*Universidad de Chile*
*Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas*
*Departamento de Física*
*Electromagnetismo FI2002*

**Clase Auxiliar N°12**

**Profesor Cátedra**: Claudio Romero
**Profesores Auxiliares**: Felipe Larraín, Víctor Medina
*Fecha: Miércoles 23 de Junio de 2010*

***Problema 1***

(a) Para encontrar la energía almacenada en régimen permanente, encontraremos el valor de la inductancia del sistema. Basta ésto pues, dado que la corriente $I_0$ es un dato, los efectos autoinductivos, si no son despreciables, ya están incluídos allí. Queremos usar,

$$E = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Necesitamos $L$. Para obtenerla, planteamos por definición,

$$L = \frac{\phi}{I_0}$$

Necesitamos el flujo de campo magnético por el sistema, y para ello, planteamos la ley de ampére. Aproximaremos que $h$ es suficientemente pequeño como para que el sistema de referencia de la primera mitad del toroide sea válido para la segunda, y cuando desarrollemos, se encontrará que la inductancia depende de la posición, i.e., no es un valor fijo. Ésto no permitiría que utilizáramos la expresión anterior, pero usaremos que el radio $\rho$ del que depende el valor de $L$ es fijo; el pto. medio del toroide. Así,

$$\oint \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dl} = N I_0 = H_1(\rho)\rho\pi + H_2(\rho)h + H_3(\rho)\rho\pi + H_4(\rho)h$$

Usando que

$$B_{1n} = B_{2n} = B_{3n} = B_{4n} = B$$

$$\Rightarrow \frac{B(\rho)\rho\pi}{\mu_1} + \frac{B(\rho)h}{\mu_0} + \frac{B(\rho)\rho\pi}{\mu_2} + \frac{B(\rho)h}{\mu_0} = N I_0$$

$$\overrightarrow{B}(\rho) \simeq \frac{N I_0}{\frac{2h}{\mu_0} + \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\pi(\frac{a+b}{2})}\hat{\theta}$$

Asi,

$$L = \frac{N^2 A}{\frac{2h}{\mu_0} + \frac{\mu_1+\mu_2}{2\mu_1\mu_2}\pi(a+b)}$$

Finalmente,

$$E = \frac{1}{2}\frac{N^2 A}{\frac{2h}{\mu_0} + \frac{\mu_1+\mu_2}{2\mu_1\mu_2}\pi(a+b)} I_0^2$$

(b) La fuerza entre las mitades de toroide es el opuesto a la derivada respecto de la posición, i.e., h, de la energía magnética, recién calculada. Con ello,

$$\parallel \overrightarrow{F} \parallel = \parallel -\frac{\partial E}{\partial h} \parallel = \frac{N^2 I_0^2 A}{2} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1}{\left[ \frac{2h}{\mu_0} + \frac{\mu_1+\mu_2}{2\mu_1\mu_2}\pi(a+b) \right]} \right)$$

***Problema 2***

(a) Para calcular los valores de las corrientes en ambos circuitos en régimen permanente, debemos resolver las ecuaciones de interacción del sistema y de ellas imponer que el tiempo sea muy grande. La idea es usar las leyes de kirchoff en ambos circuitos considerando el efecto de inductancia mutua que se produce, y la autoinductancia. (La inductancia mutua estará dada por la corriente del circuito opuesto, y la autoinductancia, por la propia. Por ello se plantea el campo magnético con ambas corrientes). Para plantear dichas leyes, debemos inicialmente obtener el valor del campo magnético dentro del toroide. Por ley de Ampére, debemos calcular el valor del campo generado por cada corriente, aproximándolo en todo el toroide por el que hay en el pto. medio de él.

$$\oint \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dl} = I_{Libre}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(\rho)\rho d\theta = -N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) \quad \left(\rho = \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{(N_2 I_2 - N_1 I_1)}{\pi(a+b)}\hat{\theta}$$

