Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
Electromagnetismo FI2002

Solución Auxiliar N°14

Profesor Cátedra: Claudio Romero
Profesores Auxiliares: Felipe Larraín, Víctor Medina
Fecha: Miércoles 7 de Julio de 2010

Problema 1

(a)

$0 \leq r \leq a$

$$\overrightarrow{B}(r) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}\hat{\theta}$$

$a \leq r \leq b$

$$\overrightarrow{B}(r) = \frac{1.6 I_0}{2000\pi r + I_0}\hat{\theta}$$

$b \leq r$

$$\overrightarrow{B}(r) = 0$$

(b) Como $\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}\right)$, en el medio material tendremos,

$$\overrightarrow{M}(r) = \left(\frac{1.6 I_0}{2000\pi r + I_0} - \frac{I_0}{2\pi r}\right)\hat{\theta}$$

Problema 2

(a) En la situación con corriente podemos simplemente plantear la ley de ampére y la definición del vector campo magnético con la intensidad magnética y la magnetización. El sistema es el siguiente,

$$NI = \int_0^{2\pi - \frac{d}{R}} H_1 R d\theta + \int_0^d H_2 du$$

$$\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{H}_1 + \overrightarrow{M}\right) = \mu_0 \overrightarrow{H}_2$$

Se obtiene lo siguiente,

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\frac{NI - Md}{2\pi R} + M \right) \hat{\theta}$$

$$\overrightarrow{H}_1 = \frac{NI - Md}{2\pi R} \hat{\theta}$$

$$\overrightarrow{H}_2 = \left(\frac{NI - Md}{2\pi R} + M \right) \hat{\theta}$$

Cuando se desconecta la corriente, las ecuaciones anteriores dejan valores *extraños* para las variables $\overrightarrow{B}$ **y** $\overrightarrow{H}$. Si bien se obtendría,

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\frac{-Md}{2\pi R} + M \right) \hat{\theta}$$

$$\overrightarrow{H}_1 = \frac{-Md}{2\pi R} \hat{\theta}$$

$$\overrightarrow{H}_2 = \left(\frac{-Md}{2\pi R} + M \right) \hat{\theta}$$

¿Intensidades opuestas? Los resultados son inusuales. El problema radica en que, para que se cumplan las ecuaciones del principio, d debe ser muy pequeño. Si no, es difícil que se conserve constante la inducción B, pues no hay forzante: desaparece la corriente que genera y refuerza las líneas de campo. Cuando se plantea que $d \rightarrow 0$, se obtiene,

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 M \hat{\theta}$$

$$\overrightarrow{H}_1 = 0$$

$$\overrightarrow{H}_2 = M \hat{\theta}$$

Que es un resultado coherente para este problema.

(b) En esta sección se desarrolla con precisión el caso en que se retira un gap de material de un toroide, no despreciable y se quiere obtener la inducción magnética resultante. Dado que ahora la distancia no es despreciable, la aproximación que exige que la componente de B sea constante a lo largo del gap es muy mala. Si bien hay conservación de la componente normal a la superficie para B entre dos medios, B no tiene porqué ser constante al interior del material (en este caso al interior del gap).

Calculamos con el siguiente modelo: se asume que B al interior es la suma de dos casos, el que considera un toroide con magnetización uniforme completa y un pequeño trozo con magnetización opuesta. Para obtener el valor de B al interior del trozo que resta se modela la situación con las corrientes de magnetización. Como esta es uniforme, sólo aparece componente lineal de corriente, no superficial. Sabemos que para una espira cuadrada, el campo magnético en su centro es

$$\overrightarrow{B} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi R} \hat{\theta}$$

Y en este caso, $I = Mw$, $R = \frac{a}{2}$, entonces,

$$\overrightarrow{B}_{Gap} = \mu_0 M\hat{\theta} - \mu_0 \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi R}\hat{\theta} = \mu_0 M\left(1 - \frac{2\sqrt{2}w}{\pi a}\right)\hat{\theta}$$

(c) Las condiciones de borde se cumplen siempre, no hay contradicciones en este problema al respecto. Lo que sucede es que, sólo si el gap es suficientemente pequeño, la magnitud B puede asumirse constante. En otro caso debe modelarse el problema incluyendo las pérdidas.

