunda forma, \mathbf{p} , \mathbf{s} , \mathbf{u} son un conjunto ortogonal a derechas de vectores reales unitarios. Al escribir la primera forma en términos de sus componentes y la segunda en términos de sus partes real e imaginaria, se observa fácilmente que las dos fórmulas son equivalentes, siempre que

$$E_{p_r} = E_{r_r}, \quad E_{p_i} = E_{i_r}, \quad E_{s_r} = E_{r_s}, \quad \text{y así sucesivamente}$$

Para nuestro propósito actual resulta más conveniente la segunda forma. Tomaremos \mathbf{u} como la dirección de propagación de la onda plana, de modo que $\hat{E}_u = 0$, de acuerdo con el resultado $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ de la ecuación (17-19), pero \hat{E}_p y \hat{E}_s son arbitrarios:

* Véase el Apéndice VI.

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} \quad (17-24)$$

El vector unitario \mathbf{p} puede elegirse en cualquier dirección perpendicular a \mathbf{u} . En el siguiente capítulo haremos una elección especial que justificará la notación particular introducida aquí.

También es más conveniente expresar las componentes complejas en forma polar en vez de en términos de partes real e imaginaria. Sea

$$\hat{E}_p = E_p e^{i\phi_p}, \quad \hat{E}_s = E_s e^{i\phi_s} \quad (17-25)$$

Así, por ejemplo,

$$\hat{E}_s e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = E_s e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_s)}$$

es decir que ϕ_s es la fase de la componente del campo E en la dirección \mathbf{s} . No es una restricción el escribir

$$\phi_p - \phi_s = \phi \quad \phi_s = 0$$

ya que $\phi_s = 0$ simplemente exige una elección adecuada del origen de t . Con esta elección,

$$\hat{\mathbf{E}} = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$$

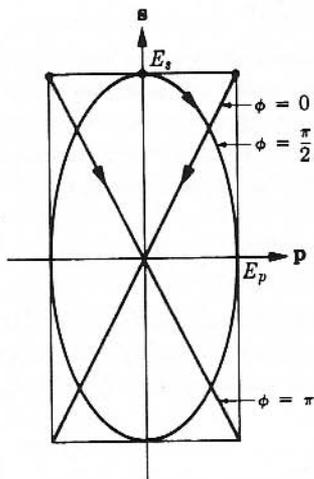
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi)} + E_s \mathbf{s} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

o la parte real es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (17-26)$$

FIGURA 17.1

Trayectoria seguida por la punta del vector E en un punto dado del espacio en función del tiempo. La dirección de propagación \mathbf{u} está apuntando hacia el lector. Las trayectorias para $\phi = 0$ y π están polarizadas linealmente. La trayectoria para $\phi = \pi/2$ está polarizada elípticamente en el sentido dextrógiro; y para $-\pi/2$ gira en el sentido opuesto (levógiro).



El campo E se divide en sus componentes en las dos direcciones, con amplitudes reales E_p y E_s , que pueden tener cualquier valor. Además, las dos componentes pueden estar oscilando fuera de fase en ϕ . Es decir, en cualquier punto dado \mathbf{r} , el máximo de E en la dirección \mathbf{p} puede alcanzarse en un tiempo distinto al máximo de E en la dirección \mathbf{s} .

Un panorama más detallado del campo oscilante E en un punto determinado, digamos $\mathbf{r} = 0$, se visualiza mejor considerando algunos casos especiales. Primero, supongamos que $\phi = 0$. Entonces

$$\mathbf{E}(0, t) = (E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t$$

El campo E varía alternativamente, disminuyendo desde $\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$, pasando por cero, hasta $-\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$ y regresando a su valor original, siempre apuntando a lo largo de la dirección $E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$. Este caso se llama *polarización lineal** y se ilustra en la figura 17.1. Si $E_p = 0$ o $E_s = 0$, también tenemos una polarización lineal; entonces ϕ es indefinido. Para $\phi = \pi$,

$$\mathbf{E}(0, t) = (-E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t$$

nuevamente una polarización lineal, como se presenta en la figura 17.1. Para $\phi = \pi/2$,

$$\mathbf{E}(0, t) = E_p \mathbf{p} \sin \omega t + E_s \mathbf{s} \cos \omega t$$