El sistema de referencia es cilíndricas, con $\hat{k}$ saliendo de la figura en la hoja. Ésto es arbitrario, y perfectamente puede suponerse lo contrario y obtener resultados equivalentes. Por otro lado, las direcciones de las corrientes en cada bobinado *también* son arbitrarias, por lo que puede suponerse cualquier cosa, y, de ser coherente, se llegará a resultados correctos. Usando las direcciones de la figura del enunciado, i.e., con la primera corriente entrando al sistema, saliendo desde la fuente, y con la corriente en el segundo circuito bajando por el bobinado, la regla de la mano derecha en cada circuito dice que el flujo de campo generado por el primer circuito apuntará en $-\hat{\theta}$, y el segundo, $\hat{\theta}$. Planteando las leyes de kirchoff en ambos circuitos, (no asumimos nada respecto de ellas),

$$V(t) = V_0 cos(wt) + \varepsilon_{Inducida_1} = R_1 I_1$$

$$\varepsilon_{Inducida_2} = R_2 I_2$$

Las f.e.m. inducidas no son iguales, puesto que el número de vueltas en cada caso no es el mismo. De hecho, *ni siquiera tienen el mismo signo!* El cálculo de los flujos en cada circuito, (inducidos respecto de su opuesto y sí mismos), es donde debemos tener más cuidado. Para el primer circuito, la normal apuntará según $-\hat{\theta}$ en nuestro sistema de referencia. (La regla de la mano derecha para la corriente arbitraria arroja éste resultado). Para el segundo circuito, es al revés, y la normal apunta según $\hat{\theta}$. Usamos las direcciones arbitrarias pues el signo menos de la inducción ajusta después los resultados. Los flujos finalmente son, (dados los dS vectoriales),

$$\phi_1 = N_1 \int \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS}_1 = -N_1 \mu \frac{(N_2 I_2 - N_1 I_1)}{\pi(a+b)} S$$

$$\phi_2 = N_2 \int \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS}_2 = N_2 \mu \frac{(N_2 I_2 - N_1 I_1)}{\pi(a+b)} S$$

donde $S = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \pi$
La inducción queda,

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\varepsilon_{Inducida_1} = N_1 \mu \frac{N_2 \dot{I}_2 - N_1 \dot{I}_1}{\pi(a+b)} S$$

$$\varepsilon_{Inducida_2} = -N_2 \mu \frac{N_2 \dot{I}_2 - N_1 \dot{I}_1}{\pi(a+b)} S$$

Podemos comprobar que hemos sido coherentes, puesto que de las expresiones anteriores pueden perfectamente extraerse los términos de inductancia mutua y autoinductancia. En cada caso, las inductancias mutuas se suman, y las propias, se oponen al fenómeno total de tensión en el circuito. (En varios textos se encuentran éstas mismas ecuaciones, pero con el signo cambiado. Ésto se debe a que se asume el signo opuesto dentro de los $\varepsilon_{Inducccion}$).

Finalmente, las leyes de kirchoff quedan,

$$V_0 cos(wt) + C_1 \left( N_2 \dot{I}_2 - N_1 \dot{I}_1 \right) = R_1 I_1$$

$$-C_2 \left( N_2 \dot{I}_2 - N_1 \dot{I}_1 \right) = R_2 I_2$$

usando que $C_1 = \frac{N_1 \mu S}{\pi(a+b)}$, $C_2 = \frac{N_2 \mu S}{\pi(a+b)}$

La física del problema termina aquí. En adelante, resolver el sistema de ecuaciones permite resolver los comportamientos transientes. Otra forma de deducir éstas ecuaciones, eso sí, mucho menos trabajosa, es trabajar directamente con los términos de autoinductancia e inductancias mutuas.