Problema 3

(a) La componente perpendicular al plano de la trayectoria del electrón de $\overrightarrow{B}$ (externo) hace torque y cambia con ello la orientación del movimiento, "acelera" o "frena" pese a que la magnitud de la velocidad no varía. Esto genera que el momento angular rote, lo que se conoce como precesión. La interacción en estudio es muy conocida y se denomina "precesión de larmor".

(b) Si bien existen muchas formas de plantear el resultado, si se desea utilizar el momento dipolar magnético $\overrightarrow{m}$, debe plantearse la ecuación de torques, donde,

$$\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{B} = \sum \overrightarrow{\tau} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{L}$$

Despejando el momentum angular, para usar la indicación,

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} = m\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = mRv\hat{n}$$

donde m, R y v, son la masa del electrón, el radio de la órbita, (en éste caso corresponde al radio de Bohr), y la velocidad del electrón, respectivamente. Necesitamos la velocidad del núcleo. Para ello, usamos coordenadas cilíndricas solidarias al movimiento del electrón, casi como si se representase un sólido rígido. Así, de la ecuación de newton y dichas coordenadas,

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + -eR\dot{\theta}B_0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m} + \frac{e\dot{\theta}B_0}{m}$$

Aquí, es importante detenerse. Los órdenes de magnitud son importantes, y deben tenerse en cuenta para la aproximación. En rigor, la existencia del campo magnético altera la velocidad del electrón según el ángulo θ, tal y como lo predice la ecuación anterior, pero la alteración es mínima. En general, la velocidad angular según θ es grande para el electrón, y el término que aporta la fuerza eléctrica por la atracción al núcleo es importante, no así el de la fuerza magnética.

En valores aproximados, el término de la fuerza eléctrica ponderado en la parte derecha de la expresión vale $2 \cdot 10^{33}$, mientras que, el de la izquierda, $1.75 \cdot \dot{\theta}B_0 10^{11}$. Sin lugar a dudas, dado que los campos magnéticos al interior alcanzan magnitudes leves y la velocidad angular no es mayor que la de la luz, se nota como el segundo término es despreciable respecto del primero.

Calculando, (con la aproximación anterior),

$$R\dot{\theta} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mR}}$$

$$\overrightarrow{L} = e\sqrt{\frac{mR}{4\pi\varepsilon_0}}\hat{n}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{m} = -\frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{R}{4\pi\varepsilon_0 m}}\hat{n}$$

Planteando el torque,

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{B} = -\frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{R}{4\pi\varepsilon_0 m}}\hat{n} \times B_0\hat{k}$$

Como $\hat{n} = sen\alpha cos\phi\hat{i} + sen\alpha sen\phi\hat{j} + cos\alpha\hat{k}$, (usando ésta vez coordenadas esféricas),

$$\overrightarrow{T} = \frac{e^2 B_0}{2}\sqrt{\frac{R}{4\pi\varepsilon_0 m}}\left(-sen\alpha sen\phi\hat{i} + sen\alpha cos\phi\hat{j}\right)$$

Por otro lado,

$$\overrightarrow{T} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{L}\right) = e\sqrt{\frac{mR}{4\pi\varepsilon_0}}\left(-sen\alpha sen\phi\dot{\phi}\hat{i} + sen\alpha cos\phi\dot{\phi}\hat{j}\right)$$

Igualando, nos damos cuenta que las ecuaciones despejan $\dot{\phi}$, y advierten que la dirección es correcta respecto de lo que se supuso en el dibujo. Finalmente, la velocidad angular de precesión, queda,

$$\dot{\phi} = \frac{eB_0}{2m}$$