Clase Auxiliar N°11
Electromagnetísmo

Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Felipe Larraín y Víctor Medina.

16 de Junio del 2010

Pregunta 1:

Un circuito cuadrado de lado a se coloca en el primer cuadrante del plano xy, con una esquina en el origen. En esta región existe un campo magnético no uniforme y dependiente del tiempo que tiene la forma $\vec{B}(y,t) = ky^3t^2\hat{z}$ (con k una constante). Encuentre la fem inducida en el circuito.

Pregunta 2:

Un solenoide infinito de radio a, contiene una densidad de cable de n vueltas por unidad de largo y se coloca un circuito al rededor con una resistencia R como se muestra en la figura.

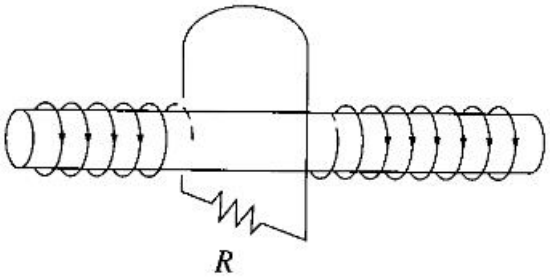

Fig. Problema 2

(a) Si la corriente en el solenoide está creciendo a una tasa constante ($\frac{dI}{dt} = k$), ¿Cuál es la corriente que fluye en el circuito y en qué dirección pasa por la resistencia?.

(b) Si la corriente I del solenoide es constante pero este es tirado hacia afuera y luego reinsertado en sentido contrario, ¿Cuánto es la carga total que pasa a través de la resistencia?.

Pregunta 3:

Un pequeño circuito de radio a se deposita a una distancia z sobre un circuito de mayor tamaño de radio b como se muestra en la figura. Los planos de los dos circuitos son paralelos y perpendiculares al eje común.

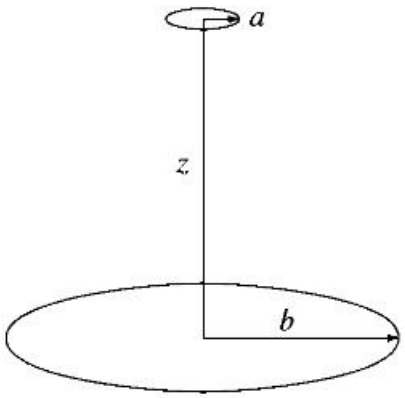

Fig. Problema 3

(a) Suponga que una corriente I fluye en el circuito grande. Encuentre el flujo que experimenta el circuito pequeño. (Suponga que el circuito pequeño es tan chico que puede aproximar el campo magnético producido por el circuito grande como constante en la región de interés)

(b) Suponga que una corriente I fluye en el circuito pequeño. Encuentre el flujo que atraviesa el circuito grande. (El circuito es pequeño, por lo cual puede tratarlo como un dipolo magnético)

(c) Encuentre la inductancia mutua y confirme que se cumple $M_{12} = M_{21}$.

Pregunta 4:

Suponga que el circuito de la figura ha sido conectado por un largo periodo de tiempo y luego, en el tiempo $t = 0$, el "switch" S se baja, dejando a la fuente aislada.

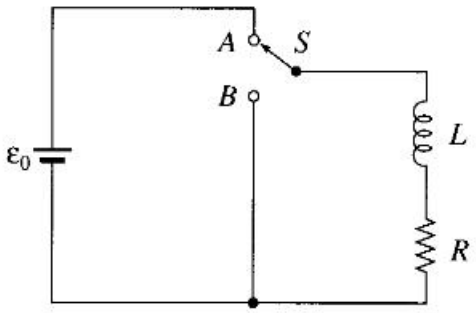

Fig. Problema 4

(a) ¿Cuál es la corriente para un tiempo t posterior?.

(b) ¿Cuanto es la energía total propinada a la resistencia?.

(c) Muestre que esta última es igual a la energía originalmente almacenada en la inductancia.

Soluciones de la Clase Auxiliar Nº 11

Pregunta 1

Para poder calcular la fem inducida primero debemos saber cuanto vale el flujo magnético que viene dado por:

$$\Phi = \int B dx dy = kt^2 \int_0^a dx \int_0^a y^3 dy = \frac{1}{4} kt^2 a^5$$

Luego, aplicamos la "regla del flujo magnético" que relaciona el cambio de flujo en el tiempo con la "fuerza electromotriz", es decir,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} kta^5$$

Pregunta 2

(a) Sabemos que el campo en el interior del solenoide infinito tiene magnitud $B = \mu_0 nI$ y afuera vale cero. Luego, el flujo que pasa por el circuito es igual al flujo que pasa por la circunferencia de radio a y como B es constante el flujo es $\Phi = \pi a^2 B = \pi a^2 \mu_0 nI$. Es decir, la "fem" inducida en el circuito con resistencia R es:

$$\varepsilon = -\pi a^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}$$

Y en magnitud, se tiene que $\varepsilon = I_R R$, es decir, la corriente que circula por el circuito es,

$$I_{Resistencia} = \frac{\pi a^2 \mu_0 nk}{R}$$

Ahora como B va hacia la derecha y aumenta, entonces el campo en el circuito se opone y va hacia la izquierda, por lo tanto la corriente fluye en sentido contrario a los punteros del reloj o hacia la derecha a través de la resistencia.