En general,

$$L_{jk} = \frac{N_j \phi_{jk}}{i_k}$$

donde el subíndice j hace referencia al lugar donde se mide el efecto, y el subíndice k, a quien lo genera. En general, los flujos con subíndices aluden a los efectos generados por una parte del circuito, cuando la otra no existe, o no tiene corriente. La superposición de los efectos permite resolver en forma más sencilla. Por ejemplo, la inductancia $L_{11}$ se calcula con el flujo que atraviesa el bobinado 1, generado por sí mismo, cuando el bobinado 2 no tiene corriente alguna. La inductancia $L_{22}$ se calcula con el flujo que atraviesa el bobinado 2, también generado por sí mismo, cuando el bobinado 1 no tiene corriente. Finalmente, la inductancia $L_{12}$, (equivalente a $L_{21}$), se calcula con el flujo que atraviesa el bobinado 1, (sin corriente), dado el campo generado por el bobinado 2. Entonces,

$$L_{11} = \frac{N_1 \phi_{11}}{i_1} = \frac{N_1^2 \mu S}{\pi(a+b)}$$

$$L_{22} = \frac{N_2 \phi_{22}}{i_2} = \frac{N_2^2 \mu S}{\pi(a+b)}$$

$$L_{12} = \frac{N_1 N_2 \mu S}{\pi(a+b)}$$

Usando ahora que,

$$(V(t)) = [R]\,(i) + [L] \frac{d}{dt} (i)$$

sólo basta tener cuidado con los signos. Si se define que ambas corrientes entran al sistema, (ambas bajan por los bobinados), para ser coherentes con el dibujo y los flujos generados, debemos usar que la autoinducción es positiva, y la inducción mutua negativa, pues los flujos mutuos son opuestos. Así, se obtendrá que,

$$V_0 cos(wt) = R_1 I_1 + L_{11} \frac{d}{dt} i_1 - L_{12} \frac{d}{dt} i_2$$

$$0 = R_2 I_2 + L_{22}\frac{d}{dt}i_2 - L_{12}\frac{d}{dt}i_1$$

que es exactamente lo mismo que obtuvimos al principio. Una forma de resolver éste sistema es despejar la diferencia de las derivadas de las corrientes en la segunda ecuación, introducir ésto en la primera, y derivar dicha ecuación resultante. Ésto entrega la siguiente EDO,

$$\dot{I}_2 + \frac{R_1 R_2}{C_2 R_1 N_2 + C_1 R_2 N_1} I_2 = -\frac{C_2 w V_0 N_1}{C_1 R_2 N_1 + C_2 R_1 N_2} sen(wt)$$

$$\therefore I_2(t) = Ae^{-\lambda t} + Bcos(wt + \phi)$$

Las constantes $B$ y $\phi$, se despejan de imponer que la solución es ésta, introducirla en la EDO y luego abrir los cos(a+b) y sen(a+b) con la fórmula de la suma de ángulos. De ahí, se tendrá que $K_1 sen(wt) + K_2 cos(wt) = 0$ con los $K$ constantes conocidas. Como las funciones sen y cos son ortogonales, las constantes deben ser nulas, para que la ecuación se cumpla. Ésto despeja $\phi$ y $B$. La constante $A$ se despeja de la condición inicial, que es que la corriente al inicio en el circuito 2 es nula, y $\lambda$ es conocida, de la EDO resolviendo la parte homogénea. $\left(\lambda = \frac{R_1 R_2}{C_2 R_1 N_2 + C_1 R_2 N_1}\right)$. La corriente $I_1(t)$ puede despejarse sin necesidad de construir una EDO para ella. Del sistema, se tiene que,

$$R_1 I_1 + \frac{C_1 R_2 I_2}{C_2} = V_0 cos(wt)$$

$$\therefore I_1(t) = \frac{V_0}{R_1} cos(wt) - \frac{C_1 R_2}{C_2 R_1}\left[Ae^{-\lambda t} + Bcos(wt + \phi)\right]$$

Al imponer que haya pasado mucho tiempo, las exponenciales caerán, y si la fuente se mantiene, las corrientes en régimen permanente serán sumas de sinusoidales según las ecuaciones para $I_1$ e $I_2$.