La punta del vector E describe una trayectoria elíptica en el sentido de las agujas del reloj, como se muestra. Este caso se llama *polarización elíptica dextrógira* o *a derechas*.† Para $\phi = -\pi/2$, la trayectoria es la misma, pero contraria al sentido de las agujas del reloj, y se llama *polarización elíptica levógira* o *a izquierdas*. En el caso especial de $\phi = \pm\pi/2$ y $E_p = E_s$, tenemos *polarización circular* (a derechas o a izquierdas). Para otros valores de ϕ , tenemos una polarización elíptica (aun si $E_p = E_s$). La trayectoria sigue siendo una elipse inscrita en el rectángulo de la figura 17.1, pero los ejes mayor y menor de la elipse forman un ángulo con los ejes p y s . Con la polarización elíptica, la magnitud del vector E nunca es cero, aun cuando lo sea cualquiera de sus componentes direccionales.

La amplitud compleja del vector B está dada por la ecuación (17-22),

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad (17-22)$$

* El uso del término "polarización" no tiene nada que ver con el que se introdujo en el capítulo 4. Desgraciadamente, suele utilizarse la misma palabra, aunque en general no hay confusión ya que en un sentido se aplica a una onda y en el otro a un medio.

† Observe que la "regla de la mano derecha" no se aplica al movimiento de E en la figura 17-1. En lugar de esto, la terminología proviene de la trayectoria del vector E en el espacio a lo largo de la dirección de propagación en un instante de tiempo dado. Para la polarización a derechas, la punta del vector E describe una hélice a derechas, o el movimiento de un tornillo hacia afuera como se vería desde cualquier dirección.

Tomando el producto punto de ésta con $\hat{\mathbf{E}}$, e intercambiando punto y cruz, encontramos que

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$$

En general, la anulación del producto escalar de dos vectores *complejos* no significa que sus partes reales sean perpendiculares, pero en este caso lo son. De la ecuación (17-26), al escribir $\mathbf{E}(0, t) = \mathbf{E}$ tenemos para la parte real

$$\mathbf{E} = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos \omega t \quad (17-27)$$

De $\mathbf{B}(0, t)$, la parte real de $\mathbf{B}e^{-i\omega t}$, con la ecuación (17-22), encontramos

$$\mathbf{B} = (n/c)[E_p \mathbf{s} \cos(\omega t - \phi) - E_s \mathbf{p} \cos \omega t] \quad (17-28)$$

Ya que el producto escalar de la ecuación (17-28) con (17-27) es cero, los vectores reales E y B son perpendiculares en cada instante. Además, $\text{Re } \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}(0, 0)$, $\text{Re } \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(0, 0)$, de modo que las partes reales de $\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ son perpendiculares. La trayectoria de la punta del vector B es la misma que la de la figura 17.1 girada 90° en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Puesto que los ejes p y s se eligieron arbitrariamente en el plano perpendicular a \mathbf{u} , se podría hacer cualquier otra elección. Una nueva elección giraría los ejes coordenados de la figura 17.1 e introduciría nuevos valores de E_p , E_s y ϕ_s ; pero la trayectoria del vector E de la figura 17.1 representa una realidad física que no podría cambiarse simplemente por una transformación de coordenadas. En este punto, sin embargo, incluso el estado físico de la misma polarización es parte de la arbitrariedad admitida por nuestra supuesta solución de onda plana para un medio infinito. En el siguiente capítulo veremos cómo se puede producir y medir una polarización determinada.

17.3 DENSIDAD Y FLUJO DE ENERGÍA

Hemos utilizado libremente las expresiones complejas para los campos E y B , entendiendo que las verdaderas cantidades físicas están dadas por las *partes reales* de la cantidad compleja. La justificación matemática de este procedimiento es que las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones *lineales* que son satisfechas separadamente por las partes real e imaginaria de una solución compleja. Sin embargo, las expresiones

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (17-29)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (17-30)$$

para la densidad de energía y flujo de energía por unidad de área, no son lineales en los campos. Por tanto, en estas expresiones es esencial tomar las partes reales de los campos antes de efectuar las multiplicaciones entre ellas (véase el problema 17.6).