(b) La diferencia de flujo es el movimiento de atrás para delante queda dada por $\Delta\Phi = 2\pi a^2 \mu_0 nI$. Por otra parte sabemos que la corriente es la variación de la carga con respecto al tiempo $I = \frac{dQ}{dt}$ y que además, en magnitud, es $I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$, juntando ambas ecuaciones, tenemos finalmente:

$$\Delta Q = \frac{1}{R}\Delta\Phi = \frac{2\pi a^2 \mu_0 nI}{R}$$

Pregunta 3

(a) Sabemos que el campo magnético producido por un circuito circunferencial de radio b y corriente I sobre un punto sobre el eje z es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Luego, el flujo que pasa por un área circunferencial de radio a y asumiendo que el área es pequeña de tal manera que el campo permanece constante en la región de evaluación, se tiene,

$$\Phi = \frac{\mu_0 \pi I a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}$$

(b) Primero debemos calcular el campo magnético producido por un dipolo, para ello realizamos la expansión multipolar del potencial vectorial y nos quedamos hasta el segundo término, matemáticamente hablando, se tiene:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{r} d\vec{\acute{l}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (\acute{r})^n P_n(\cos\acute{\theta}) d\vec{\acute{l}}$$

Más explicitamente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\vec{\acute{l}} + \frac{1}{r^2} \oint \acute{r} \cos\acute{\theta} d\vec{\acute{l}} + ... \right]$$

Cómo el primer término es la integral cerrada sobre el circuito, esta siempre es cero (no existe el monopolo magnético :( ) con lo que la expansión dipolar del potencial vectorial es:

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint \acute{r} \cos\acute{\theta} d\vec{\acute{l}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{r} \cdot \vec{\acute{r}}) d\vec{\acute{l}}$$

La última integral se puede expresar de la siguiente forma si se utilizan identidades matemáticas,

$$\oint (\hat{r} \cdot \vec{\acute{r}}) d\vec{\acute{l}} = -\hat{r} \times \int d\vec{\acute{a}}$$

Luego y finalmente, el potencial vectorial en su expansión dipolar se puede escribir como,

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \vec{m} \times \hat{r}$$

Con $\vec{m}$ el momento magnético dipolar que se define:

$$\vec{m} = I \int d\vec{a} = I \cdot Area \cdot \hat{n}$$

Con $\hat{n}$ el vector normal al área del circuito si este último es plano. Ahora considerando el siguiente sistema de referencia, tenemos que:

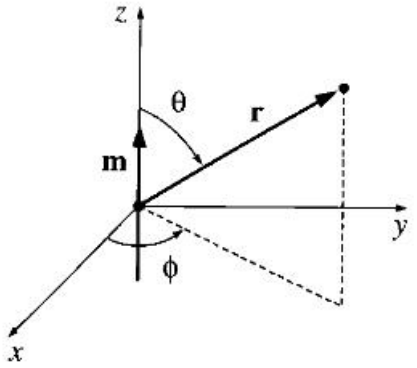

Fig. Sistema de Referencia

Con lo que podemos expresar en coordenadas esféricas:

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} m \sin theta \hat{\phi}$$

Y por último, el campo magnético viene dado por:

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I m}{4\pi r^3}(2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$$

Con $m = I\pi a^2$. Integrando sobre una "capa" esférica (fijada por el circuito grande y centrada por el circuito pequeño), se tiene que el flujo es:

$$\Phi = \int B \cdot da = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3} \int (2\cos\theta)(r^2 \sin\theta d\theta d\phi) = \frac{\mu_0 I a^2 2\pi}{2r} \int \cos\theta \sin\theta d\theta$$

Donde $r = \sqrt{b^2 + z^2}$ y $\sin\theta = b/r$ Con lo que se tiene, finalmente el mismo resultado para el flujo que en (a)

(c) Dividiendo por I ($\Phi_1 = M_{12} I_2$, $\Phi_2 = M_{21} I_1$), se comprueba que

$$M_{12} = M21 = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + z^2)^{3/2}}$$

Pregunta 4

(a) Inicialmente: $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$, luego $-L\frac{dI}{dt} = IR$, lo cual implica que: $\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$, resolviendo la EDO tenemos que: $I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$, considerando las condiciones iniciales: $I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{-Rt/L}$

(b) Sabemos que la potencia (ley de joule) viene dada por $P = I^2 R = \frac{\varepsilon_0^2}{R} e^{-2Rt/L} = \frac{dW}{dt}$. Luego, integrando se tiene que el trabajo realizado por la resistencia es:

$$W = \frac{\varepsilon_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt = \frac{1}{2} L (\varepsilon_0/R)^2$$

(c) Por otra parte, sabemos que la energía almacenada en una inductancia es:

$$W_0 = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} L (\varepsilon_0/R)^2$$

Que es lo obtenido en (b), es decir, toda la energía que disipa la resistencia viene de la inductancia.