(b) La situación queda definida por las siguientes ecuaciones,

$$+C_1\left(N_2\dot{I}_2 - N_1\dot{I}_1\right) = R_1 I_1$$

$$-C_2\left(N_2\dot{I}_2 - N_1\dot{I}_1\right) = R_2 I_2$$

De ahí,

$$I_1 = -I_2\left(\frac{C_1 R_2}{C_2 R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2 + \frac{R_1 R_2}{C_2 N_2 R_1 + C_1 N_1 R_2} I_2 = 0 \Rightarrow I_2(t) = De^{-\lambda_2 t}$$

Con $\lambda_2 = \frac{R_1 R_2}{C_2 N_2 R_1 + C_1 N_1 R_2}$. Se ve que la corriente en ambos circuitos se disipará rápidamente en el tiempo. Las condiciones iniciales determinan el problema. La corriente máxima en $I_1$ sale de, despreciando la exponencial, derivar e igualar a cero en la expresión original, considerando la fuente. La condición inicial determina la constante $D$, y de ahí el álgebra de las expresiones resuelve el problema en su totalidad.

***Problema 3***

(a) Necesitamos una ecuación para $w(\theta)$, de tal forma que evaluando obtengamos la diferencia. Para encontrarla, usaremos torque, pues de hecho, tenemos el momento de inercia $I_n = \frac{5ma^2}{12}$. Como,

$$\sum \overrightarrow{T} = I_n \overrightarrow{\alpha}$$

Con $\alpha$ la aceleración angular, y usando la aproximación de dipolo magnético, tendremos,

$$\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{B}_0 = \overrightarrow{T} = I_n \overrightarrow{\alpha}$$

Necesitamos entonces $\overrightarrow{m}$. Pero $\overrightarrow{m} = I\overrightarrow{S}$, donde $I$ es la corriente que atraviesa la espira, y $\overrightarrow{S}$, el vector de área orientada, i.e., el área orientada según la normal a la superficie. La corriente es desconocida, por lo que usamos inducción. Tendremos que,

$$\phi(\theta(t)) = \int B_0\hat{i} \cdot d\rho dz\hat{\theta} = -B_0 a^2 sen(\theta)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}(\theta(t)) = B_0 a^2 cos(\theta)\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B_0 a^2 cos(\theta)\dot{\theta}}{R}$$

Como $\overrightarrow{S} = a^2\hat{\theta}$

$$\Rightarrow I_n \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{B}_0 = \frac{B_0^2 a^4}{R} cos^2(\theta)\dot{\theta}(-\hat{k})$$

$$\Rightarrow I_n\ddot{\theta} = -\frac{B_0^2 a^4}{R}\left(\frac{1 + cos(2\theta)}{2}\right)\dot{\theta}$$

Resolviendo la ecuación anterior, y planteando la diferencia entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ ,

$$\triangle w = -\frac{B_0^2 a^4}{2RI_n}\pi = \frac{6\pi}{5}\frac{\left(B_0 a^2\right)}{mR}$$

(b) Ésta parte puede resolverse de dos formas, en forma simple. La primera asume el cálculo de la potencia disipada en la resistencia por definición, usando adecuadamente las expresiones para la potencia en circuitos sencillos como éste. Otra forma, ciertamente más elegante, está relacionada con darse cuenta que la pérdida en energía cinética corresponde a la pérdida de energía del sistema de la espira en movimiento, y esa pérdida puede cuantificarse por el teorema de trabajo y energía como

$$\triangle U = \frac{1}{2} I_n w_i^2 - \frac{1}{2} I_n w_f^2$$

Es interesante notar que la disipación térmica de energía por efecto Joule, corresponde, en condiciones ideales, a la pérdida de velocidad angular de la espira. Planteando los valores obtenidos para las velocidades angulares, y el momento de inercia de la espira, se obtiene el valor pedido.