Podemos calcular nuevamente los valores representativos para $r = 0$, ya que el origen es arbitrario. Elevando al cuadrado las ecuaciones (17-27) y (17-28) tenemos

$$E^2 = E_p^2 \cos^2(\omega t - \phi) + E_s^2 \cos^2 \omega t \quad (17-31)$$

$$B^2 = (n/c)^2 E^2 = \epsilon \mu_0 E^2 \quad (17-32)$$

Puesto que $D = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, encontramos que los campos eléctrico y magnético tienen una contribución igual a la densidad de energía u :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$u = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2 \quad (17-33)$$

Además, $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = E\mathbf{H}\mathbf{u}$, de modo que el vector de Poynting apunta en la dirección de propagación, con magnitud

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{n}{c} E^2 \quad (17-34)$$

Las expresiones para la densidad de energía y el flujo de energía por unidad de área han tomado una forma especialmente sencilla para ondas planas. Estas dos expresiones pueden combinarse para dar un resultado interesante, que es independiente del valor particular del campo E :

$$S = \frac{c}{n} u \quad (17-35)$$

Si escribimos la velocidad de fase de la onda plana como un vector en la dirección de propagación, de magnitud

$$v_p = \frac{c}{n}$$

entonces

$$\mathbf{S} = u \mathbf{v}_p$$

Esta ecuación es análoga a la relación

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

que define la densidad de corriente eléctrica convectiva. Esta analogía refuerza la interpretación de \mathbf{S} como una densidad de corriente de energía, es decir, una densidad de energía u que se transporta con la velocidad de fase \mathbf{v}_p de la onda plana.

La dependencia respecto al tiempo de u y \mathbf{S} está dada por E^2 de la ecuación (17-31) y depende de la polarización de la onda. Para una polarización circular ($\phi = \pm\pi/2$),

$$E^2 = E_p^2 \sin^2 \omega t + E_p^2 \cos^2 \omega t = E_p^2$$

es constante en el tiempo; para una polarización lineal ($\phi = 0, \pi$),

$$E^2 = (E_p^2 + E_s^2) \cos^2 \omega t$$

varía entre cero y un máximo al doble de la frecuencia de la onda. Claro está que en cualquier caso E^2 es siempre positiva. Sin embargo, a altas frecuencias la dependencia respecto al tiempo no es mensurable, así que resulta ser de mayor interés el promedio temporal de E^2 . Ya que el promedio temporal de $\cos^2(\omega t - \phi)$ sobre un periodo es $\frac{1}{2}$, para cualquier polarización

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2}(E_p^2 + E_s^2) \quad (17-36)$$

Éste y otros resultados semejantes pueden obtenerse más rápidamente utilizando un teorema que fue introducido en el capítulo 13 pero que no se demostró; daremos ahora la demostración.

Si $f = f_0 e^{i\omega t}$ y $g = g_0 e^{i\omega t}$, donde f_0 y g_0 pueden depender de otras variables pero no del tiempo, entonces

$$\overline{\text{Re } f \text{ Re } g} = \frac{1}{2} \text{Re } f^* g \quad (17-37)$$

La barra indica el promedio temporal definido por

$$\bar{w} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt$$

Para deducir la ecuación (17-37) sea $f_0 = u + iv$ y $g_0 = \xi + i\eta$. Entonces

$$\text{Re } f \text{ Re } g = (u \cos \omega t - v \sin \omega t)(\xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t) \quad (17-38)$$

mientras que

$$\text{Re } f^* g = u\xi + v\eta \quad (17-39)$$

Las siguientes integrales se pueden comprobar fácilmente:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$$

Por medio de estas integrales, es fácil ver que el promedio temporal de la ecuación (17-38) es

$$\overline{\text{Re } f \text{ Re } g} = \frac{1}{2}(u\xi + v\eta) \quad (17-40)$$