

Solución Auxiliar N°7

Profesor Cátedra: Claudio Romero

Profesores Auxiliares: Felipe Larraín, Víctor Medina

Fecha: Lunes 12 de Mayo de 2010

Problema 1

Primero hay que darse cuenta que un condensador de área S y separación entre las placas d tiene una capacidad $C = S\epsilon_0/d$, si existe vacío entre las placas, y $C = S\epsilon/d$, si tiene un dieléctrico ϵ . Luego, la capacidad total del sistema está dada por la capacidad del condensador con el dieléctrico más la capacidad del condensador sin él, ya que están en paralelo. Es decir,

$$C_T = \frac{W}{d}(\epsilon_0(L-x) + \epsilon x)$$

Por otra parte la energía total almacenada en un condensador sin considerar el trabajo realizado por la batería es

$$U_T = \frac{1}{2}V^2 C_T = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_T}$$

(esta última expresión se utiliza si desconectamos el condensador de la fuente, ya que la carga se mantiene constante) y la fuerza viene dada por $\vec{F}_x = -\frac{\partial U_T}{\partial x} \hat{x}$, donde la dirección del sistema es como se muestra en la figura.

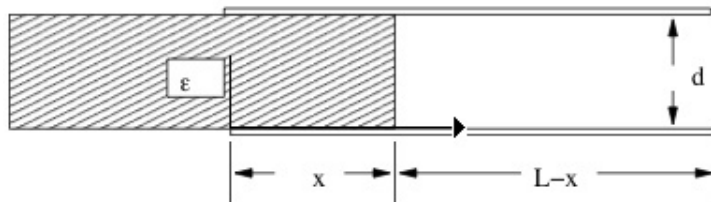


Figura 1.

Ahora si consideramos el trabajo realizado por la batería, donde la diferencia de potencial se mantiene constante no así la carga, la energía total a considerar es

$$U_T = \frac{1}{2}V^2 C_T - QV = -\frac{1}{2}V^2 C_T$$

Con lo cual se obtiene lo mismo que si consideramos la batería desconectada con carga total constante.

Problema 2

(a) Sabemos que,

$$dU = dU_{Mec} + dU_{Bat}$$

i.e., la diferencia de energía total está dada por la diferencia de energía asociada al trabajo mecánico de desplazamiento de los cuerpos, (que es opuesto al trabajo que realiza el campo eléctrico sobre ellos) y la energía que gasta la batería para que todo el proceso se realice a potencial constante.

Entonces,

$$\Delta U_{Total} = -(W_E) + W_{Bat}$$

$$\frac{1}{2}V^2 (C_2 - C_1) = -(W_E) + V\Delta Q = -(W_E) + V^2 (C_2 - C_1)$$

Finalmente,

$$W_E = \frac{1}{2}V^2 (C_2 - C_1)$$

(b) De la parte anterior, haciendo nulo el trabajo de la batería, (pues el potencial no se mantiene constante mientras los cuerpos se desplazan), se obtiene

$$\Delta U_{Total} = \frac{1}{2}Q^2 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = -(W_E)$$

$$W_E = -\frac{1}{2}Q^2 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right)$$

Para ambos casos, la energía almacenada al final es la misma y vale,

$$U_{final} = \frac{1}{2}V^2C_2 = \frac{1}{2}Q^2 \frac{1}{C_2}$$

Problema 3

Primero calcular el campo eléctrico en función de la carga encerrada, suponiendo que la placa interna tiene carga libre total Q , lo cual resulta;

$$\vec{E} = \left[\frac{Q}{\epsilon\theta_1 + (2\pi - \theta_1)\epsilon_0} \right] \frac{\hat{r}}{r}$$

Luego calcular el potencial V integrando según dr desde a hasta b . Es decir,

$$V = \left[\frac{Q}{\epsilon\theta_1 + (2\pi - \theta_1)\epsilon_0} \right] \ln b/a$$

Por último, sabemos que la capacidad es $C = Q/V$, lo cual entrega (ojo que Q está asumida como carga por unidad de largo, por lo cual la capacidad en realidad será una densidad lineal de capacidad),

$$C_T = (\epsilon\theta_1 + (2\pi - \theta_1)\epsilon_0) \ln a/b$$

Y se puede observar que es la suma de las capacidades por unidad de largo de la parte con dieléctrico y la sin, es decir, están en paralelo.

Problema 4

(a) Lo primero es notar porqué aparece una serie infinita. Dado que la carga está a una distancia x , para la placa de la izquierda debe haber una carga de valor opuesto a distancia x , y a la derecha, otra carga de valor opuesto a distancia $s - x$ de dicha placa, i.e., $s + (s - x)$ del origen suponiendo que este está centrado en la placa izquierda. El problema es que al colocar la última carga, la placa de la izquierda se desestabilizó y ahora necesita otra carga pero de valor positivo, en la posición $-(s + (s - x))$.

Cada vez que se coloca una carga, la placa opuesta se desestabiliza. La progresión que incluye las distancias de las imágenes a la izquierda y a la derecha de Q , medidas ahora con el origen en Q , se desglosa en los 4 primeros pasos en la siguiente tabla:

Izquierda	Derecha
$2x$	$2(s - x)$
$2(s - x) + 2x$	$2x + 2(s - x)$
$2x + 2(s - x) + 2x$	$2(s - x) + 2x + 2(s - x)$
$2(s - x) + 2x + 2(s - x) + 2x$	$2x + 2(s - x) + 2x + 2(s - x)$

Tabla 1.

Es decir, la distancia de la nueva imagen que se colocará a la izquierda es, medida desde la carga puntual Q , la distancia de la imagen a la derecha anterior $+2x$. Igualmente, la nueva imagen a la derecha está a la distancia de la anterior a la izquierda $+2(s - x)$. De la progresión se nota que todos los términos pares están a igual distancia de Q , por lo que la fuerza sobre ella es igual y opuesta y el efecto total de ambas es nulo. Finalmente, la fuerza sobre Q es:

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i=1)_{impares}}^{\infty} \left\{ \frac{-1}{(2x + s(i-1))^2} + \frac{1}{(2(s-x) + s(i-1))^2} \right\}$$

(b) Si $x = \eta$ pequeño,

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{4\eta^2} + \frac{1}{(2s)^2} - \frac{1}{(2s)^2} + \frac{1}{(4s)^2} - \frac{1}{(4s)^2} + \dots \right) = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0\eta^2}$$

Si $x = s/2$,

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i=1)_{\text{impares}}}^{\infty} \left\{ \frac{-1}{(si)^2} + \frac{1}{(si)^2} \right\} = 0$$

(c) Las cargas imagen que se desprecian son las que modelan el potencial de tierra, (nulo), en la placa inferior. Dado que el experimento de Millikan considera mediciones de radio para gotas de aceite en equilibrio mecánico, i.e., gotas en equilibrio crítico entre su peso y fuerza eléctrica, la distancia entre la placa y el centro de la gota, (donde se modela la posición de la carga), es mucho menor que la distancia a la placa inferior. Por ello, los efectos de las imagenes son despreciables, (puede verse algo similar en (b)), y puede usarse que,

$$F_E = F_g$$

$$\Rightarrow Q \frac{V}{s} = mg = g\rho_{\text{aceite}} \frac{4}{3}\pi R_{\text{gota}}^3$$